

異形サンドイッチ板の曲げ・自由振動解析

森田千尋*・林 博樹**・崎山 毅***
松田 浩***・黄 美***・馬 秀琴****

Bending and Free Vibration Analysis of Irregular Sandwich Plates

by

Chihiro MORITA*, Hiroki HAYASHI**, Takeshi SAKIYAMA***
Hiroshi MATSUDA***, Mei HUANG*** and XiuQin MA****

In this paper, a discrete method for analyzing the bending and free vibration problems of irregular sandwich plates is proposed. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The characteristic equation of the free vibration is derived by applying the Green function which is obtained as a discrete solution of differential equations governing the flexural behavior of the irregular sandwich plates under the action of a concentrated load. By applying the characteristic equation, the behavior of the free vibration of the irregular sandwich plates can be analyzed efficiently without a calculation by trail and error method.

Some numerical analyses are carried out for the bending and free vibration problems of irregular sandwich plates. The efficiency and accuracy of numerical solutions by the present method are investigated.

1. はじめに

昨今の構造物の大型化に伴い、構造物自体の軽量化を図るようになってきており、船、航空機、ロケット等においては古くから重量の低減が図られてきている。これらの軽量化の最大の目標は、使用材料を可能な限り薄く、可能な限り高い強度をもつ相反する2つの事柄を満足させることであり、そこで、脚光をあびたのが複合材料である。複合材料は、軽くかつ丈夫であるといったメリットがあるため、前述した分野にはいち早く取り入れられ成果を挙げている。

さらに、軽量でせん断力だけを伝えるバルサ発泡材などを用いた芯材(コア)と、比強度、比剛性の優れた金属材料やFRPなどを用いた表面材(フェイスプレート)で構成されたサンドイッチ構造は、軽量化を図る上で望ましい構造と言える。この構造特性として、フェイスプレートで曲げや軸力を、コアでせん断を受け持

つ特性を持ち、コアの厚みを増すことで、全体の曲げ剛性を大きくする効果があることから、構造物にとって有利となることが分かる。

一方、構造物は周辺環境との調和やシボリックなものなど、様々な目的により複雑な設計となってきた。容易な矩形板だけでなく、様々な形状の板(円形板、斜板など)の解析の必要性が出てきている。

著者らはこれまで、矩形板を基礎微分方程式に基づいて直接的に解析しうる解法として離散的近似解法¹⁾を提案してきた。本研究では、まず、サンドイッチ板および異形板への離散的近似解法の適用性を検証し、サンドイッチ構造を有する異形板の曲げおよび自由振動特性を明らかにすることを目的としている。

平成15年4月18日受理

* 大学院生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

** (株)日本システムディベロップメント (Nippon System Development Co., Ltd.)

*** 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

**** 燕山大学 (Yanshan University)

2. 解析手法

2. 1 サンドイッチ板の基礎微分方程式

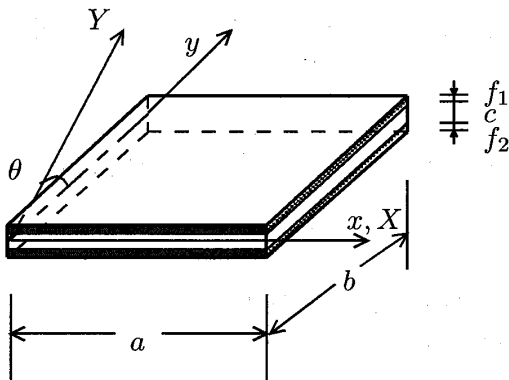


図1: サンドイッチ板

図1に示すように、矩形座標系 X, Y 軸，斜交座標系 x, y 軸とし， y 軸は Y 軸に対し斜角 θ だけ傾いているものとする。せん断力を Q_y, Q_x ，ねじりモーメントを M_{xy} ，曲げモーメントを M_y, M_x ，たわみ角を θ_y, θ_x および垂直方向の変位成分を w とすれば，横荷重 q を受ける斜板を含む一般的なサンドイッチ板の曲げに関する基礎微分方程式は，次の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (3)$$

$$a_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + a_{13} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \frac{M_x}{D} \quad (4)$$

$$a_{21} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + a_{23} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \frac{M_y}{D} \quad (5)$$

$$a_{31} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + a_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \frac{M_{xy}}{D} \quad (6)$$

$$a_{44} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + a_{45} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{Q_y}{S} \quad (7)$$

$$a_{54} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + a_{55} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{Q_x}{S} \quad (8)$$

ここで， $q = q(x, y)$: 横荷重強度， $D = D(x, y) = B/(1-\nu^2)$: 板剛度， $B = E_f f_1 f_2 h^2 (f_1 + f_2)$ ， E_f : フェイスプレートの弾性係数， f_1, f_2 : フェイスプレートの上・下厚， $h = c + (f_1 + f_2)/2$: 板厚， c : コア厚， ν : ポアソン比， $S = G_c h^2 / c$ ， G_c : コアのせん断弾性係数であり， a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i, j = 4, 5$) は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{1}{\cos^3 \theta}, & a_{12} = a_{21} &= \frac{\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta}, \\ a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} &= -\frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta}, \\ a_{33} &= \frac{1 + \sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta}{2 \cos^3 \theta}, & a_{44} = a_{55} &= \frac{1}{\cos \theta}, \\ a_{45} = a_{54} &= 0 \end{aligned}$$

2. 2 離散化グリーン関数

本論文においては，グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法を提示する。

まず，基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより，サンドイッチ板の基礎微分方程式の離散解を求め，これに基づき離散化されたグリーン関数を求める。さらに，このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し，これに数値積分を適用して固有値解析を行う。

次の無次元量 $X_i \sim X_8$

$$X_1 = \frac{a^2 Q_y}{D_0(1-\nu^2)}, \quad X_2 = \frac{a^2 Q_x}{D_0(1-\nu^2)},$$

$$X_3 = \frac{a M_{xy}}{D_0(1-\nu^2)}, \quad X_4 = \frac{a M_y}{D_0(1-\nu^2)},$$

$$X_5 = \frac{a M_x}{D_0(1-\nu^2)}, \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x, \quad X_8 = \frac{w}{a},$$

および， x, y に関して， $x = a\eta, y = b\zeta$ なる無次元量 η, ζ を導入すると，無次元化された離散化グリーン関数は，任意の点 $x = x_0, y = y_0$ ($x_0/a = \eta_0, y_0/b = \zeta_0$) に作用する単位荷重 P により，次のように表わされる。

$$X_8(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{Pa^2}{D_0} W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (9)$$

ここで，式(9)は，任意の点 (η_0, ζ_0) に単位荷重 P が作用した場合 ($q(\eta, \zeta) = \delta(\eta - \eta_0)\delta(\zeta - \zeta_0)$) の垂直方向変位である。

無次元化されたグリーン関数を求めるため，式(1)～(8)を無次元化すると次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^8 \left\{ F_{1ts} \frac{\partial X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} X_s \right\} \\ + \frac{Pa^2}{D_0} \cos \theta \delta_{t1} \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0) = 0 \quad (10) \\ (t = 1 \sim 8) \end{aligned}$$

ここで， $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり， $\delta(\eta - \eta_0), \delta(\zeta - \zeta_0)$: ディラックのデルタ関数， δ_{t1} : クロネッカーのデルタである。

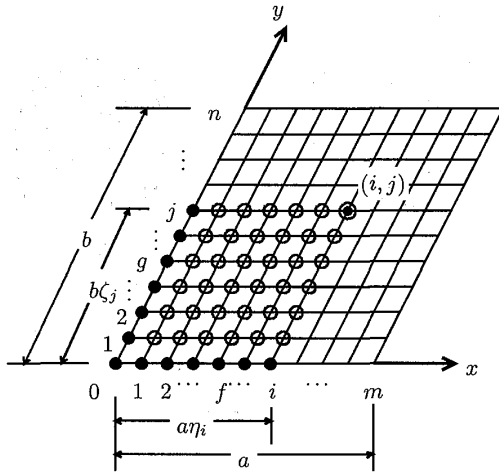


図2：サンドイッチ板の飛散点

図2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを $[i, j]$ と表記することとする。また、●印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別する。

基礎微分方程式(10)における $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ が変数係数であることに注意し、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、板の縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left\{ \sum_{k=0}^i a_{pijkd} X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} X_{s0l} \right\} + q_{pij} \quad (11)$$

$(r = 1, 3, 4, 6, 7, 8, s = 2, 3, 5, 6, 7, 8)$

式(11)は板の離散表示された離散解である。この式に含まれる境界従属点の諸量 X_{rk0}, X_{s0l} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 X_{rk0}, X_{s0l} に関係づける要素 a_{pijkd}, b_{pijld} は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の導入過程の詳細は、文献¹⁾を参照されたい。

式(11)を用いて、サンドイッチ板の曲げ解析を行うことができる。

2.3 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1)~(8)の近似解(11)に含まれる積分定数 X_{rk0}, X_{s0l} は、具体的には、それぞれ板の $y=0, x=0$ なる边上における断面力および変形を表わす。 $y=0$ において $Q_x, M_x, x=0$ において Q_y, M_y は積分定数として存在しないため、各等分割点において合

計6個ずつの積分定数が存在するが、板の境界条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は、はじめから既知である。残りの3個の未知なる積分定数は、 $x=a, y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

図3に、周辺固定支持板の場合の積分定数と境界条件を示す。隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2境界边上での諸量間の関係を考慮して定められる。

なお、本論文における境界条件は、全て周辺固定支持としている。

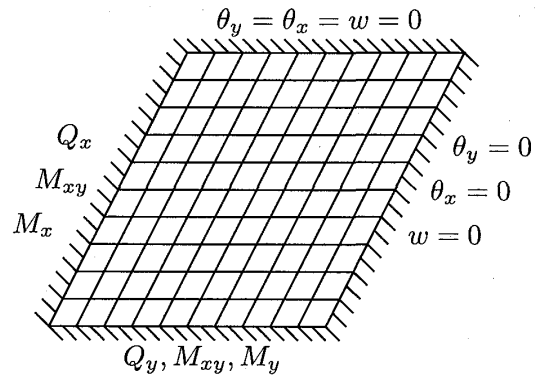


図3：積分定数と境界条件

2.4 固有振動数方程式

サンドイッチ板の自由振動を支配する運動方程式は、式(1)の荷重強度を単位面積当りの慣性力とすればよく、次式となる。

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = -\rho h \omega^2 \bar{w} \cos \theta \quad (12)$$

ここで、 ρ : サンドイッチ板の材料密度、 ω : 固有円振動数であり、 $\bar{Q}_y, \dots, \bar{w}$ は前述の単位荷重を受ける場合の断面力および変形と区別している。

同様に次の無次元量 $Y_i \sim Y_8$

$$Y_1 = \frac{a^2 \bar{Q}_y}{D_0(1-\nu^2)}, Y_2 = \frac{a^2 \bar{Q}_x}{D_0(1-\nu^2)},$$

$$Y_3 = \frac{a \bar{M}_{xy}}{D_0(1-\nu^2)}, Y_4 = \frac{a \bar{M}_y}{D_0(1-\nu^2)},$$

$$Y_5 = \frac{a \bar{M}_x}{D_0(1-\nu^2)}, Y_6 = \bar{\theta}_y, Y_7 = \bar{\theta}_x, Y_8 = \frac{\bar{w}}{a},$$

を導入すると、サンドイッチ板の自由振動を支配する偏微分方程式は、次のように表わされる。

$$\sum_{s=1}^8 \left\{ G_{1ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \zeta} + G_{2ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \eta} + G_{3ts} Y_s \right\} = 0 \quad (13)$$

$(t = 1 \sim 8)$

まず、無次元化した式(12)の両辺に Y_8 を乗じ、全

領域において面積分を行い、2重積分することにより順次展開する。周辺の境界条件を考慮するといずれの境界条件の場合も整理され、次式となる。

$$Y_8(\eta_0, \zeta_0) = \mu\lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta) h^* d\eta d\zeta \quad (14)$$

ここで、

$$\mu = \frac{b}{a}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}, \quad h^* = \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

である。

次に、式(14)に等間隔の数値積分を適用すると次式が求まる。

$$Y_{8fg} = \mu\lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} W_{fgij} Y_{8ij} h^* \quad (15)$$

(f = 0 ~ m, g = 0 ~ n)

ここで、 β_{mi} , β_{nj} は数値積分における重み係数である。

式(15)を整理するとサンドイッチ板の固有振動数方程式は次式となる。

$$|\bar{W} - \Lambda| = 0 \quad (16)$$

ここで、 $\beta_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj}$,

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} B_{00}W_{0000} & B_{01}W_{0001} & \cdots & B_{mn}W_{00mn} \\ B_{00}W_{0100} & B_{01}W_{0101} & \cdots & B_{mn}W_{01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00}W_{mn00} & B_{01}W_{mn01} & \cdots & B_{mn}W_{mnmn} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1/(\mu\lambda^4 h_{00}^*) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\mu\lambda^4 h_{01}^*) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(\mu\lambda^4 h_{mn}^*) \end{bmatrix}$$

である。

式(16)を解くことにより、固有振動数および固有モードが求められ、サンドイッチ板の自由振動解析を行うことができる。

2. 5 円形板への近似

円形サンドイッチ板では、図4(a)にあるように矩形板を基準として円を内接させ、平面上の等分割線の交点において、なるべく円形に近い形状となるように図4(b)のように区別する。

具体的には、図4(c)のように対象とする円形の部分の板厚を h_0 、周辺部での板厚を h_b とすると、境界部分

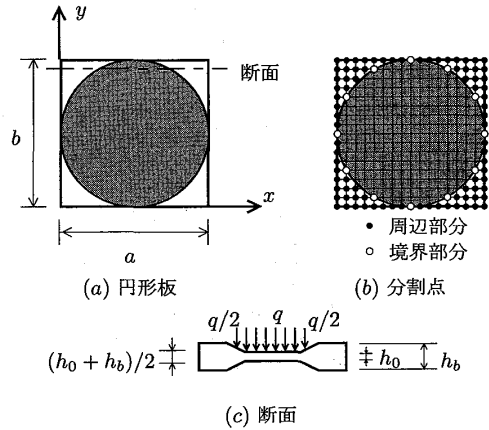


図4：サンドイッチ円形板

の板厚は対象板厚 h_0 と周辺板厚 h_b との和の半分としている。また、荷重は、対象部分に等分布荷重 q を、境界部分はその半分を載荷させ、周辺部分には載荷しない。

3. 解析結果

3. 1 サンドイッチ矩形板の解析

はじめに、本解析法のサンドイッチ板に対する収束性および精度を検討するために、斜角 $\theta = 0^\circ$ としたサンドイッチ矩形板の曲げ解析を行った。

表1：サンドイッチ矩形板の中央点のたわみ

$$\langle wD/qa^4 \times 10^2, \nu = 0.3, h_0/a = 0.01 \rangle$$

s	分割数				収束値	比較解 ^{2),3)}
	4	8	12	16		
4	0.341	0.326	0.324	0.323	0.322	0.325
∞	0.130	0.127	0.127	0.127	0.127	0.126

板の縦横の分割数 $m=n=4, 8, 12, 16$ とした場合の本解析法による中央点のたわみおよびRichardsonの補外公式によって求めた推定収束値(12分割と16分割)を比較解^{2),3)}とともに表1に示す。なお、表中の $s = a^2 S / (\pi^2 D)$ は、コアのせん断弾性係数とフェイスプレートの弾性係数の比であり、 $s = \infty$ は等質・等方性の板に相当する。

本解析法による数値解析結果は、分割数の増加とともに一様に収束し、比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分な精度をもつ解が得られている。さらにRichardsonの補外公式による推定収束値は、比較解に極めて近づくことが示され、本解析法のサンドイッチ板への適用性が明らかとなった。

3.2 斜板および円形板の解析

つづいて、本解析法の異形板への適用性を明らかにするために、等質・等方性の斜板および円形板の曲げおよび自由振動解析を行った。

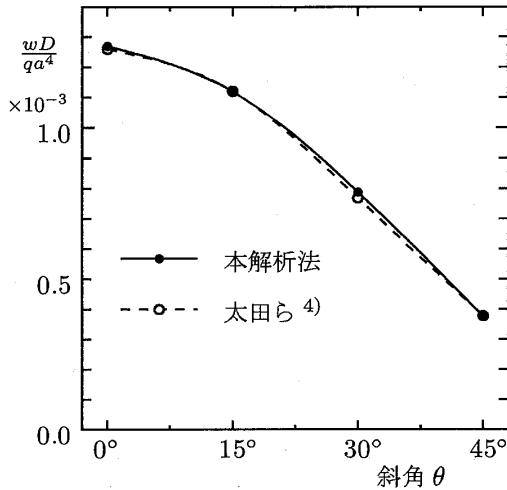


図5：斜板の板中央点のたわみ

図5は、斜角 $\theta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ とした場合の本解析法による中央点のたわみと太田らによる比較解⁴⁾を示したものであり、本解析法は、比較解と十分一致した結果が得られている。また、図6は同じく斜角を変化させた場合の本解析法による6次までの固有振動数と Durvasula による比較解⁵⁾を示したものである。同図より、低次のモードでは、比較解とほぼ一致した結果が得られているが、モード次数が大きくなると多少ずれが生じている。しかしながら、比較解においても斜角とモード次数が大きくなると精度が低下する傾向があると報告されている⁵⁾。

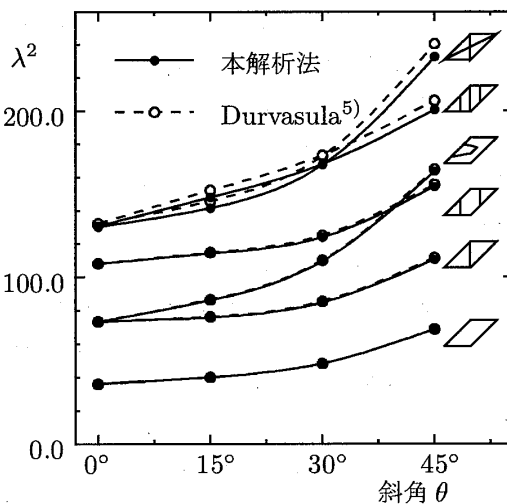


図6：斜板の固有値曲線

表2および表3には、板の縦横の分割数を変化させた場合の本解析法による円形板の中央点のたわみと6次までの固有振動数を推定収束値および比較解^{3),6)}と

もに示している。これらの表より、円形板の場合は、少ない分割数における解析では、比較解と違いが見られるが、分割数を増加させることにより一様に収束し、推定収束値は、比較解とも十分一致している。また、対象とする円形板の板厚と周辺部の板厚の比 h_0/h_b を1/10程度の変厚矩形板を解析することだけで、円形板の解析が可能となる。

表2：周辺固定支持円形板の中央点のたわみ

$$\langle wD/qa^4 \times 10^3, \nu = 0.3, h_0/a = 0.01 \rangle$$

h/h_0	分割数			収束値	比較解 ³⁾
	4	8	12		
4	0.346	0.744	0.894	1.013	0.977
6	0.278	0.707	0.864	0.990	
8	0.251	0.687	0.851	0.981	
10	0.238	0.676	0.844	0.979	
12	0.231	0.669	0.841	0.978	

表3：周辺固定支持円形板の固有値

$$\langle \lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}, \nu = 0.3, h_0/a = 0.01 \rangle$$

分割数	モード					
	1次	2次	3次	4次	5次	6次
8	48.27	111.88	111.88	183.33	240.97	249.60
12	43.83	94.50	94.50	145.61	177.67	187.06
16	43.41	91.71	91.71	144.86	161.83	176.52
収束値	42.86	88.13	88.13	143.89	141.45	162.97
比較解 ⁶⁾	40.86	85.04	85.04	139.52	139.52	159.08

以上のことより、本解析法の異形板の曲げおよび自由振動解析への適用性が明らかとなった。

3.3 異形サンドイッチ板の解析

最後に、異形サンドイッチ板の曲げおよび自由振動特性を明らかにするために、コアのせん断弾性係数とフェイスプレートの弾性係数の比 G_c/E_f を変化させたパラメータ解析を行った。

コアとフェイスプレートの厚さの比を $c/f=10$ とした場合のサンドイッチ斜板($\theta=15^\circ$)およびサンドイッチ円形板の $y=b/2$ 上のたわみを図7に、6次までの固有振動数を図8および図9にそれぞれ示す。

これらの図より、異形サンドイッチ板の曲げおよび振動特性は、 $G_c/E_f=10^{-3}$ 付近で挙動が大きく変化し、 G_c/E_f をこれ以上大きくすると、変形しにくく固有振動数も大幅に増大する。

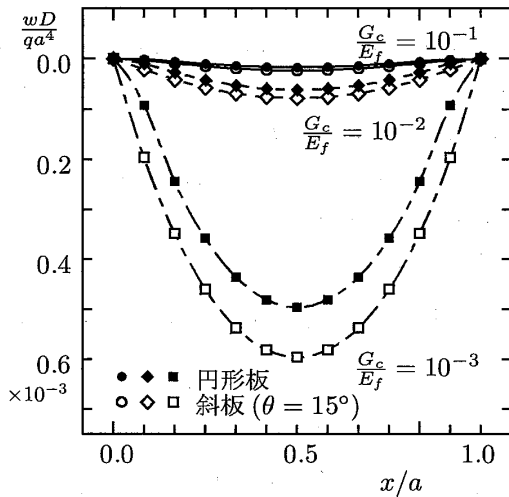


図7：異形サンドイッチ板のたわみ

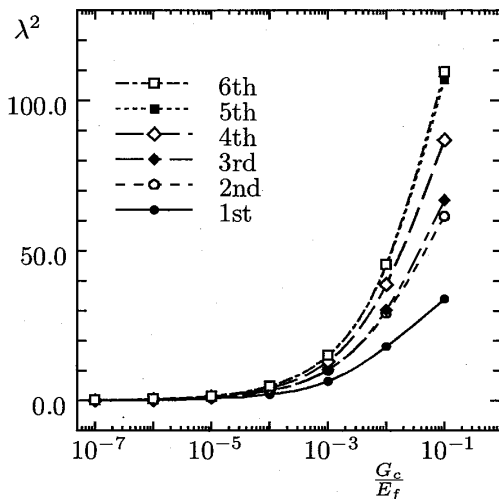


図8：サンドイッチ斜板の固有値曲線

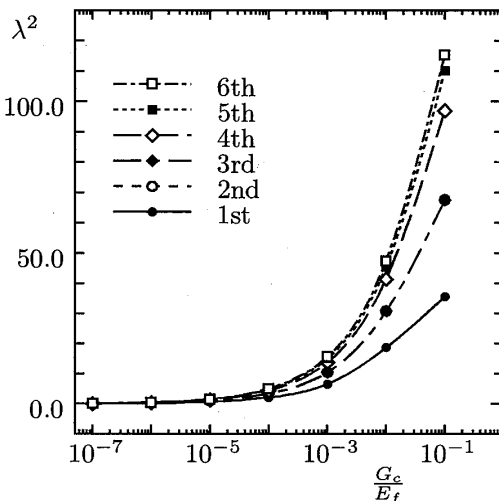


図9：サンドイッチ円形板の固有値曲線

4. まとめ

本研究では、異形サンドイッチ板の曲げおよび自由振動問題の一解析手法として、離散的近似解法を用い

た解析法を提示した。本解析法の固有値問題では、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、異形サンドイッチ板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数が得られ、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用した固有値解析法である。

本解析法による解析結果と、既往の解との比較により、本解析法による数値解は、一様に収束性を持つこと、また、比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分な精度をもつ解が得られていることなどが確認された。また、円形板などの解析においては、対象とする異形板の板厚と周辺部の板厚の比を1/10程度の変厚矩形板を解析することだけで、異形板の解析が可能となることを確認した。

異形サンドイッチ板の曲げおよび振動特性は、 $G_c/E_f = 10^{-3}$ 付近で挙動が大きく変化し、 G_c/E_f をこれ以上大きくすると、変形しにくく固有振動数も大幅に増大することなどを明らかにした。

5. 謝辞

本研究を遂行するにあたり、解析データ整理に協力戴きました下川一基氏(大学院博士前期課程1年生)に感謝申し上げます。

なお、本研究は、(財)高橋産業経済研究財団からの助成による研究成果の一部をまとめたものであり、ここに謝意を表わします。

参考文献

- (1) 例えば、森田千尋、松田 浩、崎山 毅、佐治孝記、浦田英知、黄美：クロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に関する一解析法、構造工学論文集、Vol.44A, pp.11-20, 1998
- (2) F. F. Plantema : Sandwich Construction, John Wiley & Sons
- (3) S. P. Timoshenko and S. W. Krieger : Theory of plates and shells, Second Edition, McGraw-Hill
- (4) 太田友弥、浜田 実、鷺島敏憲、西村義孝、増井博：一様分布荷重を受ける周辺固定ひし形板の静的たわみ、日本機械学会論文集、28巻、188号、pp.421-427, 1962
- (5) S. Durvasula : Natural frequencies and modes of clamped skew plates, AIAA Journal, Vol.7, No.6, pp.1164-1167, 1969
- (6) A. W. Leissa : Vibration of plates, NASA SP-160, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1969