長崎大学総合環境研究　第 9 巻　第 1 号　pp.59－62　2006 年 11 月

コリオリの力と角運動量保存則

後藤信行・冨塚　明

Coriolis Force and Conservation of Angular Momentum

Nobuyuki GOTO and Akira TOMIZUKA

Abstract: 角運動量の保存則は、回転体が剛体のときのみだけでなく、物体が回転しながら、内力によって収縮する場合のように、慣性モーメントが一定でない場合にも成り立つが、それを説明するのは難しい。しかし、コリオリの力を理解すれば、回転体が伸縮する場合の角速度の変化を直感的に説明できる。大学物理の大抵の教科書には、コリオリの力や遠心力などのみかけの力と角運動量の保存則とは独立に記述されている。一見、無関係と思える両者を結びつけ、回転座標系における、みかけの力から角運動量の保存則を導くことを試みる。

キーワード：コリオリの力、角運動量、回転運動

1. はじめに

設置基準の大綱化後、さらには教養部の廃止後、大学の一般教育としての物理の講義時間は大幅に削減され、従来のような系統的に進める講義方法が不可能となった。そのなかで角運動量の保存則をいかに教えるかは苦労するところである。

物理学科の講義であれば、角運動量の保存則について、正統的な導出方法を講義すべきであるが、2 単位だけの講義のなかで、しかも物理全般に渡って講義するには、時間的な余裕もなく、そのうえ学生のベクトルなどについての予備知識も足りない。

一般物理のために書かれた教科書のなかでの角運動量保存則の導出方法をみると、1 質点の運動についての角運動量の保存則を導き、それをフィギュアースケートのスピンなどに拡張して、一般化して説明しているのが普通である。しかし、そこには飛躍があり、学生に理解させるには無理がある。ここでは伸縮しながら回転する物体の角運動量の保存則をコリオリの力から直感的に導く方法を提案したい。

受領年月日　2006（平成 18 年）　6 月 7 日
受理年月日　2006（平成 18 年）　9 月 11 日

2. コリオリの力

図 1 のように、左まわりに一定の角速度 ω で回転している円板を考えよう。円板上の二点を A、B とし、その間の距離を s とする。A から B を狙って弾丸を速さ υ で発射すると、円板が回転していなければ、時間 s/υ 後に弾丸は B に達する。この時間を t としよう。しかし、実際には B 点は A から見て左まわりに角速度 ω で回転しているので、B 点は弾丸の軌道線上に対して左に角度 ωt だけ回転する。よって、B 点の軌道からのずれの長さは ωts となり、$s=\upsilon t$ を代入すれば、この長さは $\omega \upsilon t^2$ となる。これを円板上の観測者からみれば、逆に、弾丸の軌道が A と B を結ぶ直線から右方向に $\omega \upsilon t^2$ だけずれるように見える。このみかけのずれを時間 t で 2 回微分すれば、弾丸の軌道が右にずれていく加速度が求められ、それは $2\omega\upsilon$ となる。つまり、質量 m の弾丸には進行方向に対して右方向に $2m\omega\upsilon$ の力が働き、弾丸の軌道が右カーブしているように見える。これがコリオリの力で

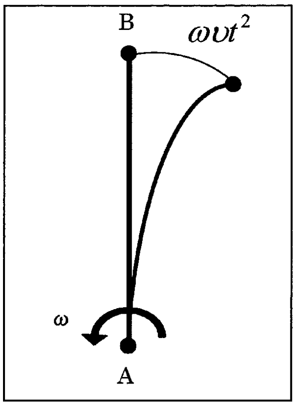

図 1　回転円盤上から見た弾丸の軌跡

ある。

コリオリの力は、遠心力や慣性力と同じくみかけの力でありながら、コリオリの力それ自体を、身をもって体験することはほとんどない。しかし、幸いなことに長崎には、福済寺という黄檗宗の寺に、日本で一番長いフーコーの振り子が存在するため[1]、学生にコリオリの力についての関心を持たせることは比較的容易である。

3. 角運動量の保存則

中心軸を回転軸とする円板を考え、その慣性モーメントを I_0 としよう。円板の角速度を ω とし、円板に力のモーメント N が働けば、その運動方程式は

$$I_0 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N \tag{1}$$

となるが、(1) 式は剛体の回転の運動方程式であるから、暗黙のうちに成立することを認めるとしよう。質点の運動方程式との対応から、質点の運動方程式において、質量を慣性モーメント、速度を角速度、力をトルク、つまり、力のモーメントに対応させればよい。

円板に働く力のモーメントがゼロであれば、円板の角速度は一定であり、当然、円板の角運動量も一定となるが、回転する円板上を虫が這っていて、円板と虫からなる系の慣性モーメントが変化するときは、系に働く力のモーメントがゼロであっても、円板の角速度は一定にはならない。その場合、円板の角速度がどのように変化するかを (1) 式から導いてみよう。つまり、円板が虫から受ける力のモーメントが分かれば、円板に関する運動方程式 (1) 式を用いて角速度が求められる。

図 2 のように、円板上に固定された曲座標 (r,θ) を考え、回転する円板の半径上を、質量 m の虫が中心から外に向かって速さ $\dot{r}$ で這っているとする。虫に働く見かけの力の r 方向成分 F_r および θ 方向成分 F_θ はそれぞれ、

$$F_r = mr\omega^2 \tag{2}$$
$$F_\theta = -mr\dot{\omega} - 2m\omega\,\dot{r} \tag{3}$$

となる。F_r は遠心力、F_θ の第1 項は円板の回転速度の変化による θ 方向の慣性力、第 2 項がコリオリの力である。これらの力は、虫と円板の摩擦を通して、円板に働くので、円板の回転の運動方程式は (1) 式より、

$$I_0\dot{\omega} = rF_\theta \tag{4}$$

つまり、

$$I_0\dot{\omega} = -mr^2\dot{\omega} - 2m\omega\, r\,\dot{r} \tag{5}$$

よって、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(I_0 + mr^2)\omega] = 0 \tag{6}$$

が導かれる。(4) 式が円板のみの運動方程式であるのに対して、(6) 式は円板と虫からなる系についての運動方程式であり、虫のいる位置と無関係に系の角運動量が保存されていることを示している。剛体の回転の運動方程式 (1) 式を仮定すれば、慣性モーメントが変化する場合にも、みかけの力から角運動量の保存則が導かれるのである。

ここで、はじめに円板の中心軸上に多くの虫がいて、

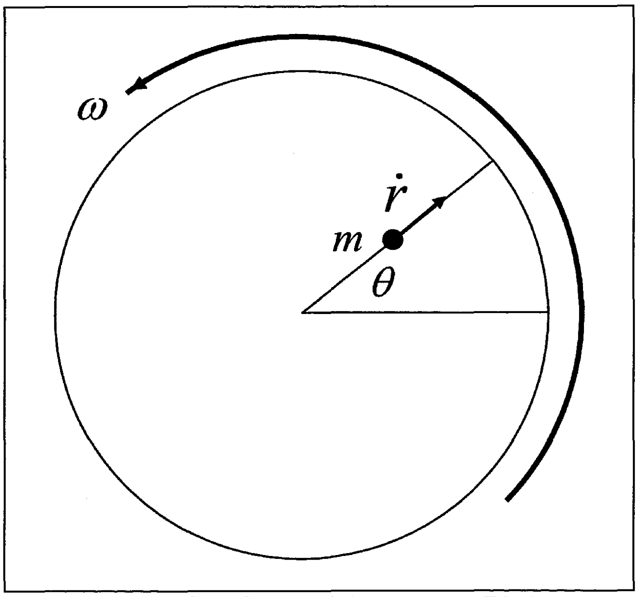

図 2　回転円板上を半径に添って這う虫

半径に沿って円板の上へ這い出したとしよう。虫の質量を $m_i\,(i = 1,2,\cdot\ \cdot\ \cdot\, n)$、円板上の虫の位置を r_i とする。さらに円板が極めて軽ければ、$I_0 \to 0$ とおけるので、その場合 (6) 式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = 0 \tag{7}$$

(7) 式は虫の位置 r_i が変化するときも成り立ち、虫か

らなる質点系の慣性モーメントは $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ であることがわかる。

話を再び慣性モーメント I_0 の円板と質量 m の虫の系に戻そう。この系の角運動量を L_0 とすれば、(6) 式より

$$(I_0 + mr^2)\omega = L_0 \tag{8}$$

次に虫に働く遠心力 F_r がする仕事を考えると、虫が円板の半径に沿って $\mathrm{d}r$ だけ進んだとき遠心力がする仕事 $\mathrm{d}W$ は

$$\mathrm{d}W = F_r\,\mathrm{d}r = mr\omega^2\,\mathrm{d}r \tag{9}$$

となる。

式 (8) と (9) から ω を消去すると

$$\mathrm{d}W = mL_0^2 \frac{r\,\mathrm{d}r}{(I_0 + mr^2)^2} \tag{10}$$

となり、円板の半径上を虫が r_1 から r_2 まで這ってきたとすると、その間に遠心力がした仕事 W は (10) 式を r_1 から r_2 まで積分すれば次のように求められる。

$$W = \frac{L_0^2}{2(I_0 + mr_1^2)} - \frac{L_0^2}{2(I_0 + mr_2^2)} \tag{11}$$

(11) 式から、虫が円板の中心から遠ざかるとき、遠心力が虫に対してした仕事だけ系は回転の運動エネルギーを失うことがわかる。逆に虫が円板の中心に向かって移動すると、虫が遠心力に逆らってした仕事だけ、系全体の回転の運動エネルギーが増える。虫に働くみかけの力のうち、遠心力は系の回転エネルギーの変化をもたらし、コリオリの力は角速度の変化をもたらすが、円板と虫の系の角運動量は変化しない。

最近、地球温暖化による海面の上昇が問題となっているが、仮に、南極の氷がすべて溶けたとすると、世界中の海面が６０ｍ上昇するといわれている。氷が解けると、赤道に向う流れにコリオリの力が働き、海底との摩擦を通して地球の自転を遅くする。海面が６０ｍ上昇すれば、地球の慣性モーメントが割合として10^{-5}ほど増えるので、地球の角速度は10^{-5}だけ遅くなる。地球の自転のエネルギーもそれだけ小さくなり、その分は海底と海水の摩擦によって熱エネルギーとなって消失することになる。

4. 惑星の運動

惑星の運動の角速度は遠日点では遅く近日点では速くなる。これは角運動量の保存則を表わすケプラーの第2 法則を用いれば明らかであるが、ケプラーの第2 法則はコリオリの力からも導かれる。

慣性モーメントを持たない円板、つまり質量を持たない仮想的な円板が惑星と同じ角速度で太陽のまわりを回っているとしよう。この仮想的な円板が惑星の運動を表わす回転座標系となり、この座標系の上では、惑星の運動は図 3 のように、動径方向のみとなり、惑星に働くコリオリの力は回転座標系の角速度を変化させることになる。

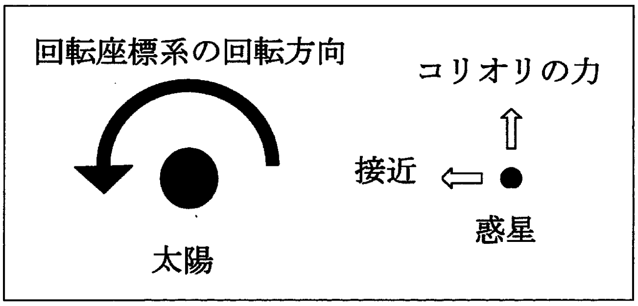

図 3 惑星が太陽に近づく場合の惑星に働くコリオリの力

惑星が仮想的な円板上の中心軸から距離 r の地点にいるとき、つねに中心の太陽から GmM/r^2 の引力を受けているが、今度は摩擦力が働かないので、惑星は回転座標系の上で、太陽からの引力とみかけの力が働くままに運動することになる。つまり、惑星は太陽からの引力と、(2) 式で表わされる遠心力 F_r を受けるが、回転座標系上では動径方向のみにしか運動しないので、(3) 式で表わされる F_θ はゼロとなる。逆に言えば、惑星に働く F_θ が常に消えるように回転座標系の角速度 ω が変化していると考えればよい。よって回転座標系からみた惑星の運動方程式は

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + mr\omega^2 \tag{11}$$

一方、$F_\theta = 0$ より、

$$-mr\dot{\omega} - 2m\dot{r}\omega = 0 \tag{12}$$

(12) 式は、コリオリーの力によって惑星の公転の角速度、つまり、回転座標系の角速度が変化することを

表わしている。(12) 式の両辺に r を掛けて積分すると、

$$mr^2\omega = l_0 \tag{13}$$

となり、惑星の運動についての角運動量の保存則が導かれる。(11) 式と (1 3) 式から ω を消去し、積分すると、

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l_0^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = \text{const.} \tag{14}$$

となる。これは勿論、惑星の運動についてのエネルギー保存の式である。

一般の大学の教科書にはコリオリの力と角運動量の保存則は独立に説明されているが、両者はともに回転が関係した現象であり、前者から後者を導くことができる。確かに、両者を関係づけた物理の教科書[2)]もごく少数存在するが、それほど明確ではない。

角運動量保存則の例としてはスケーターのスピンや、回転椅子に座っての腕の屈伸を取り上げた教科書が多い。回転椅子上で鉄アレイを持った両手を広げて回転している状態から腕を縮めると、回転椅子の回転が速くなるのは角運動量の保存則には違いないが、回転椅子と一緒に回転する座標系から見れば、腕を縮めることによって鉄アレイに働くコリオリの力から直観的に説明できる。

また、超新星爆発では星の中心部は内部に向かって落下するので、コリオリの力のため角速度が大きくなり、星の外層部は吹き飛ばされるので、回転と逆向きにコリオリの力が働き、中性子星のまわりにできる膨張星雲の角速度は小さくなる。

5. おわりに

最近、高校では物理は暗記科目と考えている生徒がいるそうだが、それは受験のための物理では、現象の間の関連性を教える余裕ないからだと思われる。またそのことが、高校の物理を無味乾燥で興味のないものにし、大学入学後まで引きずっているようである。大学での物理でも、講義時間数が少なく、困難なことではあるが、より工夫を凝らすことにより、難しいことを易しく、さらに現象の間に関連性を持たせ、学生の興味を引くような、‘暗記科目でない物理’の講義をすべきであろう。回転運動は難しいが、難しい故に独楽の運動などの面白い現象も多く、それをいかに易しく面白く教えるかを工夫する必要があろう。

参考文献

1) 後藤信行：福済寺の床　　パリティ　Vol. 15 (2000) No. 01　p．64

2) たとえば、ファイマン物理学　Ｉ力学　岩波書店 (1967) p .270