

# 工作物を NURBS で表現した 5 軸制御加工

小楠 進一\*・西田 知照\*\*  
扇谷 保彦\*\*・小島 龍広\*\*

## Five-axis Control Machining Expressing Work Surface Profile by NURBS

by

Shinichi KOGUSU\*, Noriteru NISHIDA\*\*, Yasuhiko OGIYA\*\* and Tatsuhiko KOJIMA\*

The information about a work surface profile is supposed to be given as a series of discrete points. The postures of a cutting tool at these points on the work are also supposed to be known. In the first step, the work surface profile expression is transformed to NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) from discrete points. Next, the real cutting path generated on the NURBS surface is derived according to the tool feed. Utilizing this cutting path, the path of tool's origin, namely the tool path is calculated. The NC codes generated by the procedure proposed in this report are shown for a half ellipsoid as an example of work.

### 1. 緒言

NC 技術の進歩に伴い、現在数多く使われている 3 軸制御の NC 工作機械のほかに、最近では多軸制御の NC 工作機械がよく使われている。多軸制御の利点として、3 軸制御では加工が困難である形状に対応できることや、段取り換えを省くことなどがあげられる。特に自由曲面の加工では、加工時間の短縮や磨きなどの後処理工程の簡略化が可能となる。

しかし、現在の 3 次元 CAD システムにおいて、異種 CAD システム間での形状表現データ交換プロトコルとしてだけでなく CAD システムのデータベースそのものが、標準として NURBS<sup>1)</sup> を搭載してきた。NURBS とは、自由曲線・曲面の数学表現形式の一つであり、Non-Uniform Rational B-Spline (非一様有理 B スプライン) の略で、ひとつの表現系に、点 (1 階)・直線 (2 階)・円弧 (3 階)・ベジェ曲線 (n 階)・スプライン (n 階) など、全てを包含できるものである。

また、工具姿勢が時々刻々と変化する多軸制御加工では、一般的にボールエンドミルの球状部分でしか切削できず、工具の側面や、フラットエンドミルやラジアスエンドミルの先端部分では切削できなかつた。

このような背景から、本研究では、工作物形状を NURBS で表現し、その制御点データを利用してテーパエンドミルの側面や、フラットエンドミルやラジアスエンドミルの先端部分でも切削できる 5 軸制御工作機械用の CAM 製作を目的とした。

次の章以降に NC データの算出方法を示すが、特に記述がない限り工作物に固定された工作物座標系 I を基準とし、座標値はすべてこの工作物座標 I の位置ベクトルとして話を進める。Table 1 に、主な使用記号を示す。

### 2. NURBS 曲面の生成と被切削点経路曲線の算出

この章では工作物表面形状を表す点列が与えられた場合について、この点列を利用して工作物表面形状を NURBS 曲面で近似する方法と、この NURBS 曲面上の被切削点経路曲線の算出方法を述べる。ここで、工具によって切削される工作物上の点を被切削点、工具の移動に伴う被切削点の移動経路を被切削点経路曲線と呼ぶことにする。

#### 2. 1 NURBS 曲面の生成

Fig. 1 において、 $W_{ij}$  は工作物上の点列を、 $P_{ij}$  は

平成 15 年 4 月 18 日受理

\*長崎県工業技術センター (Industrial Technology Center of Nagasaki)

\*\*機械システム工学科 (Department of Mechanical Systems Engineering)

Table 1 主な使用記号

・工作物(NURBS 曲面)に関する変数		・中間座標系 B の算出		
$np_u, np_v$	$(u, v)$ 各方向の工作物上の点列の数	$\alpha, \beta$	NURBS 曲面に対する工具の傾き	
$W_{ij}$	与えられた工作物上の点列	・工具形状に関する変数		
$\bar{u}_i, \bar{v}_j$	各点列 $W_{ij}$ の NURBS 曲面パラメータ	$h_1$	工具原点から $-\mathbf{n}_o$ 方向への長さ	
$mu, mv$	NURBS 曲面の $(u, v)$ 各方向の階数	$h_2$	工具原点から $\mathbf{n}_o$ 方向への長さ	
$nu, nv$	NURBS 曲面のコントロールポイントの数	$r_1$	工具の底面での半径	
$\omega_{ij}$	NURBS 曲面のウェイト	$r_2$	工具の工具原点位置での半径	
$q_{ij}$	通常座標形式のコントロールポイント	$r_3$	工具の上面での半径	
$Q_{ij} = (\omega_{ij} q_{ij}, \omega_{ij})$	NURBS 曲面のコントロールポイント	$\theta$	切削点を示す $\mathbf{t}_o - \mathbf{b}_o$ 平面にできる角度ベクトル	
$U$	NURBS 曲面の $u$ 方向ノットベクトル	$r$	切削点を示す半径方向位置ベクトル	
$V$	NURBS 曲面の $v$ 方向ノットベクトル	$\phi$	切削点を示す $\mathbf{b}_o - \mathbf{n}_o$ 平面にできる角度ベクトル	
$P_w (p_{wx}, p_{wy}, p_{wz})$	NURBS 曲面の位置ベクトル (被切削点)	$h$	切削点を示す高さ方向位置ベクトル	
$p_{wx}(u, v)$ $p_{wy}(u, v)$ $p_{wz}(u, v)$	$P_w$ の要素	$P_e (p_{ex}, p_{ey}, p_{ez})$	工具原点座標 C を基準とした時の工具曲面の位置ベクトル (切削点)	
・被切削点経路曲線に関する変数		$p_{ex}(\theta, r, \phi, h)$ $p_{ey}(\theta, r, \phi, h)$ $p_{ez}(\theta, r, \phi, h)$	$P_e$ の要素	
$UV(t)$	$uv$ 曲線	$P_o$	工具原点位置	
$u(t), v(t)$	NURBS 曲面パラメータ	・NC データに関する変数		
$t$	$uv$ 曲線のパラメータ	$x, y, z, a, b$	NC データ	
・被切削点座標系 A に関する変数		$k$	工具原点位置を示すパラメータ	
$n_w (n_{wx}, n_{wy}, n_{wz})$	NURBS 曲面の単位法線ベクトル	・座標系に関する変数		
$n_{wy}(u, v)$ $n_{wy}(u, v)$ $n_{wz}(u, v)$	$n_w$ の要素	$I$	工作物に固定された工作物座標	
・被切削点座標系 A に関する変数		$A$	切削点座標系	
$t_w (t_{wx}, t_{wy}, t_{wz})$	切削点軌道曲線の単位接線ベクトル	$B$	中間座標系	
$t_{wx}(u, v)$ $t_{wy}(u, v)$ $t_{wz}(u, v)$	$t_w$ の要素	$C$	工具原点座標系	
・被切削点座標系 A に関する変数		$D$	機械側工具原点座標系	
$b_w (b_{wx}, b_{wy}, b_{wz})$	NURBS 曲面の単位陪法線ベクトル	・NURBS の微分に関する変数		
$b_{wx}(u, v)$ $b_{wy}(u, v)$ $b_{wz}(u, v)$	$b_w$ の要素	$P_u, P_v$	$P_w$ の $u, v$ に関する偏微分係数	
・被切削点座標系 A に関する変数		$u_w, v_w$	$u, v$ の進行方向への単位接線ベクトル	
・被切削点座標系 A に関する変数		$ds$	曲面上曲線長の微分形式	
・被切削点座標系 A に関する変数		$N_{i,j}$	B スプライン基底関数	

NURBS 曲面上の点の位置を、 $I$  は工作物座標系を示す。一般的には、CAD から NURBS 曲面データを受け取ることになるが、この節では 3 次元測定器などを使って  $np_u \times np_v$  個の工作物上の点列  $W_{ij}$  が与えられた場合に NURBS 曲面を求める方法、すなわち与えられた点列の近似による NURBS 曲面の生成について述べる。

与えられた工作物上の点列を  $W_{ij} (i = 0, \dots, np_u - 1, j = 0, \dots, np_v - 1)$  とし、これに以下の条件を加えて、NURBS 曲面のコントロールポイント  $Q_{ij} (i = 0, \dots, nu - 1, j = 0, \dots, nv - 1)$  を求める。ただし、求めるコントロールポイントの数は  $nu \times nv (nu = np_u, nv = np_v)$  とする。

- ・  $(u, v)$  各方向の階数:  $mu, mv$
- ・  $u$  方向のノットベクトル:  $\mathbf{U} = [u_0 \cdots u_{mu+nu-1}]$
- ・  $v$  方向のノットベクトル:  $\mathbf{V} = [v_0 \cdots v_{mv+npv-1}]$
- ・ 工作物上の点列  $\mathbf{W}_{ij}$  を通過するときの NURBS 曲面パラメータ:  $(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$  ( $i=0, \dots, npu-1$   $j=0, \dots, npv-1$ )  
 $u$  方向のノットベクトル  $\mathbf{U} = [u_0 \cdots u_{mu+nu-1}]$  と  $v$  方向のノットベクトル  $\mathbf{V} = [v_0 \cdots v_{mv+npv-1}]$ , および  $(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$  の与え方については後で述べる.

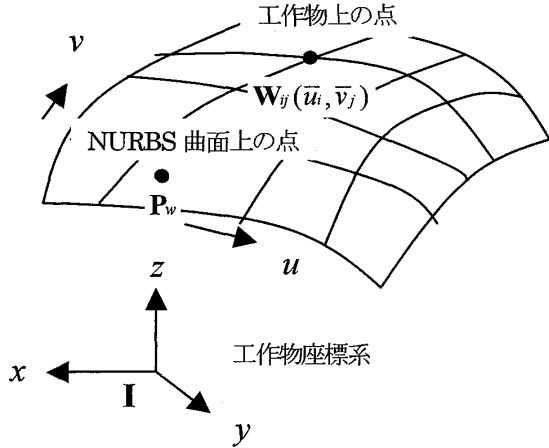


Fig. 1 点列  $\mathbf{W}_{ij}$  による NURBS 曲面の生成

上記の条件のもとで、コントロールポイントの計算方法を示す。まず、曲面パラメータ  $(u, v) = (\bar{u}_i, \bar{v}_j)$  のときに NURBS 曲面が点  $\mathbf{W}_{ij}$  を通過する条件から、式(2.1)が得られる。

なお、ここではコントロールポイントの重み  $\mathbf{W}_{ij}$  は全て1とする。従って、式(2.1)は通常座標形式のコントロールポイント  $\mathbf{q}_{ij}$  と与えられた点列  $\mathbf{W}_{ij}$  の関係式となっている。式(2.2)は  $\mathbf{Q}_{ij}$  と  $\mathbf{q}_{ij}$  の関係を示す。

$$\mathbf{W}_{ij} = \sum_{k=0}^{nu-1} \sum_{l=0}^{mv-1} N_{k,mu}(\bar{u}_i) N_{l,mv}(\bar{v}_j) \mathbf{q}_{k,l} \quad (2.1)$$

$$i=0, \dots, npu-1 \quad j=0, \dots, npv-1$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = (\mathbf{q}_{ij}, 1) \quad (2.2)$$

ここで、式(2.1)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ij} &= \sum_{k=0}^{nu-1} N_{k,mu}(\bar{u}_i) \left( \sum_{l=0}^{mv-1} N_{l,mv}(\bar{v}_j) \mathbf{q}_{k,l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{nu-1} N_{k,mu}(\bar{u}_i) \mathbf{R}_{k,j} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし、

$$\mathbf{R}_{k,j} = \sum_{l=0}^{mv-1} N_{l,mv}(\bar{v}_j) \mathbf{q}_{k,l} \quad (2.4)$$

式(2.3)および式(2.4)を使って、コントロールポイント  $\mathbf{q}_{ij}$  を求めることにする。

まず、式(2.3)はマトリックスを用いて次のように表すことができる。

各  $j=0, \dots, npv-1$  について、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{0,j} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{i,j} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{npu-1,j} \end{bmatrix} &= \mathbf{M1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,j} \\ \mathbf{R}_{k,j} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{nu-1,j} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M1} &= \begin{bmatrix} N_{0,mu}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{k,mu}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{nu-1,mu}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{0,mu}(\bar{u}_i) & \cdots & N_{k,mu}(\bar{u}_i) & \cdots & N_{nu-1,mu}(\bar{u}_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{0,mu}(\bar{u}_{npu-1}) & \cdots & N_{k,mu}(\bar{u}_{npu-1}) & \cdots & N_{nu-1,mu}(\bar{u}_{npu-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

これを解いて、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,j} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{k,j} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{nu-1,j} \end{bmatrix} = \mathbf{M1}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{0,j} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{i,j} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{npu-1,j} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

式(2.6)から、 $\mathbf{R}_{ij}$  ( $k=0, \dots, nu-1, j=0, \dots, npv-1$ ) が得られる。

次に、式(2.4)はマトリックスを用いて次のように表すことができる。

各  $k=0, \dots, nu-1$  について、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k,0} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{k,j} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{k,npv-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k,0} \\ \mathbf{q}_{k,j} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{k,mv-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{M2} = \begin{bmatrix} N_{0,mv}(\bar{v}_0) & \cdots & N_{l,mv}(\bar{v}_0) & \cdots & N_{mv-1,mv}(\bar{v}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{0,mv}(\bar{v}_j) & \cdots & N_{l,mv}(\bar{v}_j) & \cdots & N_{mv-1,mv}(\bar{v}_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{0,mv}(\bar{v}_{npv-1}) & \cdots & N_{l,mv}(\bar{v}_{npv-1}) & \cdots & N_{mv-1,mv}(\bar{v}_{npv-1}) \end{bmatrix}$$

これを解いて、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k,0} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{k,l} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{k,mv-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M2}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k,0} \\ \mathbf{R}_{k,j} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{k,npv-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

式(2.8)からコントロールポイント  $\mathbf{q}_{k,j}$  ( $k=0, \dots, nu-1, j=0, \dots, npv-1$ ) が求まり、式(2.9)の NURBS 曲面式を使って、工作物曲面を NURBS で表現できる。

$$\mathbf{P}_w(u, v) \equiv (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}(u) N_{j,mv}(v) \omega_{i,j} \mathbf{q}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}(u) N_{j,mv}(v) \omega_{i,j}} \quad (2.9)$$

$$u_{mu-1} \leq u \leq u_{nu} \quad v_{mv-1} \leq v \leq v_{nv}$$

以下に、曲面パラメータ ( $\bar{u}_i, \bar{v}_j$ ) とノットベクトル  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  の与え方について説明する。

[曲面パラメータ列 ( $\bar{u}_i, \bar{v}_j$ ) の与え方]

与えられた工作物上点列  $\mathbf{W}_{ij}$  の点間距離を元にしてパラメータ間隔を決定する。ただし曲面の場合は、点列  $\mathbf{W}_{ij}$  が ( $u, v$ ) 各方向にそれぞれ  $npv, npv$  組あるので、各組ごとにこの方法を適用してパラメータ列を求め、最終的にそれらを平均化するようにする。

パラメータ列  $\bar{u}_i$  および  $\bar{v}_j$  を求める方法を、式 (2.10) と式 (2.11) に示す。

$$\bar{u}_i = \frac{1}{npv} \sum_{l=0}^{npv-1} \bar{u}_i^{(l)}$$

$$\bar{u}_i^{(l)} = \begin{cases} 0 & (i=0) \\ \bar{u}_{i-1}^{(l)} + \frac{|\mathbf{p}_{il} - \mathbf{p}_{i-1l}|}{d} & (i=1, \dots, npu-2) \\ 1 & (i=npu-1) \end{cases}$$

$$d = \sum_{i=1}^{npu-1} |\mathbf{p}_{il} - \mathbf{p}_{i-1l}| \quad (2.10)$$

$$\bar{v}_j = \frac{1}{npu} \sum_{k=0}^{npu-1} \bar{v}_j^{(k)}$$

$$\bar{v}_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & (j=0) \\ \bar{v}_{j-1}^{(k)} + \frac{|\mathbf{p}_{kj} - \mathbf{p}_{kj-1}|}{d} & (j=1, \dots, npv-2) \\ 1 & (j=npv-1) \end{cases}$$

$$d = \sum_{j=1}^{npv-1} |\mathbf{p}_{kj} - \mathbf{p}_{kj-1}| \quad (2.11)$$

[ノットベクトルの与え方]

$u, v$  それぞれの方向について、式 (2.12) により等間隔に設定するか、またはパラメータ列  $\bar{u}_i, \bar{v}_j$  の値を使って、式 (2.13) により点列の分布を反映させて与える。 $u$  方向について考えると、等間隔に設定する場合

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$$

$$u_i = \frac{i-m+1}{n-m+1} \quad (i=m, \dots, n-1) \quad (2.12)$$

$$u_n = \dots = u_{n+m-1} = 1$$

パラメータ  $\bar{u}_i$  を参考にして設定する場合

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$$

$$u_{j+m-1} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=j}^{j+m-2} \bar{u}_i \quad (j=1, \dots, n-m) \quad (2.13)$$

$$u_n = \dots = u_{n+m-1} = 1$$

$v$  方向も同様である。

## 2.2 $uv$ 曲線による被切削点経路曲線の算出

Fig.2 において、前節のように NURBS 曲面を生成したとき、この NURBS 曲面上の工具によって切削される点を被切削点、その被切削点の経路を被切削点経路曲線と呼ぶことにする。この被切削点経路曲線を  $uv$  曲線  $\mathbf{UV}(t)$  で表現する。

$uv$  曲線の表現形式は曲面の表現形式とは無関係に選ぶことができ、曲面が NURBS 形式である場合に、NURBS は勿論 Bezier や折れ線で  $uv$  曲線を定義することも可能である。以下に  $uv$  曲線  $\mathbf{UV}(t)$  を定義する。

$$\mathbf{UV}(t) \equiv (u(t), v(t)) \quad (2.14)$$

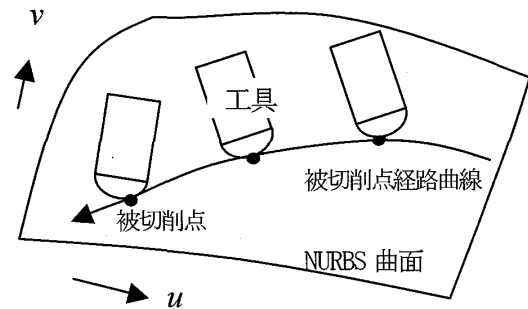


Fig. 2 NURBS 曲面から切削点経路曲線の生成

## 3. 工具原点座標系の算出

Fig. 3 は、被切削点経路曲線、工具、被切削点座標系  $\mathbf{A}$ 、工具原点座標系  $\mathbf{C}$  の関係を示す。被切削点座標系  $\mathbf{A}$  は、被切削点  $\mathbf{P}_w$  を原点とし、座標軸として被切削点  $\mathbf{P}_w$  における NURBS 曲面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_w$  と被切削点経路曲線の単位接線ベクトル  $\mathbf{t}_w$ 、および  $\mathbf{n}_w, \mathbf{t}_w$  両方に垂直な単位ベクトル  $\mathbf{b}_w$  を用いる。また、工具原点座標系  $\mathbf{C}$  は工具に固定された座標系であり、工具原点  $\mathbf{P}_o$  を原点とする。

まず、被切削点座標系  $\mathbf{A}$  の算出方法を示す。次に、この被切削点座標系  $\mathbf{A}$  を、工具姿勢と一致するように回転させ、この座標系の原点が工具原点位置と一致するように並進を行うことで、工具に固定された工具原点座標系  $\mathbf{C}$  を算出する。この過程で工具の位置・姿勢を求めることができる。ここで、被切削点座標系  $\mathbf{A}$  および工具原点座標系  $\mathbf{C}$  は工作物に固定された工作物座標系  $\mathbf{I}$  を基準として表されている。

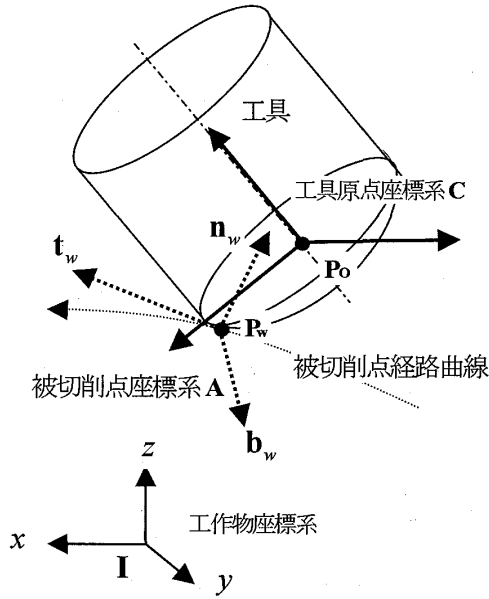


Fig. 3 被切削点 A と工具原点座標系 C

3. 1 被切削点座標系 A

(1) NURBS 曲面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_w$

Fig. 4 において、曲面パラメータ  $u, v$  で表される NURBS 曲面上の位置  $\mathbf{P}_w(u, v)$  の  $u, v$  に関する偏微分係数  $\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v$  から、それぞれの曲面パラメータの進行方向への単位接線ベクトル  $\mathbf{u}_w, \mathbf{v}_w$  を求めることができるので、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_w$  は次式で得ることができる。

$$\mathbf{u}_w = \frac{\mathbf{P}_u}{|\mathbf{P}_u|}, \mathbf{v}_w = \frac{\mathbf{P}_v}{|\mathbf{P}_v|} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n}_w(n_{wx}(u, v), n_{wy}(u, v), n_{wz}(u, v)) = \frac{\mathbf{u}_w \times \mathbf{v}_w}{|\mathbf{u}_w \times \mathbf{v}_w|}$$

(2) 被切削点経路曲線の単位接線ベクトル  $\mathbf{t}_w$

Fig. 4 において、点  $\mathbf{P}_w(u, v)$  における被切削点経路曲線の進行方向の単位ベクトル  $\mathbf{t}_w$  は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_w(t_{wx}(u, v), t_{wy}(u, v), t_{wz}(u, v)) &= \frac{d\mathbf{P}_w(u, v)}{ds(u, v)} \\ &= \frac{\mathbf{P}_u du + \mathbf{P}_v dv}{\sqrt{d\mathbf{P}(u, v)^2}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_u du + \mathbf{P}_v dv}{\sqrt{\mathbf{P}_u^2 du^2 + 2\mathbf{P}_u \mathbf{P}_v dudv + \mathbf{P}_v^2 dv^2}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3)  $\mathbf{n}_w, \mathbf{t}_w$  両方に垂直な単位ベクトル  $\mathbf{b}_w$

Fig. 4 において、 $\mathbf{b}_w$  は次のようにして求めることができる。

$$\mathbf{b}_w(b_{wx}(u, v), b_{wy}(u, v), b_{wz}(u, v)) = \mathbf{n}_w \times \mathbf{t}_w \quad (3.3)$$

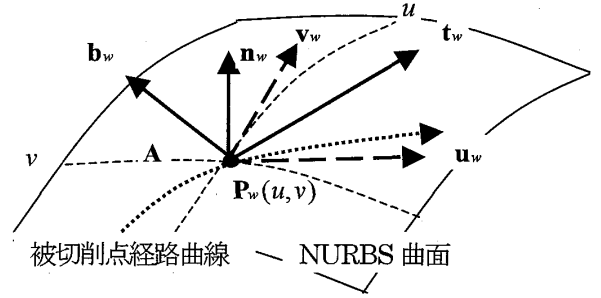


Fig. 4 被切削点座標系 A

(4) NURBS 曲面の偏微分

NURBS 曲面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_w$ 、被切削点経路曲線の単位接線ベクトル  $\mathbf{t}_w$  を求めるには NURBS 曲面の偏微分を行わなければならない。NURBS 曲面を表す式(2.9)の分母、分子をそれぞれ  $\omega, \mathbf{F}$  とおくと、式(2.9)は次式で表される。

$$\mathbf{P}(u, v) = \frac{\mathbf{F}(u, v)}{\omega(u, v)} \quad (3.4)$$

式(3.4)の曲面パラメータ  $u$  に関するこの曲面の偏微分は次のような手続きで計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u, v) &= \omega(u, v) \mathbf{P}(u, v) \\ \mathbf{F}_u(u, v) &= \omega_u(u, v) \mathbf{P}(u, v) + \omega(u, v) \mathbf{P}_u(u, v) \\ \therefore \mathbf{P}_u(u, v) &= \frac{(\mathbf{F}_u(u, v) - \omega_u(u, v) \mathbf{P}(u, v))}{\omega(u, v)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

このとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u &= \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} \dot{N}_{i, mu}(u) N_{j, mv}(v) \mathbf{q}_{ij} \\ \omega_u &= \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} \dot{N}_{i, mu}(u) N_{j, mv}(v) q_{ij} \end{aligned} \quad (3.6)$$

NURBS 曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  の偏微分係数  $\mathbf{P}_v$  も同様である。

(5) 被切削点座標系 A の算出

被切削点座標系 A は、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t_{wx} & b_{wx} & n_{wx} & p_{wx} \\ t_{wy} & b_{wy} & n_{wy} & p_{wy} \\ t_{wz} & b_{wz} & n_{wz} & p_{wz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

と表される。

### 1. 2 中間座標系 B の算出

Fig. 5 において, 前節で算出した被切削点座標系 A を  $n_w$  軸を中心に  $\alpha$  回転した後,  $b_1$  軸を中心に  $\beta$  回転したときの中間座標系 B が工具原点座標系 C と同じ姿勢となる. 従って, 中間座標系 B は,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \text{Rot}[\mathbf{n}_w, \alpha] \cdot \text{Rot}[\mathbf{b}_1, \beta]$$

$$= \mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3. 8)$$

と表される

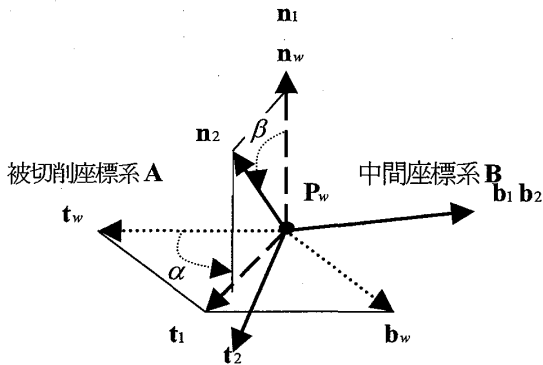


Fig. 5 中間座標系

### 3. 3 工具原点座標系 C の算出

まず, 工具モデルを Fig. 6 に示す. 工作物座標系 C は工具に固定され, 原点は工具原点  $P_o$  に位置し, 軸はそれぞれ  $t_o, b_o, n_o$  となる. 工具形状は, 工具底面での半径を  $r_1$ , 工具原点位置での半径を  $r_2$ , 工具切れ刃上端での半径を  $r_3$ , 工具原点から底面までの距離を  $h_1$ , および工具原点から工具切れ刃上端までの距離を  $h_2$  で表されている. 切削点  $P_c$  はパラメータ  $\theta, r, \phi, h$  で示される. また, 工具形状曲面を3つに分け, それぞれ「底面」, 「球面」, 「側面」と呼ぶことにする. このモデルにより, ボールエンドミルをはじめ, ラジラスエンドミル, フラットエンドミルを表現できる.

工具原点座標系 C を基準とすると, 工具曲面上の切削点  $P_e(p_{ex}, p_{ey}, p_{ez})$  は,

$$\begin{aligned} p_{ex} &= (r + (r_2 - r_1) \cos \phi + \frac{r_3 - r_2}{h_2} h) \cos \theta \\ p_{ey} &= (r + (r_2 - r_1) \cos \phi + \frac{r_3 - r_2}{h_2} h) \sin \theta \\ p_{ez} &= h_1 \sin \phi + h \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta \leq 180, 0 \leq r \leq r_1, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0, 0 \leq h \leq h_2 \quad (3. 9)$$

と表現できる.

以下, それぞれの工具面 (底面, 球面, 側面) について切削点位置  $P_e$  の算出方法を述べ, 工具原点座標系 C を求める.

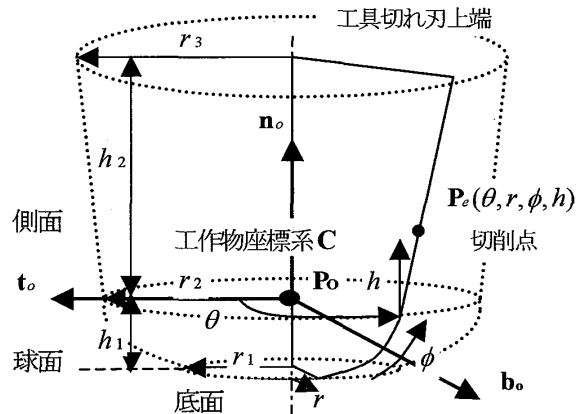


Fig. 6 工具モデル

#### (1) 底面での切削点 $P_e$ の算出

前節より, 底面で切削するとき  $\alpha =$  任意,  $\beta = 0$  であり, 工具側の変数の定義域は下記ようになる.

$$0 \leq \theta \leq 180, 0 \leq r \leq r_1, \phi = -\frac{\pi}{2}, h = 0 \quad (3. 10)$$

Fig. 7 から, 底面上の切削点  $P_e$  は下記のようになる.

$$\left. \begin{aligned} p_{ex} &= r \cos \theta \\ p_{ey} &= r \sin \theta \\ p_{ez} &= -h_1 \end{aligned} \right\} \quad (3. 11)$$

このとき,

$$\theta = \alpha, r = \text{任意} \quad (3. 12)$$

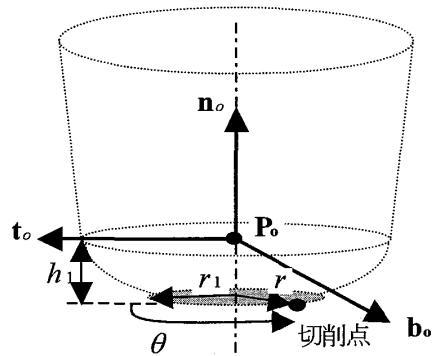


Fig. 7 切削点位置が底面にある時

#### (2) 球面での切削点 $P_e$ の算出

前節より球面で切削するとき  $\alpha =$  任意,  $0 \leq \beta \leq \pi/2$

であり、工具側の変数の定義域は下記のようなになる。

$$0 \leq \theta \leq 180, r = r_1, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0, h = 0 \quad (3.13)$$

Fig. 8 から、球面上の切削点  $P_e$  は下記のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{ex} &= (r_1 + (-r_1 + r_2) \cos \phi) \cos \theta \\ p_{ey} &= (r_1 + (-r_1 + r_2) \cos \phi) \sin \theta \\ p_{ez} &= h_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

このとき、

$$\theta = \alpha, \phi = \beta - \frac{\pi}{2} \quad (3.15)$$

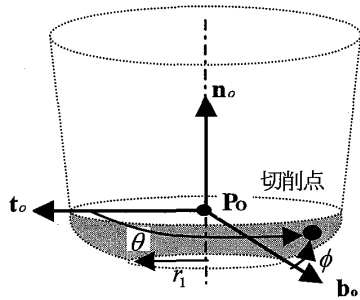


Fig. 8 切削点位置  $P_e$  が側面にある時

### (3) 側面での切削点 $P_e$ の算出

前節より側面で切削するとき  $\alpha = \text{任意}$ ,  $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}(r_3 - r_2/h_2)$  であり、工具側の変数の定義域は下記のようなになる。

$$0 \leq \theta \leq 180, r = r_1, \phi = 0, 0 \leq h \leq h_2 \quad (3.16)$$

Fig. 9 から、側面上の切削点  $P_e$  は下記のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{ex} &= (r_2 + \frac{-r_2 + r_3}{h_2} h) \cos \theta \\ p_{ey} &= (r_2 + \frac{-r_2 + r_3}{h_2} h) \sin \theta \\ p_{ez} &= h \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

このとき、

$$\theta = \alpha, h = \text{任意} \quad (3.18)$$

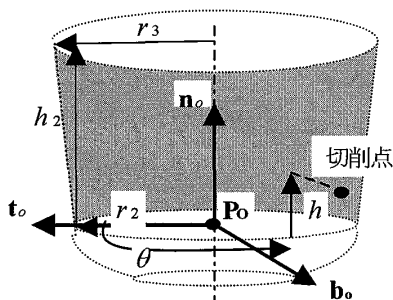


Fig. 9 切削点位置 が側面にある時

### (4) 工具原点座標系 C の算出

基準を工具原点座標系 C とする切削点位置  $P_e$  が求められた。Fig. 10 において、この切削点位置  $P$  を式 (3.19) に代入して、工具原点座標系 C を算出する。

$$\begin{aligned} C &= B \cdot \text{Trans}[p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ez}]^{-1} \\ &= B \cdot \text{Trans}[-p_{ex} \ -p_{ey} \ -p_{ez}] \\ &= B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_{ex} \\ 0 & 1 & 0 & -p_{ey} \\ 0 & 0 & 1 & -p_{ez} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

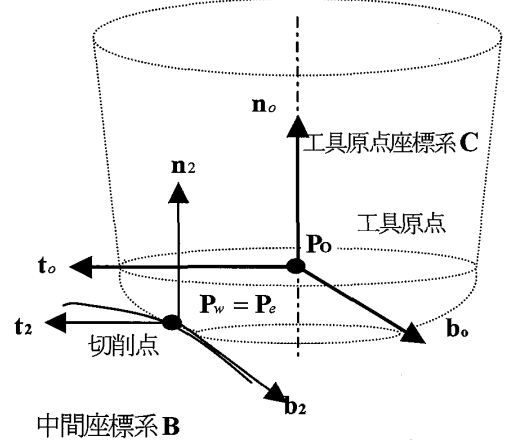


Fig. 10 工具原点座標系 C

### 4. 機械側工具原点座標系と NC データの算出

工具原点座標系 C は工作物形状に関連付けされた工具原点座標系である。この工具原点座標系 C に対し、工作機械の関節にそれぞれ座標系を作り、これらの座標系の関係から、工作物座標系を基準として工具原点座標系を表したものを機械側工具原点座標系 D とする。工具原点座標系 C と機械側工具原点座標系 D が等しいことから、NC データを算出することができる。

たとえば、Photo. 1 のような工作機械を考えると、機械側工具原点座標系 D は、

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & 0 & \sin(b) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(b) & 0 & \cos(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(a) \cdot \sin(b) & \cos(a) \cdot \sin(b) & x + k \cos(a) \cdot \sin(b) \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & y - k \sin(a) \\ -\sin(b) & \sin(a) \cdot \cos(b) & \cos(a) \cdot \cos(b) & z + k \cos(a) \cdot \cos(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。

ここで、 $x, y, z, \alpha, \beta$  はNCデータ、 $k$ はa軸とb軸が直交した点から工具原点までの距離を示す。

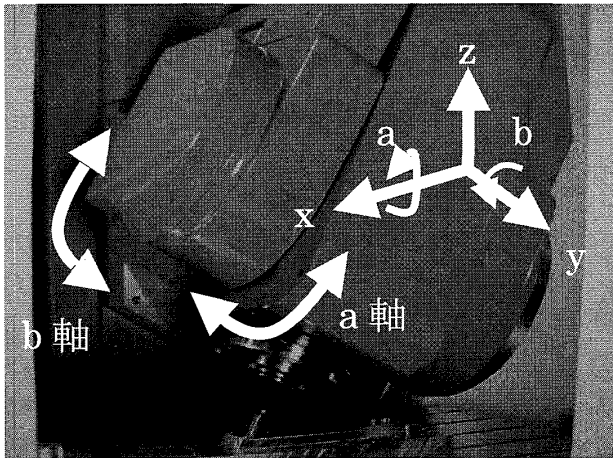


Photo. 1 5軸制御工作機械

以下に工作物形状を横100mm, 縦60mm, 高さ80mmの半楕円体, 工具を $r_1=4.5\text{mm}$ ,  $r_2=5\text{mm}$ ,  $r_3=6\text{mm}$ ,  $h_1=0.5\text{mm}$ ,  $h_2=30\text{mm}$ のラジラス工具, 工作物曲面に対する工具の傾きを $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$ , a軸とb軸が直交した点から工具原点までの距離を $k=200\text{mm}$ とした時の5軸制御加工機を制御するためのNCデータの一部を示す。ここで、Fig. 11は半楕円体工作物形状と例示したNCデータに対応する切削点(白抜き口印)である。

NCデータ例の一部(7点分)

```
x-225.955 y0.0 z96.1029 a0.0 b60.00
x-207.374 y0.0 z141.799 a0.0 b51.061
x-177.887 y0.0 z188.007 a0.0 b40.688
x-133.630 y0.0 z231.220 a0.0 b27.994
x-70.4013 y0.0 z264.932 a0.0 b11.893
x 11.2270 y0.0 z276.697 a0.0 b-8.0670
x 96.1029 y0.0 z255.955 a0.0 b-30.000
```

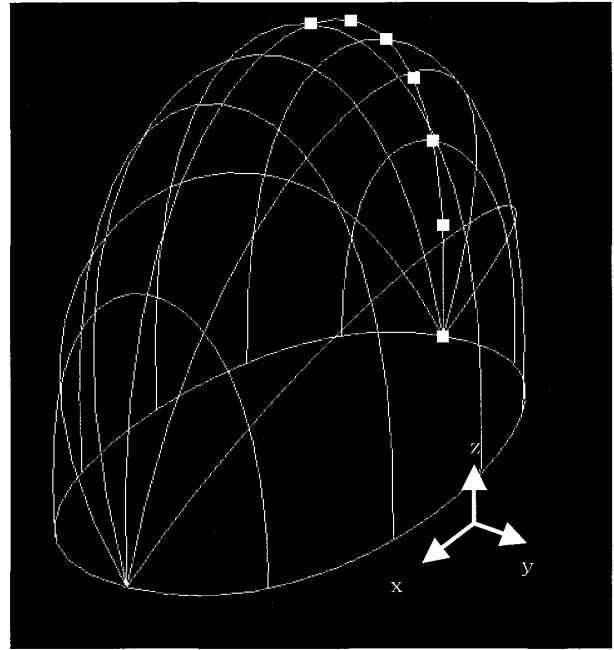


Fig. 11 工作物形状と切削点

## 5. 結 言

工作物上の点列データから工作物形状を表すNURBSデータを算出した。このNURBSデータまたはCADから得たNURBSデータから自由に被切削点経路曲線を表現することができることを示した。また、テーパエンドミルや任意の先端切れ刃形状のエンドミルに関し、工具面上の任意の点で切削を可能にするNCデータの算出法を確立した。このNCデータ算出法は、いかなる5軸制御加工機にも適用することが可能である。今後、このNCデータを使った実切削を行っていく。

## 参考文献

- 1) 三浦 曜, 望月一正; CAD・CG技術者のための実践NURBS