

## 有限要素法によるケーブルの振動解析

高橋 和雄\*・大淵 隆司\*\*  
呉 慶雄\*・中村 聖三\*

## Vibration Analysis of Cables by Finite Element Method

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Takashi OHFUCHI\*\*, Qingxiong WU\* and Shozo NAKAMURA\*

In existing general-purpose softwares using the finite element method, it is difficult to consider the effect of a sag, support movement and parametric vibrations of the cable, in the vibration analysis and seismic analysis of cable structures, such as suspension bridges and cable-stayed bridges. In this paper, the stiffness matrix considering the geometric stiffness of the cable is derived. Furthermore, the linear and nonlinear vibration analysis of single cables and cable structures are carried out by using the derived stiffness matrix. Accuracy effectiveness of the solution are confirmed.

## 1. まえがき

有限要素法を用いた TDAP III<sup>1)</sup>, MARC 等の汎用構造解析ソフトウェアでは, ケーブルをトラス要素に置き換えたモデルを使用している. ケーブル系構造物の固有振動解析を行う場合には問題はないが, ケーブル系構造物の非線形応答や係数励振振動を取り扱うことはできない. このため, 斜張橋のケーブルの局部振動解析を行うにあたって, 斜張橋全体の固有振動解析および応答解析を行った後に, 着目したケーブル1本を抽出して解析を行う近似解法がなされている<sup>2)</sup>. ケーブルの幾何剛性行列を用いたケーブル系構造物の汎用解析プログラムの開発が望まれる.

そこで, ケーブルの局部振動を含めた全体振動の解析を行えるようにするため, サグの影響等の制約を受けない単一ケーブルの幾何剛性を考慮した剛性マトリクスを誘導する. 次に, 誘導した剛性マトリクスを用いて, 偏平水平の単一ケーブルの静的非線形解析, 固有振動解析および非線形振動解析を行った結果を解析解と比較し, 本研究の精度の確認を行う. さらに, 誘導した剛性マトリクスを用いて有限要素法の構造解析

プログラムを開発し, ケーブルの初期形状を考慮した斜張橋の全体系の振動解析を行い, 有限要素法プログラムの有効性を検討する.

## 2. 幾何剛性マトリクスの誘導

文献<sup>3)</sup>を参考に, ケーブルの変位を記述するためのケーブルの微小要素を図-1に示す. 部材の長さ方向に  $X_1$  軸をとり,  $Y_1, Z_1$  軸が直交右手座標系になるようにする.

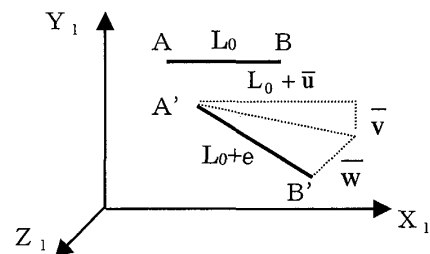


図-1 ケーブルの微小要素

部材の左端をA端, 右端をB端とし, それぞれの  $X_1$  軸方向の変位を  $u_{1A}, u_{1B}$ ,  $Y_1$  軸方向の変位を  $v_{1A}, v_{1B}$ ,

平成15年4月18日受理

\* 社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\* 大学院生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

Z<sub>1</sub>軸方向の変位を w<sub>1A</sub>, w<sub>1B</sub>とし, 各軸方向における相対変位を  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  とし, 以下に表す.

$$\bar{u} = u_{1B} - u_{1A}, \quad \bar{v} = v_{1B} - v_{1A}, \quad \bar{w} = w_{1B} - w_{1A}$$

図-1 からひずみと内力ベクトルは次のように表される.

$$\varepsilon = \frac{e}{L_0} \quad (1)$$

$$\{\bar{L}\} = \begin{bmatrix} \frac{L_0 + \bar{u}}{L_0 + e} & \frac{\bar{v}}{L_0 + e} & \frac{\bar{w}}{L_0 + e} \end{bmatrix}^T \left( R_0 + \frac{EA}{L_0} e \right) \quad (2)$$

$$e = \sqrt{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2} - L_0 \quad (3)$$

ここに,  $\varepsilon$ : ひずみ,  $e$ : 伸び,  $\{\bar{L}\}$ : 局部座標系の内力ベクトル,  $R_0$ : 初期軸力,  $EA$ : 伸び剛性.

荷重ベクトルは次のように表される.

$$\{F\} = \{\bar{L}\} \quad (4)$$

式(2)を変位で全微分すると次式から局部座標系の剛性マトリクスを求めることができる.

$$\{\delta \bar{L}\} = [\bar{K}] \{\delta \bar{d}\} \quad (5)$$

ここに,  $[\bar{K}]$ : 変位で全微分して求めた局部座標系の剛性マトリクス,  $\{\delta \bar{d}\}$ : 変位で全微分した局部座標系の変位ベクトル.

式(5)より,  $[\bar{K}]$  は次のように表される.

$$[\bar{K}] = [\bar{K}_1] R + (EA/L_0) [\bar{K}_2] \quad (6)$$

$$[\bar{K}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}^2 + \bar{w}^2}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} \\ -\frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & \frac{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{w}^2}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{u}\bar{w}}{(L_0 + e)^3} \\ -\frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^3} & \frac{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{v}^2}{(L_0 + e)^3} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_2] = \begin{bmatrix} \frac{(L_0 + \bar{u})^2}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} \\ \frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}^2}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^2} \\ \frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{w}^2}{(L_0 + e)^2} \end{bmatrix}$$

ここに,  $R$ : 全軸力.

ケーブル要素の剛性マトリクスとトラス要素の剛性マトリクスの違いについて述べる. トラス要素は部材方向の軸力が作用するので, 部材方向の変位  $\bar{u}$  のみ存在する. 図-1 の Y<sub>1</sub>軸, Z<sub>1</sub>軸方向の相対変位  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  は

考えないので,  $\bar{v} = 0$ ,  $\bar{w} = 0$  としケーブル要素の剛性マトリクスの式(6)に代入するとトラス要素の剛性マトリクスが求められる.

図-2 に全体座標系と局部座標系の関係を示す. 部材の全体座標系を X, Y, Z 軸, 局部座標系を X<sub>1</sub>, Y<sub>1</sub>, Z<sub>1</sub>軸で示す. 図-2 より座標変換マトリクスを求めることができる.

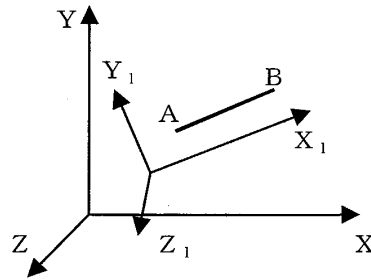


図-2 全体座標系と局部座標系の関係

全体座標系について考えると荷重ベクトル  $\{F\}$  と変位ベクトル  $\{X\}$  は次のように表される.

$$\{F\} = [T']^T \{\bar{L}\} \quad (7)$$

$$\{X\} = [T']^T \{\bar{d}\} \quad (8)$$

$$[T'] = \begin{bmatrix} -T'_1 & T'_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに,  $[T']$ : コードアングルを用いて評価した座標変換マトリクス.

式(7)を変位で全微分すると式(5), 式(6)および式(8)より全体座標系の剛性マトリクスを求めることができる.

$$\{\delta F\} = [T']^T [\bar{K}] [T'] \{\delta X\} \quad (10)$$

ここに,  $\{\delta X\}$ : 変位で全微分した全体座標系の変位ベクトル.

全体座標系の剛性マトリクス  $[K]$  は, 式(10)より次のように表される.

$$[K] = [T']^T [\bar{K}] [T'] = [T']^T [K_1 + K_2] [T] \quad (11)$$

$$[K_1] = R \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & -\bar{K}_1 \\ -\bar{K}_1 & \bar{K}_1 \end{bmatrix} \quad [K_2] = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \bar{K}_2 & -\bar{K}_2 \\ -\bar{K}_2 & \bar{K}_2 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T'_1 & 0 \\ 0 & T'_1 \end{bmatrix}$$

ここに,  $[T]$ : 座標変換マトリクス.

慣性力と減衰力を考慮すると, 運動方程式は以下の

ように表される. 文献<sup>4)</sup>を参考にして[M]および[c]を求める.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [c]\{\dot{X}\} + [T]^T \{L\} = \{F\} \quad (12)$$

ここに, [M]: ケーブルの集中質量マトリクス, [c]: レーリー減衰を用いて評価した減衰マトリクス, {X}: 変位ベクトル, {F}: 荷重ベクトル.

式(12)を変位で全微分すると式(5), 式(8)および式(10)より増分形の運動方程式は以下のように表される.

$$[M]\{\delta\ddot{X}\} + [c]\{\delta\dot{X}\} + [K]\{\delta X\} = \{\delta F\} \quad (13)$$

### 3. 単一ケーブルの数値解析

2. で誘導した剛性マトリクス(式(13))を用いて, 単一ケーブルの分割数を100分割とし, それぞれのケーブルの部材要素の両端に初期形状の座標を入力し, ケーブル両端を拘束として単一ケーブルについて静的非線形解析, 固有振動解析および非線形応答解析を行う.

#### (1) 静的非線形解析

図-3に示すような偏平水平ケーブルを解析対象として, 中央点に集中荷重Pが作用する場合について静的非線形解析を行う. 数値解析にはNewton法を用いる.

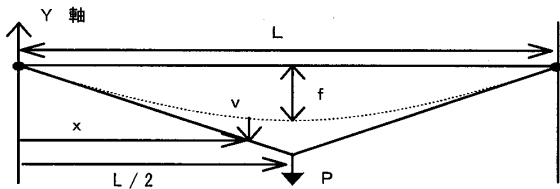


図-3 中央点集中荷重が作用するケーブル

なお, 数値計算のパラメーターを次のように設定する. サグ比  $\gamma = f/L = 0.026$ , 縦波-横波伝播速度比の自乗  $k^2 = EA/H = 900^5$ , 無次元集中荷重  $\bar{P} = P/mgL = 0.1 \sim 1.0$ .

ここに, f: サグ, L: ケーブルの長さ, E: ヤング係数, A: ケーブルの断面積, P: 集中荷重強度, v: 鉛直変位, x: 水平方向の座標, H: 初期水平張力.

図-4はケーブル中央点の荷重変位曲線である. 縦軸は  $\bar{P}$ , 横軸は  $\bar{v} = vH/PL$  である. ケーブルの無次元鉛直変位  $\bar{v}$  を図-5, ケーブルの無次元水平張力  $\bar{h} = 1 + h/H$  (ここに, h: 付加水平張力) を図-6に示す. 以上の解析結果をIrvineの結果<sup>6)</sup>と比較する. 以下に, 精度の確認のために用いたIrvineの式<sup>6)</sup>を示す.

$$\bar{v} = \frac{1}{1+\bar{h}} \left\{ (1-\bar{x}_1)\bar{x} - \frac{\bar{h}}{2\bar{P}}\bar{x}(1-\bar{x}) \right\} \quad (14)$$

$$\bar{h}^3 + (2 + \lambda^2/24)\bar{h}^2 + (1 + \lambda^2/12)\bar{h} - \lambda^2\bar{x}_1(1-\bar{x}_1)\bar{P}(1+\bar{P})/2 = 0 \quad (15)$$

$$\bar{v} = v/(PL/H), \quad \bar{h} = h/H, \quad \bar{x}_1 = x_1/L, \quad \bar{x} = x/L, \quad \bar{P} = P/mgL, \quad L_e = (1 + 8\gamma^2)L$$

$$\lambda^2 = (mgL/H)^2 L / (HL_e/EA) = 64k^2\gamma^2 L / L_e$$

ここに,  $x_1$ : 左端から荷重の作用点までの距離,  $L_e$ : ケーブル長,  $\lambda^2$ : Irvineパラメーター, m: ケーブルの単位長さ当たりの質量.

図-4に示す本解析と式(14)および式(15)による解から, 両者の無次元鉛直変位  $\bar{v}$  は一致している. また, 図-5から両者の無次元鉛直変位  $\bar{v}$ , 図-6から両者のケーブルの長さ方向の無次元水平張力の分布が一致している.

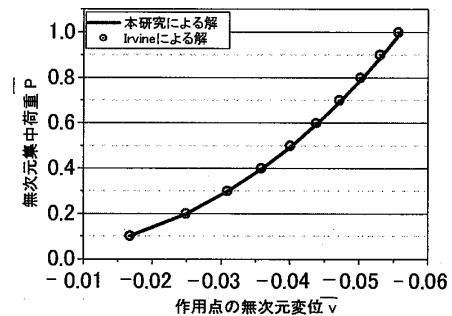


図-4 ケーブル中央点の荷重変位曲線

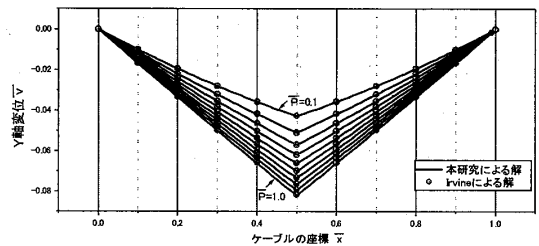


図-5 ケーブルの鉛直変位

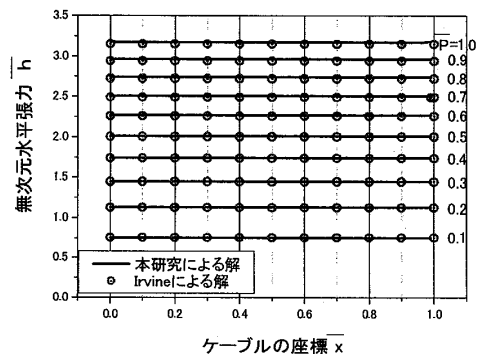


図-6 ケーブルの無次元水平張力

(2) 固有振動解析

Subspace 法を用いて、固有振動解析を行う。k<sup>2</sup> = 900 の水平ケーブルの無次元固有振動数  $\bar{\omega}$  を図-7 に○印で表す。縦軸は  $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$  (ここに、 $\omega_0$ : 弦の第1次固有円振動数)、横軸はサグ比  $\gamma = f/L$  である。精度を確認するために Irvine の式による結果<sup>7)</sup> を実線で表す。以下に、精度の確認のために用いた Irvine の式<sup>7)</sup> を示す。

$$\tan \frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^3 \tag{16}$$

$$\omega = \omega' L / (H/m)^{1/2} \tag{17}$$

ここに、 $\omega'$ : ケーブルの固有円振動数。

図-7 から、サグ比  $\gamma = 0.07$  までは本解析と Irvine の式<sup>7)</sup> の無次元固有振動数が一致している。しかし、 $\gamma = 0.08$  付近から本研究の無次元固有振動数の値が徐々に減少している。これは、Irvine の方程式<sup>7)</sup> では  $\gamma$  が大きくなっても鉛直方向の慣性力しか考慮していないので全水平変動張力が変化しないと仮定しているが、本研究では  $\gamma$  が大きくなると全水平変動張力が変化することを考慮しているために、差が現れている。しかし、Irvine の式は偏平ケーブルを対象としているので  $\gamma$  が小さい場合には本研究の結果はよく一致している。

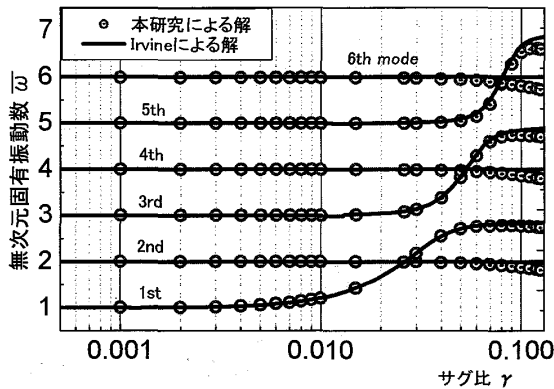


図-7 無次元固有振動数

(3) 非線形応答解析

図-8 に示すような水平ケーブルを解析対象として、等分布周期的変動荷重が作用する非線形時刻歴応答を行う。数値解析には Newmark  $\beta$  法を用い、 $\beta = 1/4$  とする。等分布周期的変動荷重を次のように表す。

$$\bar{p} = p_0 \sin\{(\Omega / \omega_1) \tau\} \tag{18}$$

ここに、 $p_0$ : 荷重強度、 $\Omega$ : 荷重の円振動数、 $\omega_1$ : ケーブルの第1次固有円振動数、 $\tau = \omega_0 t$ : 弦の第1次固有円振動数で無次元化した時間、 $t$ : 時間。

本研究では、荷重の円振動数  $\Omega$  はケーブルの線形対称1次固有円振動数と一致させる。

なお、数値計算のパラメーターを次のように表す。 $\gamma = 0.026$ ,  $k^2 = 900$ 。

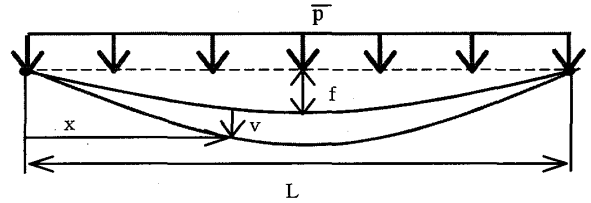


図-8 動的荷重が作用するケーブル

図-9 および図-10 はケーブル中央点の鉛直変位および全水平張力の時刻歴応答である。図-9 の縦軸は  $\bar{v} = v/L$ , 図-10 の縦軸は  $\bar{H} = 1 + h/H$ , 両グラフの横軸は無次元時間  $\tau = \omega_0 t$  である。Irvine の運動方程式<sup>8)</sup> の Galerkin 法による結果と比較する。以下に、精度の確認のために用いた Irvine の運動方程式<sup>8)</sup> を示す。

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 z}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{19}$$

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{mg}{H} \int_0^L v dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \tag{20}$$

図-9 および図-10 から、本研究による解と式(19) の Galerkin 法による結果は一致している。

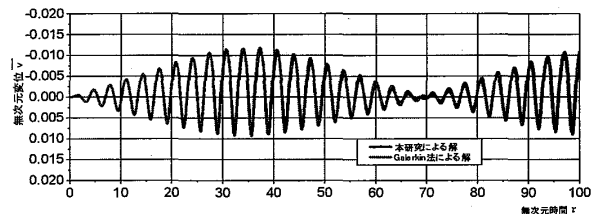


図-9 中央点の鉛直変位の時刻歴応答

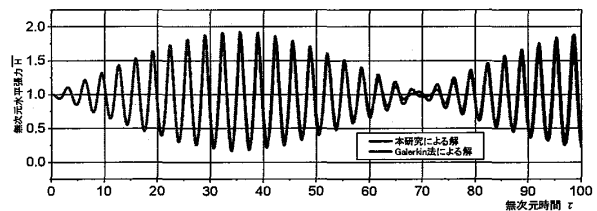


図-10 中央点の全水平張力の時刻歴応答

4. ケーブル系構造物への応用

2. で誘導した剛性マトリクス (式 (13)) を用いて、ケーブルの初期形状や特性を考慮した斜張橋の全体系の固有振動数を計算するための有限要素法プログラムを作成する。比較のため TDAP III を用いてケーブルをトラス要素としてモデル化した場合<sup>2)</sup>の解析を行う。本研究では、鋼斜張橋である大島大橋を解析対象として考える。大島大橋のケーブルはサグが小さく、弦として考えることができるので TDAP III を用いて解析を行うことができる。

(1) 大島大橋の概要

大島大橋は長崎県の西彼杵半島北西部に位置する。大島町と崎戸町を本土化するため、呼子ノ瀬戸をまたぐ離島架橋として平成 11 年 11 月に開通した斜張橋であり、路線名は主要地方道大島太田線である。また道路規格は第 3 種第 3 級である。大島大橋の主橋梁は 3 径間連続鋼斜張橋で、橋長は 670m (160m + 350m + 160m) である。主塔形状は A 型タイプとなっている。大島大橋の一般図を図-11 に示す。

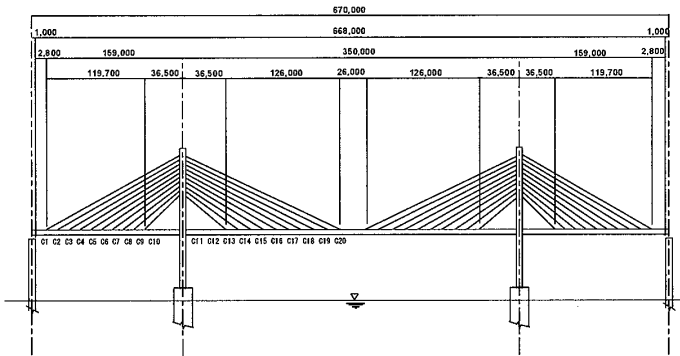


図-11 大島大橋の一般図

(2) モデル化の方法

本プログラムでは、ケーブルを 2. で誘導した剛性マトリクス (式 (13)) を用いて偏平で両端を固定した Irvine の放物線<sup>6)</sup>を参考にしたモデルで考え、分割数を 8 分割とする。主塔、主桁および橋脚は、はり要素としてモデル化を行う。拘束条件は、主桁端部の鉛直方向、橋軸直角成分および回転成分を拘束し、他の自由度はフリーとする。また、上部構造の応答特性を把握するために基礎は剛と仮定し、橋脚基部は全ての自由度を固定とする。大島大橋の解析モデルを図-12 に示す。TDAP III では、ケーブルを 1 本のトラス要素として、ケーブルの質量はケーブルの定着点に集中質量として付加する<sup>2)</sup>。

(3) 固有振動数

開発した本プログラムと TDAP III によって得られた

面内モードの固有振動数を表-1、面外モードの固有振動数を表-2 にそれぞれ示す。表-1 および表-2 に示す差は、本プログラムの解から TDAP III の解を引き、本プログラムの結果で割った値をパーセントで示している。モードによって約 3% 異なっている箇所もあるが、本構造物のケーブルのサグが小さいため、両者はほぼ一致している。よって、本プログラムはケーブル系構造物の振動解析に用いることができる。

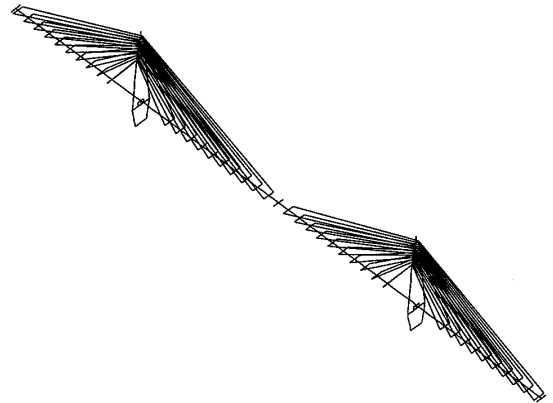


図-12 解析モデル

表-1 面内モードの固有振動数

モード 番号	固有振動数 (Hz)		差 (%)
	本プログラム	TDAP III	
1	0.2332	0.2333	-0.04
2	0.2967	0.3077	-3.71
3	0.4065	0.4172	-2.63
4	0.6972	0.6883	1.28

表-2 面外モードの固有振動数

モード 番号	固有振動数 (Hz)		差 (%)
	本プログラム	TDAP III	
1	0.2540	0.2534	0.24
2	0.6738	0.6760	-0.33

5. まとめ

本研究によって得られた結果をまとめる。

- (1) 本研究で得られた偏平な単一ケーブルの静的非線形解析、固有振動解析および非線形応答解析の結果を Irvine の結果と比較したところ、両者の解がよく一致しているため、本研究の結果は妥当と考えられる。
- (2) 本研究で得られた大島大橋の全体系の固有振動解析の結果と TDAP III の結果との比較から両者の解

がほぼ一致しているため、本プログラムはケーブル系構造物の振動解析について用いることができる。

以上によって、本研究で誘導した剛性マトリクスのプログラムを用いてケーブルのサグの影響、支点変位および係数励振振動などを評価したケーブル系構造物の解析を行うことができると考えられる。

#### 参考文献

- 1) (株)アーク情報システム：TDAP III機能説明書,1999.
- 2)Wu, Q.,Takahashi, K.,Okabayashi, T.,Nakamura, S. :  
Response Characteristics of Local Vibrations in StayCable on an Existing Cable-stayed Bridge, Journal of Sound and Vibration,No.261,pp.403-420,2003.
- 3)Broughton, P.,Ndumbaro, P. : The Analysis of Cable & Catenary Structures, Thomas Telford Books,1994.
- 4) 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦：有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, p.10 および p.133,1981.
- 5) 土木学会, ケーブル・スペース構造の基礎と応用, p.12 および p.60,1999.
- 6)Irvine, H. M. : Cable Structures, The MIT Press, pp.47-51, 1981.
- 7) 文献 6) の pp. 90-96
- 8) 文献 6) の p.50 および p.90