長崎大学教養部紀要（人文・自然科学篇合併号）第37巻　第1号　279－291（1996年7月）

軸対称物体の運動と動摩擦力の問題点について

冨塚　明・松島　晟・古賀　雅夫・後藤　信行

On some problems about the motion and force of kinematic friction of an axially-symmetric rigid body

Akira TOMIZUKA, Akira MATSUSHIMA, Masao KOGA and Nobuyuki GOTO

Abstract

Present authors discussed the rolling motion of an axially-symmetric rigid body such as a sphere or a column on an inclined plane with an initial angular velocity and no initial velocity of center of gravity in detail. The body rotates, slides, or both according to the relations among the coefficient of kinematic friction μ', that of static friction μ and an inclined angle.

In this paper, we also showed the definition of kinematic frictional force $\vec{F} = \mu'\vec{N}$ is of no significance in some cases under the condition $\mu' > \mu$.

§1　はじめに

斜面上を球や円柱などの軸対称物体が静止摩擦力を受けて下る運動は，大学初年級のいろいろな教科書に記載されている．しかし軸対称物体に回転を与えて，斜面上に静かに置いた場合の運動をすべて統一的に扱った例はあまりみられない．

本稿では軸対称物体に初角速度ω_0を与え，重心の初速度$v_0 = 0$で，傾角θの斜面上に静かに置いた場合のころがり運動を詳細に調べ，図式化することを試みる．

一方，アルミニウムどうしでは動摩擦係数μ'が静止摩擦係数μより大きいことが知られている[1]ので$\mu' > \mu$を中心にして運動のようす及び動摩擦力の問題点を調べる．

§2　準備と運動方程式系

座標系及び記号は図1のように x 軸を斜面に沿って上向きを正に取る．また球や円柱など軸対称物体の半径を a，質量を M とし，重心の速度（x 成分）を v，重心のまわりの回転の角速度を ω（図1のような回転の方向を正とする），重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを I とする．そして面からは静止摩擦力 $\vec{F_S}=F_S\vec{i}$，または動摩擦力 $\vec{F}=F\vec{i}$ を受けるものとする．さらに面からの垂直抗力を $\vec{N}=N\vec{j}$ とする．

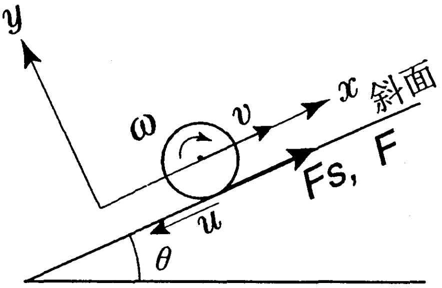

図1
静止摩擦力 $\vec{F_S}$（または動摩擦力 $\vec{F}$）を受けて，球が斜面を運動する場合の座標の取り方を示す．斜面上向きを x 軸の正方向に取り，また回転の正の方向は図に示すように取る．

まず摩擦に関するクーロンの法則 $\mu \geqq \dfrac{F_S}{N}$ であるが，原島鮮は『力学』[2] の中で，球状物体では，球を n 正多角形の辺の数が非常に大きい場合とみなして，この n 正多角形が斜面に静止している場合の静止摩擦係数の議論をしている．$\mu' > \mu$ の場合でも，仮に静止摩擦係数が定義できるとして，静止摩擦力がはたらく条件として，これまでのクーロンの法則が成り立つと仮定する．

$$\mu \geqq \frac{F_S}{N} \tag{2-1}$$

ここで $N=Mg\cos\theta,\ F_S=\dfrac{I\,Mg\sin\theta}{I+Ma^2}$ である．

そこで軸対称物体が転がる場合は (2-1) から静止摩擦力 $\vec{F_S}$ がはたらく条件として

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \geqq \tan\theta \tag{2-2}$$

となる．

さて動摩擦力 $\vec{F}=F\vec{i}$ がはたらくとき，物体と斜面との接点が滑る速度 u（x 成分）が負の場合と正の場合にわけて運動を調べてみる．いずれの場合も方程式は

$$\left.\begin{aligned}
M\frac{dv}{dt} &= F-Mg\sin\theta\\
0 &= N-Mg\cos\theta\\
I\frac{d\omega}{dt} &= -aF\\
u &= v-a\omega\\
\left|\vec{F}\right| &= \mu' Mg\cos\theta,\ F=\mu' N\left(\frac{-u}{|u|}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

で与えられ，$u<0$ の場合には，これは次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv}{dt}=\alpha_1,\ \frac{d\omega}{dt}=-\frac{aF}{I},\ u=v-a\omega\\&\frac{du}{dt}=\alpha_1+\frac{Fa^2}{I}\equiv\Omega_1,\ F=\mu' Mg\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{2-4}$$

ここで重心の加速度を $\alpha_1\equiv g(\mu'\cos\theta-\sin\theta)$ とし，また滑りの加速度を

$$\Omega_1\equiv\alpha_1+\frac{Fa^2}{I}=a\left(\frac{Fa}{I}+\frac{\alpha_1}{a}\right)=g\cos\theta\left\{\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)-\tan\theta\right\}\tag{2-5}$$

と定義する．(2-4) の解は

$$v=\alpha_1t+v_0,\ \omega=-\frac{\alpha F}{I}t+\omega_0,\ u=\Omega_1t+u_0=\Omega_1t+v_0-a\omega_0\tag{2-6}$$

となる．ただし，v, ω, u の $t=0$ での初期値をそれぞれ，$v_0(=0)$, ω_0, u_0 としている．

このとき

$$\Omega_1\leqq 0 \text{ の条件は}\qquad \mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)\leqq\tan\theta\tag{2-7}$$

$$\alpha_1\leqq 0 \text{ の条件は}\qquad \mu'\leqq\tan\theta\tag{2-8}$$

となる．

ところで条件 (2-1) は，$\mu>\mu'$ の場合には，質点が静止した状態（$v=0$）から動き出さない条件でもある．しかし $\mu'>\mu$ の場合は，質点が動き出さない条件のすべてではない．質点が静止した状態（$v=0$）をそのまま保つ条件は (2-3)，または (2-4) より

$$\mu'\geqq\tan\theta$$

となる．したがって $\mu'>\mu$ の場合は，静止摩擦力のはたらく傾角 θ の範囲を (2-2) の他に

$$\mu'\geqq\tan\theta>\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)\tag{2-9}$$

と拡張する．

また $u=0$ となる時刻を t_u とすると (2-5)，(2-6) より

$$t_u=\frac{a\omega_0}{\Omega_1}=\frac{a\omega_0}{g\{\mu'(1+Ma^2/I)\cos\theta-\sin\theta\}}\tag{2-10}$$

であり，$\omega=0$ となる時刻を t_ω とすると (2-4)，(2-5) より

$$t_\omega=\frac{I\omega_0}{Fa}=\frac{I\omega_0}{\mu' Mga\cos\theta}\tag{2-11}$$

となる．

$\alpha_1 > 0$ では

$$t_u = \frac{a\omega_0}{\Omega_1} = \frac{\omega_0}{\dfrac{Fa}{I} + \dfrac{\alpha_1}{a}} < \frac{\omega_0}{\dfrac{Fa}{I}} = t_\omega$$

が成り立つので $t_u < t_\omega$ となる．さらに $\alpha_1 = 0$ では $t_u = t_\omega$, $\alpha_1 < 0$ では $t_u > t_\omega$ となる．すなわち，

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 > 0 \text{ ならば } t_u < t_\omega \\ \alpha_1 = 0 \text{ ならば } t_u = t_\omega \\ \alpha_1 < 0 \text{ ならば } t_u > t_\omega \end{array}\right\} \tag{2-12}$$

である．

一方，$u > 0$ の場合は（2-3）より

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = -g(\mu' \cos\theta + \sin\theta) \equiv \alpha_2 \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{aF}{I},\ u = v - a\omega,\ F = -\mu' Mg\cos\theta \\ \dfrac{du}{dt} = \alpha_2 + \dfrac{Fa^2}{I} \equiv \Omega_2 \end{array}\right\} \tag{2-13}$$

となる．ここで α_2, Ω_2 は（2-13）で定義し，常に $\alpha_2 < 0$ であり，さらに

$$\Omega_2 \equiv \alpha_2 + \frac{Fa^2}{I} = -\left\{ g(\mu' \cos\theta + \sin\theta) + \frac{\mu' a^2 Mg\cos\theta}{I} \right\} < 0$$

である．

また，（2-13）の解は

$$v = \alpha_2 t + v_{02},\ u = \Omega_2 t + u_{02},\ \omega = -\frac{Fa}{I} t + \omega_{02} \tag{2-14}$$

となる．ただし v_{02}, u_{02}, ω_{02} は $t = 0$ における v, u, ω の初期値である．

さて密度の均質な球や球殻，円盤，円柱，円輪など軸対称の物体では，その軸のまわりの慣性モーメント I に対して $\dfrac{Ma^2}{I} \geqq 1$ であるから，（2-9）の条件は

$$\mu' > \mu\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \geqq 2\mu \tag{2-15}$$

となる．均質な物体では $\mu' \geqq 2\mu$ の場合はほとんどあり得ないが，密度が均一でない物体では（2-15）が成り立つ可能性はある．そこで，次項では $\mu' > \mu$ の場合を中心にして

$$\mu' \leqq \mu\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \tag{2-16}$$

$$\mu' > \mu\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \tag{2-17}$$

の 2 つの場合について調べることにする．

§3　摩擦力のもとでの軸対称物体の運動とその検討

初期条件より滑りの初速度は $u_0 = v_0 - a\omega_0 = -a\omega_0 < 0$ であるから，方程式系 (2-4) を用いる．

（Ⅰ）$\mu' \leqq \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ の場合について

まず (2-4) で定義される，滑りの加速度 Ω_1 の符号によって 2 つに分けて議論することにしよう．

（ⅰ）$\Omega_1 \leqq 0$ の場合

$u = \Omega_1 t - a\omega < 0$ が常に成立しているので，条件 (2-2) には関係なく，動摩擦力は x の正方向にはたらく．逆にいえば，動摩擦力は球の斜面に対する滑りをさまたげる方向にはたらくにも拘わらず，滑りの大きさは絶えず増加する．

$\Omega_1 \leqq 0$ の条件は (2-7) より $\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \leqq \tan\theta$ である．したがって当然，$\mu' < \tan\theta$ であるから，(2-8) より重心の加速度は $\alpha_1 < 0$ となる．このとき $v = \alpha_1 t < 0$，すなわち重心の位置は斜面を下がっていくことがわかる．また回転の角速度 ω は (2-11) より，時刻 t_ω で $\omega = 0$ となり，回転は止まる．その後は $\omega < 0$ なので今までとは逆に回転を始める．すなわち重心は常に斜面を下りながら，回転は初めは斜面を登る方向に回転 ($\omega > 0$) し，時刻 t_ω 以降では負に回転 ($\omega < 0$) する．この運動の様子を図 2 に示す．

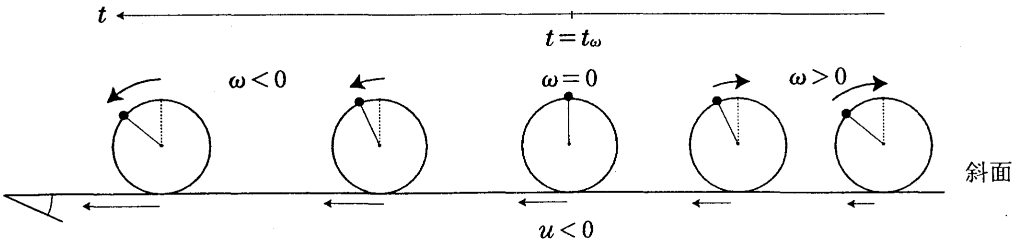

図 2

$\Omega_1 < 0$ の場合の運動の様子．動摩擦力は常に x の正方向にはたらきながらも，初め回転は正に回転し，次に時刻 t_ω 以降では負に回転する．

ここでの条件 $\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \leqq \tan\theta$ は，$\mu' < \mu$ の場合だけでなく，$\mu' > \mu$ の場合にも起こりうる．さらには $\mu' > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ の場合にも起こりうる．また (2-2) の条件でも起こりうる．したがって $\Omega_1 \leqq 0$ の場合の結論は $\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \leqq \tan\theta$ を満たすかぎり成り立つといえよう．

（ii）$\Omega_1 > 0$ の場合

この条件は $\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta$ であるが，さらに重心の加速度 α_1 の符号によって3つに分けて考えてみる．

（A）$\alpha_1 > 0$ の場合

これに対する条件は（2-8）より

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan\theta \tag{3-1}$$

である．

$\mu > \mu'$ の場合には

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan\theta \tag{3-2}$$

となる．

一方，$\mu' > \mu$ の場合には，①$\mu' > \mu > \tan\theta$ と②$\mu' > \tan\theta > \mu$ の2つの場合が考えられる．

①の場合は

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu > \tan\theta \tag{3-3}$$

である．

②の場合は，（2-16）より

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \geqq \mu' > \tan\theta > \mu \tag{3-4}$$

となる．いずれにしても条件（2-2）の $\mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \geqq \tan\theta$ を満たすので $u=0$ 以降では静止摩擦力 $\overrightarrow{F_S}$ の下での運動となる．

すなわち，運動を調べると $v=\alpha_1 t > 0$ であり，（2-12）の時刻 $t_\omega = \dfrac{I\omega_0}{Fa}$ で $\omega=0$ となり，（2-9）の時刻 t_u で $u=0$ となる．ここで（2-11）より $t_u < t_\omega$ である．

したがって，まず初めは $v>0,\ \omega>0,\ u<0$ であるから，物体は斜面から x の正方向に動摩擦力を受けて正に回転しながら重心も斜面を登る．しかし，時刻 t_u で滑りが止まり，その後は静止摩擦力 $\overrightarrow{F_S}$ の下での運動となる．

t_u 以降では t の代わりに $t'=t-t_u$ で定義される t' を用いると

$$v_u \equiv v(t_u) = v(t'=0) = \alpha_1 t_u > 0$$

であり，また

$$\omega_u \equiv \omega(t_u) = \omega(t'=0)$$

とおけば，$u_u \equiv u(t_u) = v_u - a\omega_u = 0$ であるから $\omega_u = \dfrac{v_u}{a} > 0$ となる．したがって，物体の運動は $t' = 0$ で $\omega_u > 0$, $v_u > 0$, $u_u = 0$ の初期条件の下で，静止摩擦力を受けて斜面上を回転する運動となる．

図 1 と同じ座標の取り方をして，$t' \geqq 0$ でも今までと同じ記号 u, ω, v を用いると，(2-6) より

$$v = -\frac{Ma^2 g \sin\theta}{Ma^2+I}t' + v_u,\ \omega = -\frac{Mag\sin\theta}{Ma^2+I}t' + \omega_u,\ F_S = \frac{IMg\sin\theta}{Ma^2+I} \tag{3-5}$$

が得られる．

したがって，物体はさらに時刻 $t'_\omega = \dfrac{\omega_u(Ma^2+I)}{Mag\sin\theta} = t'_u$ まで斜面を登り，そこで $v = a\omega = 0$ となり，その後は§ 2 と全く同じ運動をして，転がりながら下る．この運動の様子を図 3 に示す．

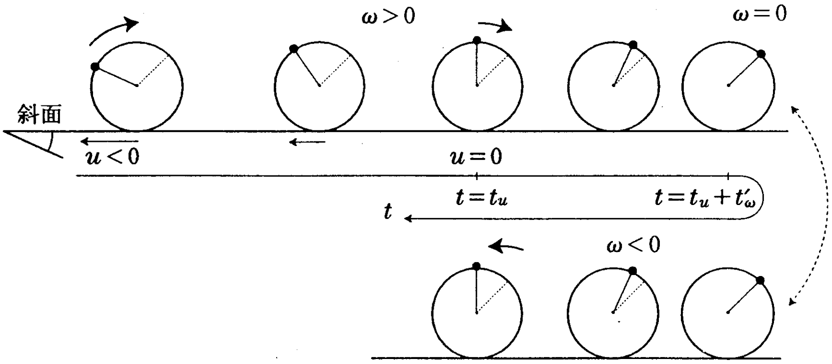

図 3

$\Omega_1 > 0$ で $\alpha_1 > 0$ の場合の運動の様子．x の正方向に動摩擦力を受けて，初めは正に回転しながら重心も登る．次に時刻 t_u で滑りはなくなる．それ以降では静止摩擦力の下での運動となり，時刻 $t_u + t'_\omega$ で回転が止まるまで登り，その後は転がりながら下る運動となる．

(B) $\alpha_1 = 0$ の場合

$\mu > \mu'$ の場合には

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan\theta \tag{3-6}$$

である．

$\mu < \mu'$ の場合には

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan\theta$$

であり，さらに $\mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \geqq \mu' > \mu$ の条件を用いると結局，

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \geqq \mu' = \tan\theta > \mu \qquad (3\text{-}7)$$

となる．いずれにしても静止摩擦力がはたらく条件（2-2）を満足する．

重心の加速度 $\alpha_1 = 0$ の場合は（2-6）より $v = 0$ であるから，初めのうちは重心は斜面を止まったままである．時刻 t_ω で $\omega = 0$ となり，時刻 t_u で $u = v - a\omega = 0$ となる．このとき（2-12）より $t_u = t_\omega$ である．したがって，時刻 t_u までは物体の重心は斜面に止まったままである．すなわち初め，物体は斜面から x の正方向に動摩擦力を受けながら斜面を登る方向に正に回転しているが，物体の重心は斜面の一点に止まったままである．それから時刻 t_u で $v = 0$, $\omega = 0$, $u = 0$ となり，それ以降では静止摩擦力 $\overrightarrow{F_S}$ の下での運動となり，§ 2 と同じ運動をする．

（C）$\alpha_1 < 0$ の場合

$\mu > \mu'$ の場合には条件は

$$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu' \qquad (3\text{-}8)$$

となる．

$\mu < \mu'$ の場合には $\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \geqq \mu' > \mu$ であるから次の 2 つの場合が考えられる．

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu' \qquad (3\text{-}9)$$

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' \qquad (3\text{-}10)$$

（3-9）の場合は静止摩擦力がはたらく条件（2-2）を満足するので運動は次のようになる．

重心の速度は常に負（$v = \alpha_1 t < 0$）であり，（2-11）の時刻 $t_\omega = \dfrac{I\omega_0}{Fa}$ で $\omega = 0$ となる．さらに（2-10）の時刻 $t_u = \dfrac{I\omega_0}{\Omega_1}$ で $u = 0$ となる．ここで（2-12）より $t_u > t_\omega$ である．

したがって初めのうちは $v < 0$, $\omega > 0$, $u < 0$ であるので，物体は斜面から x の正方向に動摩擦力を受けながら斜面を登ろうと正に回転しているが，物体の重心は斜面を下がる．次に時刻 t_ω で回転は止まり，t_ω 以降の時刻では $v < 0$, $\omega < 0$, $u < 0$ となる．動摩擦力はやはり x の正方向にはたらき，物体は負に回転を始めるが重心はやはり斜面を下がっていく．さらに時刻 t_u では $u = 0$ となり，それ以降では物体は静止摩擦力 $\overrightarrow{F_S}$ の下での運動となる．ここでも，$t' = t - t_u$ なる t' を用いると

$t'=0$ での初期条件は

$$v_u \equiv v(t_u) = v(t'=0) = \alpha_1 t_u < 0$$

$$\omega_u \equiv \omega(t_u) = \omega(t'=0) = \frac{v_u}{a} < 0$$

である．

t_u 以降の運動方程式系の解は（3-5）と同じである．すなわち，初期条件として重心に初速度 $v_u(<0$, 斜面を下る方向）と回転の初角速度 $\omega_u(<0$, 斜面を下る方向）を与えた場合と同じで，解は次のようになる．

$$\begin{aligned} v &= a\omega = -\frac{Ma^2 g \sin\theta}{I+Ma^2}t' + v_u \\ F_S &= \frac{IMg\sin\theta}{I+Ma^2} \end{aligned} \tag{3-11}$$

この運動の全体の様子を図4に示す．

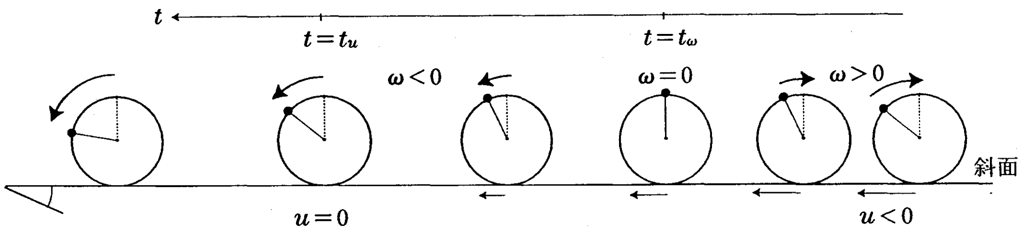

図4

$\Omega_1 > 0$ で $\alpha_1 < 0$ の場合の運動する様子．x の正方向に動摩擦力を受けて，正に回転するが，重心は下がっていく．そして時刻 t_ω 以降では回転も負になる．さらに時刻 t_u では滑りも止まる．それ以降は静止摩擦力を受けて，負の重心初速度をもって斜面を転がり下る運動となる．

（3-10）の場合は（2-5），（2-6）より，$u = \Omega_1 t - a\omega_0$ であるから $t=0$ 付近では $u<0$ である．すなわち，$u<0$ が成り立つ時間では動摩擦力は x の正方向にはたらく．その後（2-10）より，時刻 $t_u = \dfrac{a\omega_0}{\Omega_1}$ で $u=0$ となる．この瞬間は動摩擦力ははたらかずに静止摩擦力がはたらくと考えられる．しかし条件 $\tan\theta > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ を満足しているから，次に動き出した瞬間，球と斜面の接点に滑り（またはずれ）が生じて，動摩擦力がはたらくことになる．そこで（3-10）の場合について時刻 t_u 以降の運動を詳しく検討してみることにする．

この場合は傾角 θ が摩擦角より大きいことを考慮に入れて時刻 t_u 以降では動摩擦力は静止摩擦力と同じ方向にはたらくと考えてみよう．静止摩擦力は常に x の正の方向にはたらくので運動方程式系は（2-4）となる．時刻 t_u 以降では t の代わりに $t'=t-t_u$ を用いる．

(2-4) の解 (2-6) より $u = \Omega_1 t' > 0$ となり，結果として動摩擦力は x の負の方向にはたらくことがわかる．そこで方程式 (2-13) を用いねばならず，その解 (2-14) から $u = \Omega_2 t' < 0$ となり，また動摩擦力は x の正の方向にはたらくことになる．すなわち $t' = 0(t = t_u)$ の直後では動摩擦力は正と負の両方向にはたらくことになり，数学的には動摩擦力は零を意味する．そこで動摩擦力がはたらかないのであれば静止摩擦力がはたらくであろう．しかし，条件 $\tan\theta > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ を満足するから静止摩擦力でなく動摩擦力がはたらくことになる．したがって，これらのことがらは矛盾している．

そこで，初めに $u < 0$ であり，次に $u = 0$ となったこと，さらに順序として $u > 0$ になることが予想される．そこでこの予想にしたがって $u = 0$ の後では動摩擦力は x の負の方向にはたらくとして，(2-13) が成り立つと考えてみる．この場合も時刻 t_u 以降では (2-14) より $u = \Omega_2 t' < 0$ となり，動摩擦力は x の正の方向にはたらくことになる．したがってまた方程式系 (2-4) を用いねばならなくなり，これらの事情は上記の議論と同じことを繰り返すことになる．すなわち，結果として動摩擦力でも静止摩擦力でもはたらくとすると矛盾をきたす．しかし，このことは事実と反するであろう．

したがって結論として，$\mu' > \mu$ の場合には条件 (3-10)，すなわち

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu'$$

では動摩擦力の式 $|F| = \mu' N$ が意味を持たなくなる．この結果はまた，条件 (2-7)，(2-8)，(2-9) にかかわりなく成り立つ．言い換えれば (3-10) の条件はあり得ないことになる．しかし (3-10) の条件はある物質では満足する場合もあり得るのではないだろうか．例えば，文献1によるとアルミニウムどうしでは $\mu' = 1.4$，$\mu = 1.05$ であるが，工夫をすれば条件 (3-10) が満足できるのではないだろうか．またそのとき，このような物質では斜面でどのような運動をするのであろうか興味深い．

(Ⅱ) $\mu' > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ の場合について

次に $\mu' > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ の場合について調べる．これまでと同様，(2-7) の滑りの加速度 Ω_1 の符号で2つに分けるが，$\Omega_1 \leqq 0$ の場合は，§3-(Ⅰ) の (ⅰ) の結論がそのまま成り立つので $\Omega_1 > 0$ の場合，すなわち $\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta$ の下での運動を α_1 の符号で次の3つに分けて検討する．

（D）$\alpha_1 > 0$ の場合

このとき $\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan\theta$ であるから，① $\mu' > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta$，② $\mu' > \tan\theta > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)$ の 2 つの場合を考えてみる．

①の場合は条件（2-2）を満足するから，§ 3 -（Ⅰ）の（ii）-（A）の結論がそのままあてはまる．

②の場合は（2-10）の t_u で $u = 0$ となり，(2-11）の t_ω で $\omega = 0$ となる．また同じく（2-12）より $t_u < t_\omega$ であり，時刻 t_u 以降では静止摩擦力の下での運動となり，(3-5）にしたがって運動する．

（E）$\alpha_1 = 0$ の場合

このとき $\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan\theta$ であるから，$\mu' = \tan\theta > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)$ となる．そこで時刻 t_u で $\omega = 0$, $u = 0$ となり，それ以降ではすべて初速度なしで（3-5）にしたがって運動する．

（F）$\alpha_1 < 0$ の場合

この場合は $\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu'$ であり，さらに（2-17）を使えば

$$\mu'\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu' > \mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \tag{3-12}$$

となる．したがってこの場合も（2-10）から時刻 t_u で $u = 0$ となる．また（2-11）から時刻 t_ω で $\omega = 0$ となる．また（2-12）より $t_u < t_\omega$ でもある．

さて時刻 t_u 以降の運動であるが，$F > 0$ とすれば，その解から $u = \Omega_1 t > 0$ となる．そこで $F > 0$ と取るのが正しく，その場合の解は $u = \Omega_2 t < 0$ となり，また $F < 0$ と取らねばならなくなり，矛盾をきたす．したがって§ 3 -（Ⅰ）の（ii）-（C）の（3-10）式の議論がこの場合もそのままあてはまる．すなわち，この場合も $|F| = \mu' N$ は意味を持たなくなる．

§ 4　まとめ

1．球や円柱などの軸対称物体を斜面を登る方向に回転（正の回転）させて静かに置いた場合の運動は以下のようになる．

①$\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) \leqq \tan\theta$ の場合

動摩擦力は常に x の正の方向にはたらき，接点は滑りながら重心は常に斜面を下って動く．回転は最初は正であるが，時刻 $t_\omega=\dfrac{I\omega_0}{\mu' Mga\cos\theta}$ 以降は負の回転となる．（図２）

②$\mu' > \tan\theta$ の場合

初めは x の正の方向に動摩擦力を受けて正に回転し，滑りながら重心も斜面を登って行く．しかし時刻 $t_u=\dfrac{a\omega_0}{g\{\mu'(1+Ma^2/I)\cos\theta-\sin\theta\}}$ で物体と斜面との接点の滑りが止まり，その後は静止摩擦力の下での運動となる．すなわち重心は初速度 $v_u=g\,(\mu'\cos\theta-\sin\theta)\,t_u$ で，さらに時刻 $t_u+\dfrac{\omega_u(Ma^2+I)}{Mga\sin\theta}$ まで斜面を上りつめ，この時刻で重心の速度も回転の角速度もともに零となり，以降は静止摩擦力を受けて，単に斜面に物体を置いただけの運動と等しくなる．（図３）

③$\mu' = \tan\theta$ の場合

初めは x の正の方向に動摩擦力を受けて正に回転するが重心は止まったままで動かない．そして時刻 $t_\omega=t_u=\dfrac{I\omega_0}{\mu' Mga\cos\theta}$ で滑りと回転が止まり，その後は静止摩擦力を受けた単に斜面に物体を置いただけの運動と等しくなる．

④$\mu'\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right) > \tan\theta > \mu'$ の場合

初めは x の正の方向に動摩擦力を受けて正に回転するが，重心は斜面を下がって行く．時刻 $t_\omega=\dfrac{I\omega_0}{\mu' Mga\cos\theta}$ で回転はいったん止まり，その後は負の回転をする．物体はなおも動摩擦力を受けながら斜面を滑りながら下っていくが，時刻

$t_u=\dfrac{a\omega_0}{g\{\mu'(1+Ma^2/I)\cos\theta-\sin\theta\}}$ で滑りは止まり，その後は重心の速度 $v_u(<0)$ で静止摩擦力を受けた斜面上の運動となる．（図４）

２．動摩擦力の問題点について

$\mu > \mu'$ では動摩擦力と面の垂直抗力との関係 $\vec{F}=\mu'\vec{N}$ に問題は生じない．しかし $\mu' > \mu$ の場合では，静止摩擦力のはたらく範囲を $\mu' \geqq \tan\theta > \mu\left(1+\dfrac{Ma^2}{I}\right)$ まで拡

張したが，$\mu\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right)$が摩擦角より大きい場合には，滑りの速度が零になった時刻以降では，面からの動摩擦力 $|F|=\mu' N$ は意味を持たなくなる．

参考文献

1）American Institute of Physics Handbook (3rd edition)
2）原島鮮：「力学」 p. 161 裳華房
3）小出昭一郎・兵藤申一・阿部龍蔵：「物理概論（上)」 p. 9～11 裳華房
4）園田久：「初等力学」p. 148～151 広川書店
5）山内恭彦・末岡清市：「大学演習力学」p. 226～227 裳華房
6）有馬朗人編：「基礎物理学」p. 22～23 学術図書出版社
7）河野彰夫「摩擦の科学」裳華房
8）Feynman, Leigton and Sans :"The Feynman Lecture on Physics" Volume Ⅰ(1963)
9）Paul G.Hewitt :"Conceptual Physics" 5th ed. (1985)
10）Jerry D.Willson :"Physics" 2nd ed. (1981)

（1996年４月30日受理）