扇形の面積と弧長

北村　右一*　島袋　　修*　中川　幸久†

Area and Arc Length of a Circular Sector

Yuichi KITAMURA　Osamu SHIMABUKURO　Yukihisa NAKAGAWA

概要

高校数学において，円の求積が循環論法を含んでいるかのように吹聴されていることを，最近著者らは知った．インターネット上にも，疑問を抱く高校生の投稿が散見される．信じ難い現象である．おそらく多忙な業務に追われ専門書を紐解くゆとりがないであろう高校の教師に代わり，循環が起こりえないことを本稿の中で解説する．

1　背景

高校数学において円の求積が循環論法を含んでいると指摘するものに，山川の [1] がある．そこでは，

$$\text{円の面積} \Longrightarrow \text{扇形の面積} \Longrightarrow \frac{r^2}{2}\sin\theta < \frac{r^2}{2}\theta < \frac{r^2}{2}\tan\theta$$
$$\Longrightarrow \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \Longrightarrow (\sin\theta)' = \cos\theta$$
$$\Longrightarrow \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi r^2}{4} \Longrightarrow \text{円の面積}$$

が循環論法であるとして，その解消法を提案している．

専門家の見地からいえば，上式 3 番目の不等式は面積ではなく長さを比較することにより証明できる．三角関数の微積についても，べき級数や常微分方程式の初期値問題の解として三角関数を定義すれば，$\sin\theta$ と θ の比の極限に頼る必要はない．高校の教師としては，それら専門の知識を有しながら，学習指導要領の範囲内で指導しなければならないことに歯がゆさを感じていることであろう．

高校の教育課程では，極限について収束の判定法を提示することなく，漠然としたイメージに頼った定義しか与えていない．その結果，例えば 2 つの収束数列の和のなす数列が，それぞれの極限の和に収束することも証明できず，公理として扱っている．生徒の発

* 長崎大学教育学部（Faculty of Education, Nagasaki University）
† 長崎大学大学教育イノベーションセンター（Center for Education Innovation, Nagasaki University）

達段階に応じた指導として，現代数学における極限の定義をそのまま与えることが適切でないことは，著者らも認識している．

しかしながら，「円の求積と循環論法」が都市伝説のように拡散し，高校生たちに数学の論理への不信感を募らせることがあってはならない．このような状況に鑑み，本稿ではできる限り平易な表現を用いて，循環しないことの説明を試みる．部分的には高校の範囲を超える内容も含まれるが，生徒の疑問を解消するために教師のヒントとなることを強く願っている．

2　曲線の長さ

この節は高校の教育課程を超えることになるが，曲線の長さを紛れのない形で定めておかなければならない．そのために，参照することが比較的容易であると思われる岩波数学辞典 [2] を利用する．本辞典の項目「曲線」の節 E. 曲線の長さ（p. 279 参照）および項目「長さ，面積」の節 A. 曲線の長さ（p. 1116 参照）には，曲線の長さに関する定義と解説が記載されている．

本稿では，扱う曲線を次のように限定する．

> 実数のある区間 $I\colon a \leq t \leq b$ 上で「連続な導関数」を持つ関数 $f(t)$，$g(t)$ によって表される，xy 座標平面上の曲線 $C\colon x = f(t),\ y = g(t)$

このような曲線を C^1 級であるという．

さて，[2] に準じて曲線の長さを定義し，その積分表現を定式化する．それに先立ち，実数の部分集合が持つ性質について述べなければならない（[2] の項目「順序」節 B. 諸定義 p. 516 参照）．以下の定義中で，E は実数の空でない部分集合を表す．

定義 1. 集合 E のすべての要素 x に対して，$x \leq M$ を満たす実数 M が存在するとき，E は**上に有界**であるといい，M を E の**上界**とよぶ．

定義 2. 集合 E が上に有界であるとき，E の上界の最小値を E の**上限**といい，$\sup E$ で表す．

E が上に有界であるとき，常にその上界の最小値が存在することを実数の**連続性**といい，実数の定義から導かれる（[2] の項目「実数と実数直線」節 C. 実数の解析的性質 p. 484 参照）．

次は曲線の長さの定義である（[2] の項目「曲線」節 E p. 279 参照）．

定義 3. 区間 $I\colon a \leq t \leq b$ 上の連続関数 $f(t)$，$g(t)$ によって表される曲線 $C\colon x = f(t),\ y = g(t)$ を**連続曲線**という．I の分割を $\Delta\colon a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r = b$ とし，分割 Δ 全体のなす集合を $\mathcal{P}$ とおく．C 上の点 $\mathrm{P}_k = (f(t_k), g(t_k))$ $(k = 0, \ldots, r)$ を順に結んでできる折れ線の長さを $l(\Delta) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ で表す．このとき，折れ線の長さ全体のなす集合 $\{l(\Delta)\colon \Delta \in \mathcal{P}\}$ が上に有界であるならば，C は**長さのある**（rectifiable）曲線

といい，

$$l(C) = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}} l(\Delta)$$

を C の長さという．

この定義の上限の表記 $\sup\limits_{\Delta \in \mathcal{P}} l(\Delta)$ は，

$$\sup\{l(\Delta) \colon \Delta \in \mathcal{P}\}$$

を略記したものである．分割の集合 $\mathcal{P}$ を明記しなくても誤解がない場合は，さらに

$$\sup_{\Delta} l(\Delta)$$

と略することもある．また，数学辞典では，2 点 A，B を結ぶ線分を $\overline{\mathrm{AB}}$ で，その長さを $|\overline{\mathrm{AB}}|$ で表している．簡単のため，ここでは単に AB と表記し，線分と長さのどちらを意味するかは，文脈から判断する．

連続曲線 C が C^1 級である場合，$l(C)$ は次の積分表現を持つ．

定理 1. 区間 $I \colon a \leq t \leq b$ 上の連続関数 $f(t)$, $g(t)$ が定める連続曲線を $C \colon x = f(t)$, $y = g(t)$ とする．I 上で $f(t)$，$g(t)$ が微分可能で，$f'(t)$，$g'(t)$ が連続ならば，C は長さを持ち

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

と表される．

この定理の証明は多くの微分積分学のテキストに見られるので省略する（[3]，pp. 78–79 参照）．本稿で限定した曲線は，この定理の仮定を全て満たしている．

円周率の定義についても [2] の項目「円周率」（pp. 94–95 参照）からそのまま引用する．

定義 4. ユークリッド平面上の円周の長さと直径との比，すなわち $2\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の値[*1]を円周率といい，W. Jones（1675–1749）および L. Euler 以来 $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$（周）の頭字 π で表す習慣である．

ここで，単位円 $x^2 + y^2 = 1$ は第 1 象限において $y = \sqrt{1-x^2}$ と表され，$-1 < x < 1$ の範囲ならば

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1}$$

が成り立つことから，定義 4 は半径 1 の半円の弧長を表す積分

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

によって円周率 π を定めていることになる．

[*1] この積分は広義 Riemann 積分である．積分区間を $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ に設定するなどの方法でそれを回避しなかったのは，数学辞典の主な対象が専門家であり，簡明で美しい表現を意図したものであろう．

3　弧長と面積

この節では，半径 1 の円弧 C が作る扇形を与え，その弧長 $l(C)$ と面積 $S(C)$ の関係について考察する．

図 1 のような弧 C を持つ扇形が与えられたとする．問題を単純化するために 4 等分し，

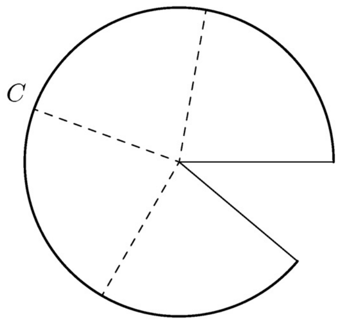

図 1

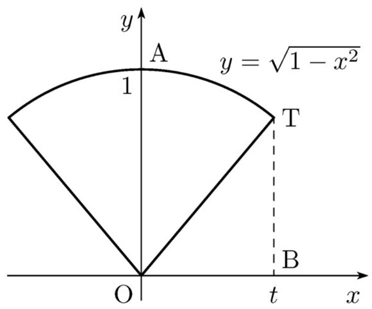

図 2

分割された一つの扇形を選ぶ．その中心角の 2 等分線が y 軸と重なるように，扇形を xy 平面上に置く．図 2 はその結果を示している．4 等分された扇形の中心角が 90° を超えることはないので $\angle\mathrm{AOT} \leq 45^\circ$ となり，図 2 における点 T の x 座標 t は $0 \leq t \leq 1/\sqrt{2}$ の範囲にある．

さて，弧 C の 8 等分にあたる弧 AT の方程式 $y=\sqrt{1-x^2}$ は $0 \leq x \leq t$ の範囲で微分可能であり (1) が成り立つので，定理 1 よりその長さについて

$$\frac{l(C)}{8} = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

と表される．

一方，扇形 OAT の面積は，図形 OATB の面積から直角三角形 OTB の面積を引いたものに等しいので，

$$\frac{S(C)}{8} = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} \tag{3}$$

である．この右辺を $F(t)$ とおくと，微積分の基本定理より

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$$

が得られる．

$$F(0)=0$$

に注意して，この両辺を 0 から t まで積分すると，

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．これと (2)，(3) を組み合わせることにより

$$S(C) = 8F(t) = 4\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{l(C)}{2}$$

が成り立ち，次の定理が従う．

定理 2. 単位円の任意の弧 C を与える．このとき，その弧長 $l(C)$ と C を弧に持つ扇形の面積 $S(C)$ の間に関係式

$$S(C) = \frac{l(C)}{2}$$

が成り立つ．

また，式 (3) で $t = 1/\sqrt{2}$ とおくと，単位円を 4 等分した扇形に適用することになるので，定理 2 と円周率に関する定義 4 より次の系を得る．

系 1. 扇形の面積を表す積分と弧長を表す積分の間に，次の関係式

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

が成り立つ．

この系は，円周率を言葉通り「直径に対する円周の長さとの比」によって定義しても，「単位円の面積」によって定義しても，同等であることを意味している．

さらに，半径 r の円と単位円の相似比が r であることから，容易に定理 2 の次の拡張が得られる．

系 2. 半径 r の円について，任意の弧 C の長さ $l_r(C)$ と，C を弧に持つ扇形の面積 $S_r(C)$ の間に関係式

$$S_r(C) = \frac{r}{2}\,l_r(C)$$

が成り立つ．

この節で展開した議論には，三角関数が全く関与していないことを注意しておこう．

4　弧長と三角比の大小関係

半径 1 の扇形に関する弧長と中心角の三角比の大小関係として，よく知られた不等式

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \tag{4}$$

がある．ただし，$0 < \theta < \pi/2$ である．この節では，長さを用いて (4) を導く．

最初に曲線の長さによる方法を説明する．解析概論（[4] p. 21 参照）にも記述があるが，高校生への説明としては，簡略に過ぎると思われるからである．

$0 < a < b = 1$ として，2 点 $\mathrm{A}(a, \sqrt{1-a^2})$，$\mathrm{B}(1, 0)$ を結ぶ円弧 C の長さを θ とおく．図 3 のように点 B を通る x 軸の垂線と直線 OA との交点を B' とおけば，三角比の定義

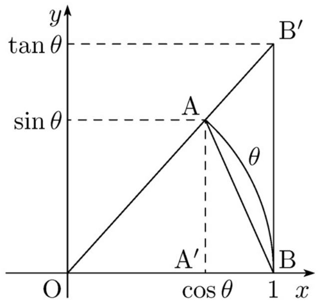

図 3

により $\mathrm{A}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\mathrm{B}'=(1,\tan\theta)$ となる．$\mathrm{AA}'=\sin\theta$,　$\mathrm{BB}'=\tan\theta$ であるから，直接定義 3 を用いて線分 AA'，BB' と円弧 C の長さを比較する．使用する道具は，次の 2 つの幾何的な性質

- 直角 3 角形の斜辺は他のどの辺よりも長い
- 相似な図形の大小

のみである．

■線分 AA' と円弧 C　線分 AB が直角 3 角形 $\mathrm{AA}'\mathrm{B}$ の斜辺であることから，$\mathrm{AA}'<\mathrm{AB}$. また，線分 AB は区間 $[\cos\theta,1]$ の分割

$$\varDelta_1\colon\ \cos\theta=t_0<t_1=1$$

に対応する C の折れ線でもあるから，

$$\mathrm{AB}=l(\varDelta_1)\leq\sup_{\varDelta}l(\varDelta)=l(C).$$

よって，

$$\sin\theta=\mathrm{AA}'<\mathrm{AB}\leq l(C)=\theta$$

となり，不等式 (4) の前半が示された．

■線分 BB' と円弧 C　不等式 (4) の後半も容易に証明できるが，記号が煩雑になることを避けるためいくつかの補題に分割する．

補題 1. 図 4 に従って，円弧 C 上に異なる 2 点 C，D をとり，OC，OD と BB' との交点を，それぞれ E，F とする．次に弦 CD の中点を M とし，OM と BB' との交点を N とする．さらに，点 N から OE，OF に下した垂線の足を，それぞれ G，H とする．

このとき，不等式

$$\mathrm{CD}<\mathrm{EF}$$

が成り立つ．

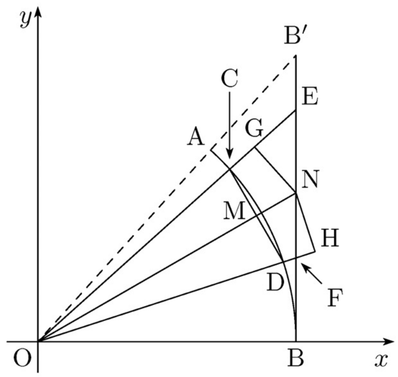

図 4

証明. △OMC と △OGN は相似な直角 3 角形であることから，CM < GN．また，EN は直角 3 角形 EGN の斜辺であるから，GN < EN．従って，

$$\mathrm{CM} < \mathrm{EN}$$

が成り立つ．

次に，DM の長さと FN の長さを比較する．D と B が異なる場合は，上と同様，△OMD と △OHN の相似性と △FHN が直角 3 角形であることを利用すれば，DM < FN が得られる．D と B が一致する場合は，F，H も B に一致するため，△FHN は線分 DN に退化してしまう．よって，DM < HN = FN となり，どちらの場合も

$$\mathrm{DM} < \mathrm{FN}$$

が成り立つ．

以上のことから，結論の不等式

$$\mathrm{CD} = \mathrm{CM} + \mathrm{DM} < \mathrm{EN} + \mathrm{FN} = \mathrm{EF}$$

が導かれた． □

補題 2. 図 3 において，

$$l(C) \leq \mathrm{BB}'$$

が成り立つ．

証明. 区間 $[\cos\theta, 1]$ の分割を任意に選び，

$$\varDelta\colon\ \cos\theta = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$$

とする．そして，円弧 C 上の点 $\left(t_k, \sqrt{1 - {t_k}^2}\right)$ を P_k，直線 OP_k と BB' との交点を Q_k とおく $(k = 0, 1, \ldots, r)$．このとき，補題 1 により

$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1} < \mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

が成り立つことから，

$$l(\varDelta)=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}<\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1}=\mathrm{BB}'.$$

分割 $\varDelta$ の選び方は任意であったから，上の不等式は線分 BB′ の長さが $l(\varDelta)$ の値全体の上界であることを示している．上限は上界の最小値なので，結論

$$l(C)=\sup_{\varDelta\in\mathcal{P}} l(\varDelta)\le \mathrm{BB}'$$

が得られた．　□

この補題の系として，結論の不等式から等号を除外できることを示す．

系 3. 図 3 において，

$$l(C)<\mathrm{BB}'$$

が成り立つ．

証明. 図 4 の円弧 C を 2 等分したものが図 5 である．直線 ON は角 BOB′ の 2 等分線で，これと C の交点を M とおいている．

円弧 AM，MB を，それぞれ C_1，C_2 で表す．線分 AN，BN は，それぞれ C_1，C_2 に接しているので，補題 2 により

$$l(C_1)\le \mathrm{AN},\quad l(C_2)\le \mathrm{BN}.$$

また，線分 B′N は直角 3 角形 B′AN の斜辺だから

$$l(C)=l(C_1)+l(C_2)\le \mathrm{AN}+\mathrm{BN}<\mathrm{B'N}+\mathrm{BN}=\mathrm{BB}'$$

となり，結論の不等式が得られた．　□

この系 3 は $\theta<\tan\theta$ が成り立つことを示しているので，曲線の長さの定義による不等式 (4) の証明が完了した．

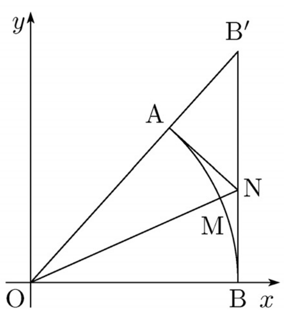

図 5

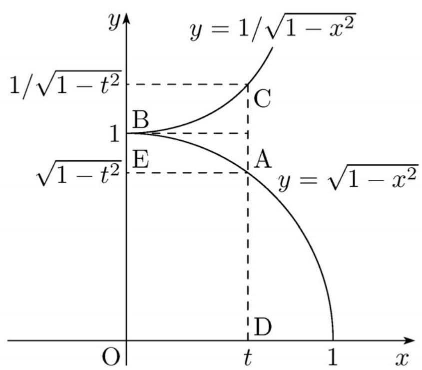

図 6

次に，曲線の長さを表す積分を利用して不等式 (4) を証明する．図 6 の弧 AB の長さは積分 $\int_0^t dx/\sqrt{1-x^2}$ によって表される．一方，この積分は区間 $[0,t]$ において，図 6 の曲線 BC と x 軸が挟む図形の面積である．この図形は，OD と OB を 2 辺とする長方形を含み，OD と DC を 2 辺とする長方形に含まれる．従って，各図形の面積を比較すると

$$t = \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OB} < \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \mathrm{OD} \cdot \mathrm{DC} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ここで扇形 AOB と直角三角形 AOE に注目する．t は $\angle\mathrm{AOE}$ の正弦であり，$\sqrt{1-t^2}$ は同じ角の余弦であることから，

$$\sin\angle\mathrm{AOE} < \text{扇形 OAB の弧長} < \frac{\sin\angle\mathrm{AOE}}{\cos\angle\mathrm{AOE}} = \tan\angle\mathrm{AOE}$$

が成り立つ．弧度法を用いてこの角 $\angle\mathrm{AOB}$（すなわち弧長 AB）を θ とおき，上式を書き直すと不等式 (4) が得られる．

5　結論

ここまで見てきたように，「円の面積」，「扇形の面積」，「扇形の弧長と三角比の大小関係」，これらはどれもも，関数 $\sqrt{1-x^2}$ あるいはその逆数の積分を用いて，単独に導出することができる．そして，定積分

$$\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

も $0 \leq t < 1$ の範囲で利用するので，高校数学の論理の枠内（極限の定義などに厳密さを欠いてはいるが，運用に必要なものは公理として準備されている）で，積分可能性に問題は生じない．従って，どこにも全く循環する余地がないことは明白である．

できる限り易しい手法と表現を心掛けて書いたつもりである．迷える子供たちを導く多くの先生方にとって，本稿が道標となれば幸いである．

参考文献

[1] 山川宏史，円の面積公式 $S = \pi r^2$ の循環論法の解消について，数研通信 **58**(2007), 9–11

[2] 日本数学会編，岩波数学辞典，岩波書店，第 4 版 (2007)

[3] 中尾愼宏，微分積分学，近代科学社 (1987)

[4] 高木貞治，解析概論，岩波書店，改訂第 3 版 (1983)