

高精度振動数推定法による橋梁の損傷予測

岡 林 隆 敏* · 大岩根 健 吾*
木 村 啓 作** · 奥 松 俊 博*Bridge-Damage Detection by the High Accurate Structural
Frequency Estimation Method

by

Takatoshi OKABAYASHI*, Kengo OIWANE**
Keisaku KIMURA*** and Toshihiro OKUMATSU*

The difference of the natural frequency, which is caused by the change of structural condition such as deterioration and damage, is expected extremely small. The authors developed the high accurate structural frequency estimation method, which consists of AR model by ambient vibration. The method is applied to detect structural deterioration caused by damage of the bridge member. In this paper, series of simulation are performed in order to examine the method's efficiency. Consequently, we had a conclusion that the system can estimate the structural frequency with accuracy of 1/100 Hz. Also, we realized to evaluate the structural damage by the ratio of the difference of frequency and a standard deviation of estimated structural frequencies.

1. はじめに

近年、社会資本の老朽化が問題となり、特に橋梁維持管理に対する技術革新が求められている。橋梁の損傷検出には、従来、目視による点検が実施されてきたが、対象構造物の数は膨大であるため、効率的な手法を導入することが望ましい。機械要素¹⁾やプラント施設²⁾では損傷診断技術が確立しており、土木構造物に対しても効率的な維持管理を実現するための診断システムの実現が必要である。

効率的に大量の橋梁を維持管理するために、本研究では、橋梁の振動性状の変化から劣化と損傷を予測する方法に着目する。振動による構造物の劣化や損傷の検出に関する研究に関して、いくつかの事例^{3), 4), 5), 6) 7)}があるが、橋梁部材の劣化や損傷が橋梁の振動に及ぼす影響は微細であるために、困難を伴う場合が多い。

振動性状から健全度を評価するためには、高精度に

振動数を検出する必要があるため、本研究では、常時微動から振動数を高精度に自動検知する高精度振動数推定システムを損傷評価に適用し、その有効性を検証する。本法は、常時微動からARモデルを構成し、その複素固有値から外乱成分を分離し構造物固有の振動数のみを抽出するものである。既報において、構造物を構成する部材が瞬時のうちに完全に破断した場合、振動数変化を指標とした損傷の検出可能性について、シミュレーションおよび実験からその有効性を検証した。本研究では、構造物部材が徐々に損傷していく様子を表現することで、より微細な振動数の変化を検出することを目的としたものである。高精度振動数検出法による構造物の損傷検出の有効性をシミュレーションによって検証した。

平成16年4月16日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院生産科学研究科 (Graduate student, Graduate school of Science and Technology)

*** (株) 東京鐵骨橋梁 (TTK Corporation)

2. シミュレーション概要

(1) 対象橋梁

対象橋梁はランガー橋とし、平面骨組構造による構造モデルを図-1に示す。このモデルの諸元を表-1に、8次までの鉛直振動の固有振動数を表-2に示す。

(2) 損傷モデル

本研究では、部材の損傷による振動数変化の検出を目的としているため、部材の損傷は、要素剛性マトリクスを低下させることで表現した。損傷表現式は次式で定義する。なお、損傷させる部材は要素番号⑩とする。

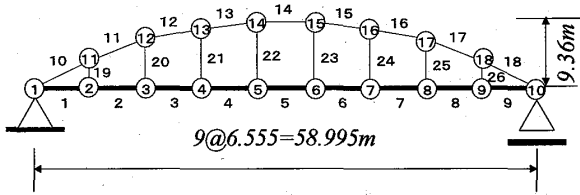


図-1 ランガー橋

表-1 モデル諸元

形式		補剛桁橋
支間長	$L(m)$	59.00
ライズ	$f(m)$	9.36
補剛桁の断面積	$A_1(m^2)$	2.24×10^{-2}
拱助の断面積	$A_2(m^2)$	2.24×10^{-2}
曲げ剛性	$EI(kN \cdot m)$	1.74×10^4
桁全重量	$W_f(kN)$	1.47×10^3
格間数		9

表-2 固有振動数

次数	振動数(Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.355
5次	9.734
6次	13.616
7次	17.607
8次	20.763

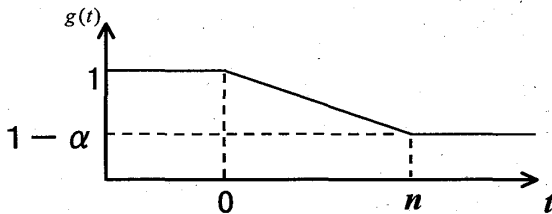


図-2 損傷に伴う剛性低下

$$\tilde{k}_e = g(t) k_e \tag{1}$$

$$g(t) = (1 - \alpha \frac{t}{n}) \tag{1}$$

ここに、 \tilde{k}_e は損傷発生時の要素剛性マトリクス、 $g(t)$ は損傷に伴う係数、 α は要素剛性の低下率、 t は時間、 n は損傷が発生してから総時間とし本研究では $\alpha = 0.5$ とする。 t と $g(t)$ の関係は、 $t < 0$ の区間で $g(t) = 1$ 、 $t > n$ の区間で $g(t) = 0.5$ となり、 $0 \leq t \leq n$ の区間で(1)式を適用する。また、これらの関係を図-2に示す。

(3) 常時微動

構造モデルの各節点に外力が作用する場合の運動方程式は次式のように表すことができる。

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \tag{2}$$

ここに、 M 、 C 、 K はそれぞれ質量マトリクス、減衰マトリクス、剛性マトリクスであり、 $f(t)$ は外力ベクトルである。また、節点②～⑨の鉛直方向に独立な白色雑音を与えた場合の速度応答を常時微動とする。数値解析法にはNewmark β 法を用いた。外力としての白色雑音を図-3に示す。着目点を節点番号⑤としたときの速度応答が図-4であり、これを対象モデルの常時微動である。

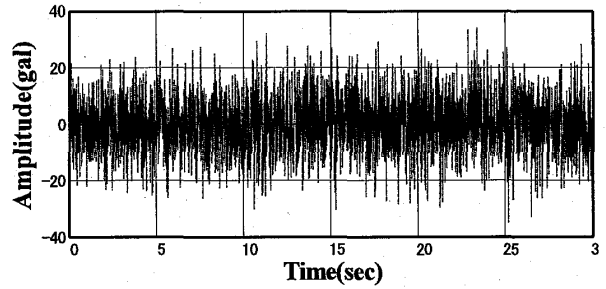


図-3 白色雑音

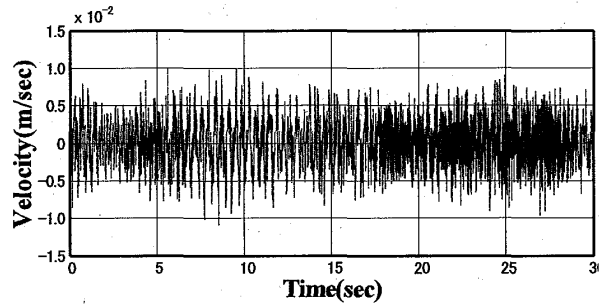


図-4 常時微動

3. 高精度構造同定法

(1) 運動方程式の ARMA モデルへの変換⁸⁾

m 自由度系の運動方程式は、(2)式で与えられる。ここに、 $y(t)$ 、 $f(t)$ は m 次元の変位ベクトルと外力ベクトルである。また、 M 、 K および C は、それぞれ($m \times m$)の質量行列、剛性行列および減衰行列である。減衰を比例減衰系

$$C = \alpha M + \beta K \tag{3}$$

と仮定する。非減衰系の振動モード行列 $\Phi(m \times m)$ により、 M 、 K 、 C は次のように対角化できる。

$$\Phi^T M \Phi = I \tag{4-1}$$

$$\Phi^T K \Phi = [\omega_k^2] = \Omega \tag{4-2}$$

$$\Phi^T C \Phi = [2h_k \omega_k] = H \tag{4-3}$$

ここに、 ω_k 、 h_k は、それぞれ k 次の固有円振動数および減衰定数である。

振動モード行列 Φ と基準座標 $q(t)$ により運動方程式は次のように表される。

$$\ddot{q} + H\dot{q} + \Omega q = \Phi^T f(t), y(t) = \Phi q(t) \tag{5}$$

ここに $q(t)$ は m 次元ベクトルである。状態変数を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

で定義すると、基準座標で表された運動方程式は状態方程式として、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (7-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7-2)$$

で表される。ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}^T \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{\Phi} \ \mathbf{0}] \quad (8)$$

である。なお、以後、式の簡略化のために変数の次数を $2m=n$ と表す。 $\mathbf{x}(t)$ は n 次元のベクトル、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} はそれぞれ、 $(n \times n)$ 行列、 $(n \times m)$ 行列および $(m \times n)$ 行列である。連続系の運動方程式を h で離散化すると、離散化された運動方程式は、

$$\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{f}_k \quad (9-1)$$

$$\mathbf{y}_k = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}_k \quad (9-2)$$

となる。ここに \mathbf{x}_k 、 \mathbf{f}_k および \mathbf{y}_k は、それぞれ $t=t_k$ のときの $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{f}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$ の値を表している。ここで、 $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ および $\hat{\mathbf{C}}$ は、

$$\hat{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}h}, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{I})\mathbf{B}, \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad (10)$$

である。

ここで、(9)式の状態方程式において、1入力1出力の系を考える。すなわち、外力ベクトル \mathbf{f}_k の代わりに f_k を考え、出力ベクトル \mathbf{y}_k の代わりに y_k を考える。

可観測行列は次式で構成される。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$\text{rank}[\mathbf{Q}] = n$ のとき、(9)式の系は可観測となる。

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q} \quad (12)$$

となり、この \mathbf{Q} により \mathbf{x}_k を変換する。

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{Q}\mathbf{x}_k \quad (13)$$

ここで \mathbf{Q} を(9-1)式の左辺より乗じると、次式を得る。

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{f}_k \quad (14-1)$$

$$y(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}_k(t) \quad (14-2)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^{-1} \quad (15)$$

である。さらに、

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (16)$$

である。

(14)式より ARMA モデルを誘導する。(14-1)式を要素毎にまとめ、それぞれを用いて表す。

さらに、 $\bar{x}_1(k) \sim \bar{x}_n(k)$ を $y(k)$ で表すことで、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(k) &= y(k) \\ \bar{x}_2(k) &= y(k+1) - \bar{b}_1 f(k) \\ \bar{x}_3(k) &= y(k+2) - \bar{b}_1 f(k+1) - \bar{b}_2 f(k) \\ &\vdots \\ \bar{x}_n(k) &= y(k+n+1) - \sum_{s=1}^{n-1} \bar{b}_s f(k+(n-1-s)) \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式をベクトルで表示する。

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_n(k) \\ \vdots \\ \bar{x}_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t+n-1) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \bar{b}_1 \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k+n-1) \\ \vdots \\ f(k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18)式を変形して整理することにより ARMA モデルが得られる。

$$y(k) = \sum_{s=1}^{n-1} a_s y(k-s) + \sum_{s=1}^{n-1} b_s f(k-s) \quad (19)$$

(2) AR モデルによる振動特性推定

ARMA モデルは次数 ∞ の AR モデルと等価⁹⁾であると考えられることができる。そこで、比較的次数の大きな AR モデルで ARMA モデルを近似する。

$$y(k) + \sum_{s=1}^p a_s y(k-s) = e(k) \quad (20)$$

時系列 $y(k)$ ($k=0 \sim N$) より、パラメータ $a_1 \sim a_p$ を、過去のデータ $y(k-1) \sim y(k-p)$ より $y(k)$ を推定する。

$$\hat{y}(k) = -\sum_{s=1}^p \hat{a}_s y(k-s) \quad (21)$$

$y(k)$ との推定誤差を

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (22)$$

として、推定誤差の二乗平均値を最小にするようにパラメータ $a_1 \sim a_p$ を決める。

$$\frac{\partial}{\partial a_s} E[e(t^2)] = 0 \quad (23)$$

ここに、 $E[e(t^2)]$ は数学的平均を表している。

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (24)$$

の Yule-Walker 方程式が得られる。

$$\mathbf{a} = [a_1 \cdots a_p]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_0 & \cdots & R_{p-1} \\ R_1 & R_0 & R_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{p-1} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_p \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここに、 $R_s = E[y(k)y(k+s)]$, $R_s = R_{-s}$ である。

また、最適な誤差の 2 乗平均値は、

$$\sigma_e^2 = R_0 + \sum_{s=1}^p a_s R_s \quad (27)$$

となる。時間遅れ演算子を z^{-1} とすると、(20) 式の伝達関数は

$$y_k = \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^p a_s z^{-s}} e(k) \quad (28)$$

で表すことができる。AR モデルの特性方程式は

$$z^p - a_1 z^{p-1} - a_2 z^{p-2} \cdots - a_p = 0 \quad (29)$$

となる。この特性方程式の根が、構造系の固有値に対応する。(28) 式は、

$$\prod_{i=1}^{p/2} (\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_i^*) = 0 \quad (30)$$

となる。ここに λ_i^* は λ_i の複素共役である。固有値を

$$\lambda_i = \lambda_{Re}^i - i\lambda_{Im}^i \quad (31)$$

とすると、固有値とモーダルパラメータとの関係は、

$$h_i \omega_i = (-1/n) \ln \sqrt{(\lambda_{Re}^i)^2 + (\lambda_{Im}^i)^2}, \quad \omega_i \sqrt{1 - h_i^2} = (1/n) \tan^{-1}(\lambda_{Im}^i / \lambda_{Re}^i) \quad (32)$$

となり、固有円振動数と減衰定数を推定できる¹⁰⁾。また、複素平面状において、根の絶対値 r_c 、角度 θ_c は (32) 式より円振動数 ω_c 、減衰定数 h_c 、サンプリング時間 Δ を用いて、

$$r_c = e^{-h_c \omega_c \Delta}, \quad \theta_c = \sqrt{1 - h_c^2} \omega_c \Delta \quad (33)$$

となる。この ω_c 、 h_c を上限とし、構造系固有値を抽出して振動数を推定する。

4. 解析結果

(1) 推定振動数の解析結果

図-4 に示した対象モデルの常時微動について、その自己相関関数を図-5 に示した。また常時微動の

MEM と FFT によるパワースペクトル密度を図-6 に示した。実線が MEM、破線が FFT によるものである。MEM の次数¹¹⁾ は $p=80$ としたときのものである。振動数推定は、30 秒間の常時微動データを 1 回区分として、合計 250 回行う。1~100 回目を健全時、101~150 回目を損傷発生中とし、要素剛性として (1) 式を適用し、150 回目の要素剛性は初期剛性の 0.5 倍としている。151~250 回目を損傷後とし、要素剛性は一定とする。(1) 式において推定回数 100 回目を $t=0$ とし、150 回目で $t=n$ とする。なお $n=50$ である。着目点は節点番号 ⑤ とする。AR モデルより得られた固有値の分布図を図-7 に示す。この固有値の分布図から構造系固有値のみを抽出するため、構造系固有値の抽出法により抽出する。最大振動数を 22 (Hz)、最大減衰定数を 0.02 とし、角度と原点からの距離 r を決定し抽出す

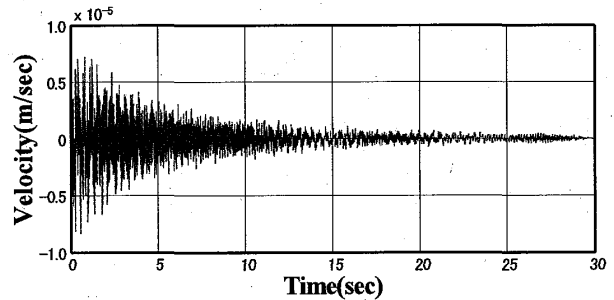


図-5 自己相関関数

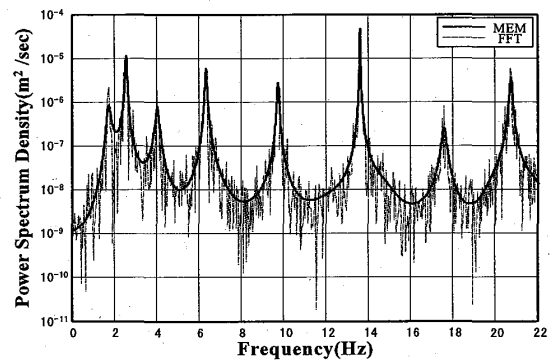


図-6 パワースペクトル密度

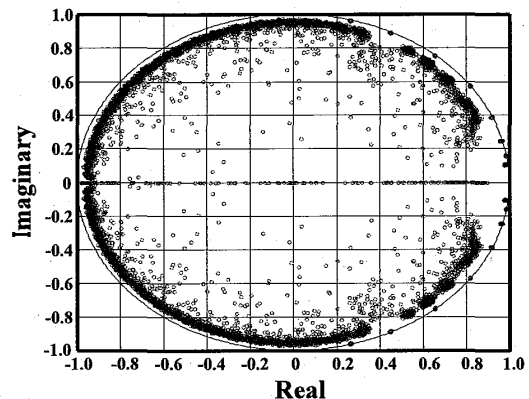


図-7 複素固有値の分布図

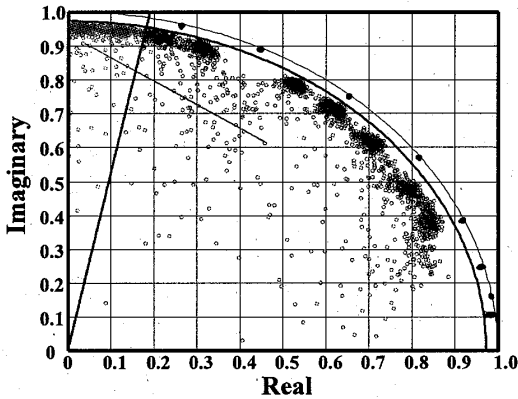


図-8 構造系固有値の抽出

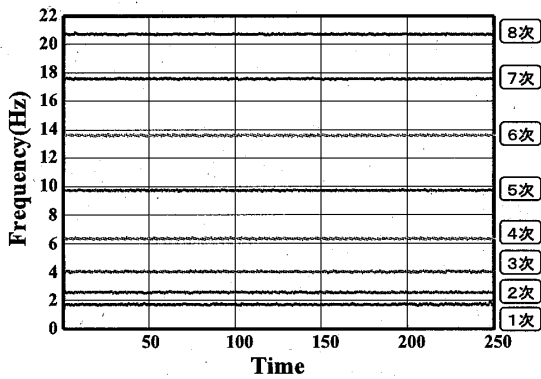


図-9 振動数推定軌跡

表-3 破断前後の振動数推定結果

振動次数	固有振動数 (Hz)		変化分 (Hz)
	健全時 (Hz)	損傷後 (Hz)	
1次	1.728	1.719	0.009
2次	2.573	2.553	0.02
3次	4.032	4.014	0.018
4次	6.352	6.33	0.022
5次	9.735	9.722	0.013
6次	13.607	13.599	0.008
7次	17.588	17.564	0.024
8次	20.737	20.721	0.016

る。サンプリング時間は0.01(sec)である。これらより抽出した構造系固有値の結果を図-8に示す。集中した固有値が構造系固有値、ばらついている固有値が外乱系固有値であると考えられるが、設定した半径と角度の上限によって、明確に分離できていることがわかる。抽出した構造系固有値から得られた、合計250回の振動数推定軌跡を図-9に示す。縦軸が振動数、横軸が推定回数である。この結果から1~8次までの振動数を検出できていることが確認できる。この推定振動数の結果から精度調査を行う。

(2) 損傷に伴う振動数変化の検出

健全時と損傷後の推定振動数の平均値と、平均値の差である変化分を表-3に示す。この表から各次数において振動数低下が確認でき、その変化分はどの次数

においても微小である。特に、1次と6次に関しては、損傷に伴う振動数の変化分は約0.01(Hz)と極めて微小である。また、振動数変化を明確にするため、各次の移動平均を図-10に示した。移動平均は、合計250回の振動数推定において、前後10回分の値の平均値を曲線化したものである。縦軸は振動数、横軸は推定回数である。移動平均に着目してみると、特に4次、7次において151~200回目における損傷に伴い、振動数が徐々に低下していく、振動数低下の過程が顕著に表れている。他の次数においても振動数低下の過程を把握することができる。特に5次、8次においては、その変化分は約0.015Hzと極めて微小であるが、本手法によりこのような微小な変化も検出することが可能である。

(3) Gauss分布における振動数変化の検知

振動数推定の結果を正規分布と仮定して表した図をGauss分布とし、健全時と損傷後の結果を図-11に示す。(a)~(h)にそれぞれ1次~8次までを示している。Gauss分布に着目してみると、損傷前後において、わずかではあるが、振動数の低いほうへ移動している。そのなかでも特に大きな移動を示しているのが、移動

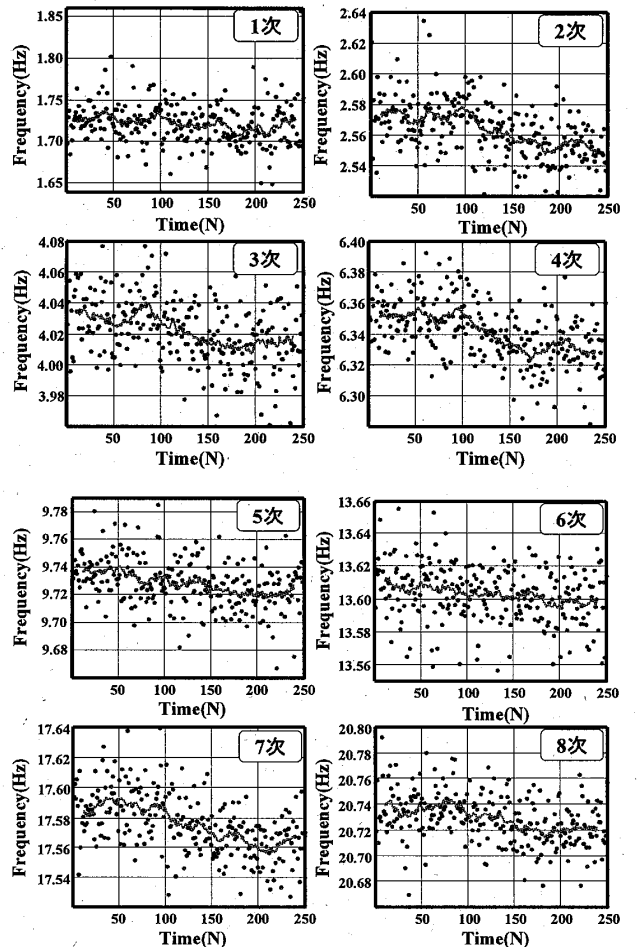


図-10 推定振動数における移動平均

平均と同様，4次と7次である．健全時と損傷後の Gauss 分布に示される，標準偏差と平均値に着目すると，損傷後の平均値が健全時の標準偏差を下回ったのは，3次，4次，7次である．このように，平均値と標準偏差に着目することで，Gauss 分布に着目した際の振動数変化を判断することが可能であると考えられる．しかし，本研究では，損傷発生を前提に考えているので，Gauss 分布だけからの損傷検知は困難だと考えられる．

5. まとめ

本研究で提案した高精度振動数推定法は，橋梁の経時的な損傷に伴う振動数変化を，常時微動データに基づく AR モデルから算出する手法である．本手法を用いて，対象橋梁をランガー橋とした場合のシミュレーションを実行し，振動数変化の検出可能性について検証した．その手法としては，有限要素法により構造物をモデル化し，常時微動データから AR モデル

を構成した後，複素固有値解析により振動数を推定した．固有値に関しては，構造系と外乱の固有値を分離し，構造系固有値のみを抽出したことで，高精度振動数推定を可能にした．また，振動数変化に関しては，推定振動数の変化分と移動平均の二つの観点から結果を考察し，移動平均の精度を確認するために，Gauss 分布を用いて有効性を検証した．

今後，耐久年数を迎える橋梁の維持管理問題が，重要な技術的課題となることが予想される．従来の設計・建設の視点から新設橋梁を前提とした構造解析だけでなく，既設橋梁の振動特性を経済的に精度良く検出できる構造解析法が必要になってくると考えられる．

今後の課題として，本研究はシミュレーションのみを行ったものであり，本手法の有効性は実測により検証する必要がある．実測に関しては，雑音混入の問題，計測環境の問題などが考えられる．このような問題を解決し，本研究の実用化における有効性を示すことが，今後の課題である．

参考文献

- 1) 豊田利夫：機械システム診断の進め方，(社)プラントメンテナンス協会，1998．
- 2) 牧 修市：振動法による設備診断の実際，(社)プラントメンテナンス協会，1998．
- 3) 加藤雅史，高宮 進，田中信治，二宮公紀：橋梁下部工補強に伴う振動特性の変化の検討，土木学会論文集，No.428/I-15，pp.57-66，1991．
- 4) 岡林隆敏，原 忠彦：道路橋振動特性測定における衝撃加振法の適用，構造工学論文集，Vol. 34A，pp731-738，1988．
- 5) 山崎智之，大島俊之，三上修一，太田雅二：損傷 RC 柱の打撃法による損傷評価に関する研究，構造工学論文集，Vol. 45A，pp.337-345，1999．
- 6) Fujino, Y., Abe, M.: Vibration-based Monitoring of Infrastructures -R&D of sensors and analysis at University of Tokyo-, Proceeding of the International Workshop on Structural Health Monitoring of Bridges/Colloquium on Bridge Vibration '03, pp.37-54, 2003.
- 7) 安部雅人，藤野陽三，長山智則，池田憲二：常時微動計測に基づく非比例減衰系の構造同定と長大吊橋への適用例，土木学会論文集，No.689/I-57，pp.261-274，2001．
- 8) 岡林隆敏，奥松俊博，中宮義貴：常時微動に基づく AR モデルによる構造物振動数の高精度自動推定法，土木学会論文集．
- 9) 中溝高好：信号解析とシステム同定，コロナ社，1988．
- 10) 星谷 勝・斉藤悦郎：データ解析と応用・カルマンフィルタを中心として，鹿島出版会，1991．
- 11) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977．

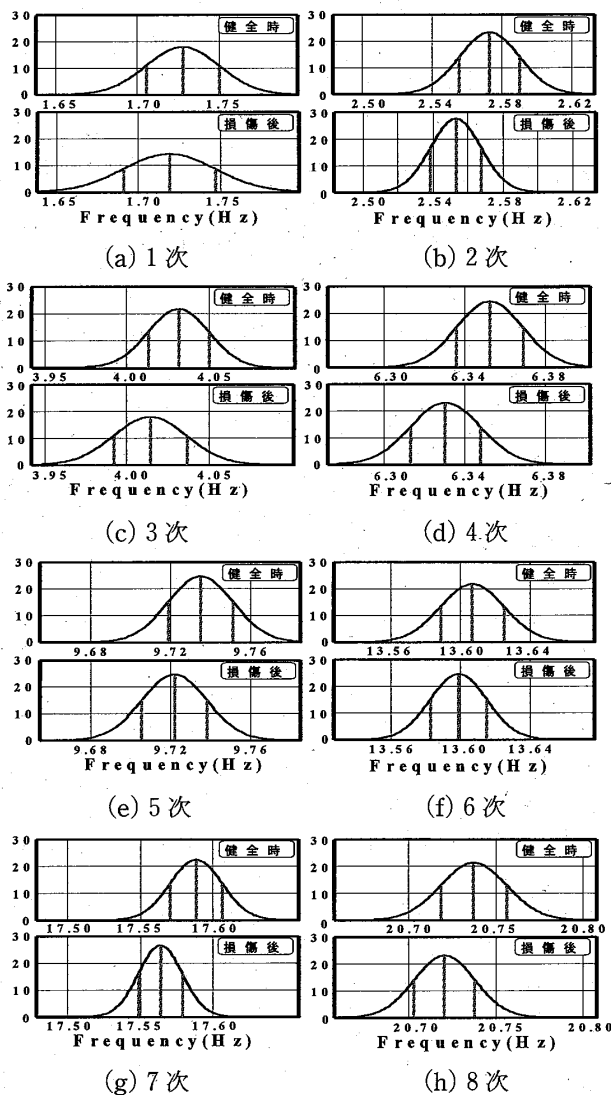


図-11 ガウス分布