Bulletin of Faculty of Education, Nagasaki University : Curriculum and Teaching No.44 (2005) 15-24

社会科における数理的モデル認識

福田　正弘*

（平成16年10月29日受理）

Social Understanding with Mathematical Model in Social Studies

Masahiro FUKUDA*

(Received October 29, 2004)

0　はじめに

本小論は，社会科において数理教育を展開するために，社会科授業で形成を目指す数理的モデル認識に関して基礎的考察を加え，授業開発のための基本スケッチを行うものである。

周知の通り，社会科の教科書や資料集，そして授業では，多数の統計資料が用いられ，数量を用いた社会把握を子どもに行わせている。例えば，われわれの調査（福田，2003）では，ある社の中学校用の社会科教科書には，グラフと図表が地理的分野で123，歴史的分野で39，公民的分野で99件掲載されていた。生徒は，社会科の学習において，実に多くの数値・数量に接しているのである。

社会科学習で数量が多く用いられるのは，社会を理解する上で効用があるからであろう。社会認識における数量の効用に着目し，「社会認識における数量の機能」をわが国の優れた古典的な社会科教育実践から析出している研究に岩永（1989，1992）がある。氏は，「山びこ学校」と「村の五年生」を取り上げ，それぞれの実践における数量が持つ社会認識形成上の意味を分析している。その結果，数量は社会問題解決において，問題を構成要素に分解し，その要素間関係を論理的に記述することを通して，問題解決の科学性を保障する機能を果たしているとしている。例えば，山びこ学校の中で，江口江一の「母の死とその後」は次のように分析，整理される。すなわち，「母はいかに死にものぐるいではたらいたか」という問題を，家計の収支分析という数量化を通して母が減らした借金の額として表現し直される。そして，これを契機にして問題解決の糸口が家計の収益構造（土地の狭隘さ）に求められ，その点を機軸にした問題解決が図られているとされるのである。数量がこうした認識の契機となっているとするのである。

しかしながら，こうした数量の機能は，実は数量そのもの機能ではなく，数量を用いたあるいは用いようとする認識スタイルそのものの機能だと言えないだろうか。つまり，数量化する以前に，数量を必要とする社会モデルがあったのであり，数量が果たすといわれた機能は実はその社会モデルの機能だったというわけである。

一般に，社会的な文脈で用いられる数量は，すでにある特定の方法で計量された数量で

* 長崎大学教育学部初等教育講座（社会科教育）

ある。土地の生産量と面積は，すでにその値の使用目的が決まっており，その目的内で用いられる。そして，特定の計量方法や単位によって，具体的な数値が計量されるのである。つまり，数量が先立ってあるのではなく，その数量を必要とする目的があり，その目的に従う「社会の数量モデル」があるのである。そして，この社会の数量モデルを生み出す数理モデルがあるはずである。

われわれは，社会科において数理教育を展開しようとするが，その目指すところは，こうした社会の数量的認識の基礎になる，数理的モデル認識の育成である。本小論では，社会の数理的モデル認識に関して基礎的考察を加え，それをもとに社会科授業開発のために，幾つかの具体的な事例についてその基本スケッチを行う。

1　モデルとは何か

1.1 モデルの定義

通常，モデルとは「模型」を指すとされている。模型とは，本物のミニチュア版を指すこともあるが，本物とは少々姿が異なっていてもその「機能」をよく実現・再現しているものを指すこともある。つまり，求める意味によって必要となる模型も異なるのである。例えば，飛行機の場合，正確な形の再現を求めるなら縮小モデルが意味を持つし，「飛行」という機能の再現を求めるなら，全く飛ばないプラモデルよりも，紙飛行機の方が意味を持つかもしれない。

こうした常識的なモデル理解は専門学的にも通用し，辞典類には次のような定義がなされている。

「客観的実在や科学のある一定の領域におけるもろもろの対象，性質，関係が，・・・模写されたものを意味する。・・・モデルとなっているものが内容的な対象系であるか形式的な記号系であるかに応じて，それぞれ『内容的・技術的』モデルと『論理的・数学的モデル』と称される。」（哲学事典，1971）

「物理・生物・社会的なシステム（系）を理解するために，それとほぼ同様な行動をする数学・物理的な系」（新版心理学事典，1981）

つまり，モデルとは実物を模写したものであるが，内容的なものと形式的なものの2種があり，社会理解のためのモデルは後者ということなる。簡単化すれば，「複雑な社会システムを理解するために作られた，単純な論理数学的システム」ということができよう。

1.2 モデルの特徴

ところで，このように単純な論理数学的システムとして定義されたモデルは，その論理性とシステムとしての機能性から，次のような特徴を持つと考えられる。

・簡潔性

　複雑な対象を単純化して表現したものであるから簡潔性は当然であるが，モデル記述の方法として日常言語による曖昧さを，厳密に定義された言語，数式や論理式によって克服している。

・抽象性

　モデルは，現実世界から不要な要素を捨象して，本質的と思われる必要な要素のみで構成される単純な世界である。その意味で抽象的な性格を持つ。

・普遍性

モデルは，少数の要素で構成されており単純であるので説明負荷が小さく，理解されやすい。理解されやすいことは，間主観性を確保しやすく，その点で客観的であるといえる。

・仮説性

モデルは世界説明のために，認識主体が世界に対して当てはめた仮説である。それゆえ，モデルは仮説性を免れることはできず，絶対的な真理性を標榜しえない。

・操作性

モデルは変数によってシステムを記述している。その変数には任意の値を入力でき，結果をシミュレートできる。

・検証可能性

シミュレーションによってモデルの当てはまり具合や意思決定の妥当性を具体的に検証することができる。

・柔軟性

検証によってモデルの変数や変数間の関係を変更してモデルの組み替え，追加あるいは廃棄が容易にできる。

2　社会認識におけるモデル

2.1 認識の指導性

社会認識は，他の認識同様，認識主体の認識枠組によって社会事象が整理・解釈され，その意味が把握されて成立する。これまで，われわれはこの認識枠組を理論や概念として考えてきたが，それらを一括してモデルとして考えることができる。つまり，理論や概念は，社会を見る上でのモデルの構成要素の一つ，またはモデルそのものであると考えるわけである。

ところで，社会認識の過程を，モデルを用いて説明すると次のようになる。

・単純化とアナロジー

認識対象となる社会の事態（複数の社会事象からなる）や社会システムの中から必要な要素を抽出し，単純化モデルを作る。その際，類似的な機能を示す他のモデルを探索し，それに当てはめようとする（アナロジー）。

・世界への当てはめ

作り上げたモデルを動かして，世界に当てはめてみる。単純化して選択した構成要素間の関係がうまく機能しているか，被説明事態の現象が上手く再現しているかをシミュレーションしてみる。

・検証

必要に応じて，構成要素で示される数値データを現実の世界から収集し，モデルに代入し，現実の世界での当てはまり具合を検証する。

・残余要素の取り込み

単純化の過程で捨象された要素を取り込み，より説明精度の高いモデルに改善していく。

このように社会認識は，モデル作り・当てはめから始まり，その検証・改善へと進展していくというモデルに指導された過程を辿る。モデルは社会認識を指導しているのである。

2.2 問題解決とモデル

社会認識は「どうすればよいか」という実践的認識関心の下になされることが多く，「なぜか」という理論的認識関心はその配下に位置するのが通常である。上に示した認識過程を問題解決過程の脈絡に置き換えて，モデルの働きを書き直してみると次のようになる。

- 問題との遭遇
- 問題の発生要素の抽出
- 要素間関係のモデル化（アナロジーの探索）
- モデル構築
- 当てはめ・検証
- 解決のための最適解の探索あるいはモデル修正

問題解決が社会科学習における社会認識論として広く認められ，問題解決学習が社会科学習論として取り入れられているが，ここに示したモデルによる社会認識は，従来の問題解決に新しい意味づけを与える。つまり，従来の問題解決は，仮説設定・仮説検証がその核心部分に位置したが，その仮説の意味が曖昧であった。それを上のような特徴を持つモデルとして定位することによって，問題解決自体がより精確で，具体的なものとなる。

3　数理的モデルと社会認識

これまで見てきたように社会認識におけるモデルは社会システムを単純な要素で説明する論理数学的システムである。われわれは世界を日常言語で表現しているが，日常言語は無定義であったり，あるいは個人的に使用されたりしているので，日常言語による世界の表現は，世界を十分に説明できるものではない。モデルによって世界を説明できるためには，日常言語を越えた表現手法を用いる必要がある。

3.1 モデルの表現手法と数理的モデル

- イメージ（図）による表現

多くの場合，モデルは図として示される。図は，要素間の複雑な関係を簡易に表現することができる。例えば，図1の「年金会計推計モデル」は，年金会計のある年度の収入と支出，そして積立額を簡便に表す図である。つまり，これは年金会計を「風呂の水入れ」にアナロジーしたもので，蛇口からは毎年の保険料払い込み額が入り，水抜き栓からは毎年の年金支払い額が出ていき，その差額分がそれまで溜まった風呂の水に加算されていくという仕組みである。この年金のフローとストックの仕組みが簡便に表現されている。モデルを着想する際，まずわれわれはこうした図的なアナロジーを行っているのである。

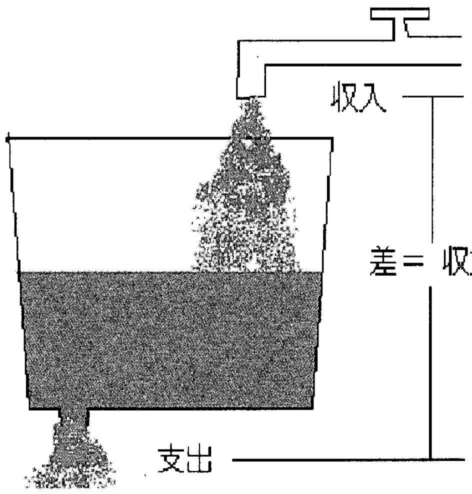


図1　年金会計モデル

・言語（命題による表現）

しかしながら，イメージによるモデル表現は要素間の関係を正確に厳密に表現することができない。例えば，上の年金会計モデルでは，毎年の年金収支の額を，前年までのストックに加えることまで正確に表現できない。また，収入や支出の項目は何か，どこまで含まれるかなど，細部の記述はコトバを用いた文表現によらざるをえない。ただし，日常言語は無定義で使われるので，ここでは定義されたコトバによって，モデルの諸要素と要素間関係が命題として記述される必要がある。

・数式や論理式（数式による表現）

命題による表現は個々の要素，関係を精確に記述し，解釈の揺れを防止する。しかし，命題による表現はすべて文表現になるために，情報量が大量になる。さらに，静的なモデルではなく，ダイナミックな動きをするモデルでは，命題によってその動きを表現することは不可能である。

例えば，上の年金会計モデルで，年金ストックの表現は，t 年度の保険料払い込み額を IN(t)，年金支払額を OU(t)，年金収支を S(t)，昨年度末の年金ストックを R(t-1) とすると，

$$S(t)=IN(t)-OU(t)$$

$$R(t)=R(t-1)+S(t)$$

と書くことができる。この式は，年金会計のダイナミックさを極めて簡便に表現している。しかも，それぞれの変数に値を入力することによって，年金会計の将来推移をシミュレートできる。社会事象にはもっと複雑な動きを示すものがあるが，それらを表現するには数式が不可欠である。また，数値表現に馴染まないモデルは論理式で記述できるであろう。

われわれは，こうした数式・論理式を用いて表現されたモデルを数理的モデルとよび，イメージや言語による表現と共同して有効な社会認識を形成すると考える。

3.2 数理的モデルによる社会認識の特徴

数理的モデルによる社会認識は，これまで述べたモデルによる社会認識に加えて，次のような特徴を持つ。

・シミュレーション的認識

モデルの操作性が高いので，任意のパラメータに入力して演算を実行できる。したがって，自身の思考の現実的な帰結を見ることができ，具体→抽象→具体という思考統合が可能である。

・漸進的問題解決（社会工学的アプローチ）

モデルで表現されたシステムで最適解を出すという問題解決手法をとる。解決されない残余問題はモデルの改良によって解決策を探るという漸進主義的なアプローチをする。これは，肯定か否定かによって二値対立的に論じられる社会問題解決アプローチに対して，新しい解決スタイルを示すものである。

・モデル反省的認識

しかしながら，議論ではモデルを常に意識することになり，批判はシミュレーション結果というよりも，そういう結果を導いたモデルそのものに対してなされる。現モデルの前提条件を越えるような超システム的な解決策は，別パラダイムのモデルを構

築することで実現される。

・文理融合の総合的認識

こうした思考は，文科系とか理科系といったこれまでの学校教育の教科体系を越えた知識，能力を総動員した総合的なものである。

4　数理的モデル認識を育てる社会科授業

数理的モデルによる社会認識を子どもに育てるにはどのような教育プログラムが必要か。本来，文理融合の総合的な認識であるので，社会科という従来の教科目の中で論ずべきことではないかもしれないが，社会科としてできることを中心に考えてみたい。

基本的に，数理的モデルによる社会認識を子どもに育てる社会科授業としては，子どもが，社会の中から数理的モデルを抽出し把握する授業と，数理的モデルを構築し社会に当てはめる授業の2つが考えられる。

4.1 数理的モデル獲得授業

社会の中から数理的モデルを把握することを目指す授業は，社会事象を数理的に捉える訓練として社会科授業を捉える立場である。数理的モデルによる社会認識は，社会問題の解決のために，現実社会に数理的モデルを当てはめ，社会問題の発生メカニズムを再現的に示し，説明することである。そのためには，どういう仕組みで社会事象が制御され，社会問題が発生しているのかを把握する訓練が必要である。

しかし，現実の社会は，無限の変数によって事象が生起しており，単純なモデルでは説明できない。こうした現実の複雑性を無視して，子どもに社会の説明を求めても，子どもは混乱するばかりである。結局，子どもの社会認識は表層的な社会説明に留まり，単純なモデルの把握すらできないで終わる。

こういう場合，やはり制御変数を少数にして，もっと説明しやすい単純な社会事象を子どもに提示し，子どもにモデルが見えやすくすべきである。また，モデルによる認識は，仮説的・実証的であるので，モデル獲得の脈絡は仮説・検証が反復するような体験的な文脈であるべきである。こうしたことから，適切な学習方法としてモデル獲得型のゲーミング・シミュレーションをあげることができる。

たとえば，図2で示されるモデルは，横浜国立大学経営学部が提供しているビジネスゲーム（YBG）の「ベーカリーゲーム」を制御しているビジネスモデルである。このゲームは，パン屋（ベーカリー）を経営するシミュレーション・ゲームである。プレイヤーは，パン屋経営の意思決定を行い，他のプレイヤーとともに形成する市場からの反応を経営結果として受ける。その結果を見ながら，次の意思決定を行っていく。

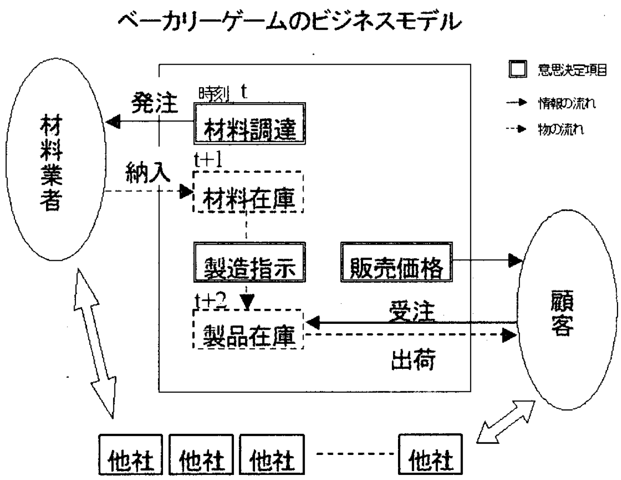


図2　ベーカリーゲームのビジネスモデル
（横浜国立大学経営学部，白井宏明氏提供）

プレイヤーの意思決定項目は，製品の販売価格，製品の製造数，そして材料の調達数の3つである。現実のパン屋の経営上の意思決定は多数に及び，こんなに単純ではない。しかし，モデルを現実に合わせて複雑化しても，ゲームが複雑になるだけで，プレイヤーが能力的に対応できなければ，ただあてずっぽうで意思決定を行うだけになる。ベーカリーゲームは，こうした点に配慮し，極めて単純なビジネスモデルによって構築されている。社会科授業を数理的モデルを把握する訓練として考えるならば，教育目的によってモデルの難易を設定したゲーミング・シミュレーションは有効である。

4.2 数理的モデル適用授業

数理的モデルを構築し社会に当てはめる授業は，社会科授業を数理的モデルを用いた問題解決の訓練として考える。ここでは社会問題を数理的な問題として解釈し，社会問題を説明する数理モデルを考案し，実際にシミュレートしてみて，問題の最適な解を求めていくという学習を行う。授業の実際では，必ずしも問題解決にまで至らなくても，社会問題を数理的モデルで説明でき，その発生メカニズムをシミュレートできればよいと考えられる。

こうした授業として，例えば，将来人口推計モデルを構築し，その推計シミュレーションから人口問題の解決策を考えるという授業が考えられる。巻末の添付資料は，その骨格となる人口推計モデルを高校生用に解説したものである（平成13年には，実際に，表計算ソフト EXCEL を用いて高校生に推計を行わせた）。

現在，社会科では，社会問題に対する子どもの意思決定能力を育成しようとする授業が脚光を浴び，子どもに様々な意思決定を行わせる傾向がある。しかし，子どもが十分な問題分析力や解決能力を持たないまま政策的課題に対して意思決定に走らせるのは，シミュレーションゲームであてずっぽうの意思決定を行う以上に問題だと思われる。ましてや，社会問題の淵源をすぐ価値葛藤に持って行き，価値観の対立図式で問題を設定するやり方は，共通理解の可能性や妥協による解決の方向性を妨げることになる。

数理的モデルはそれ自身価値中立的であるが，ある目的に依存するという意味では道具的であり，価値の拘束性を受ける。しかし，意思決定の結果を具体的に示すことができ，それを通しての相互批判は，安易に価値の対立として問題を解決不能なアポリアに遠ざけない。価値が対立するなら，その対立の中で相互に認めうる社会システムを構築していくべきである。数理的モデルはそうした社会形成を可能にするのであって，そのための思考方法を社会科授業で育てていくべきである。

5 おわりに

本小論は，社会科において数理教育を展開するために，社会科授業で形成を目指す数理的モデル認識に関して基礎的考察を加え，具体的な事例をあげながら授業開発のための基本スケッチを行った。

その内容を整理しておくと，次のようになる。

- モデルとは世界システムの論理数学的模型であり，われわれが世界を認識する際に，世界に当てはまめているものである。
- 問題解決として捉えられる社会認識においてモデルは指導的な働きをしており，社会

認識過程をモデルによる認識過程として捉えることができる。

- モデルが元来論理数学的な性格を持つことから，モデルは数理的である。数理的モデルは社会問題解決のシミュレーションを可能にし，具体的解決に寄与する。社会科授業では，数理的モデルによる社会認識を育成すべきである。
- 社会科授業を数理的モデル認識の訓練として捉えた場合，社会現象から数理的モデルを把握する授業と，数理的モデルを社会に適用する授業の２つが考えられる。

これらの考察を通して，数理的モデル認識を育成する新しい授業像を構築していく上で必要な論点を出し，具体的なプランを提示した。今後，これらのプランに基づいて行った授業実践について報告し，その成果を評価していきたい。

付　記

本稿は，平成15～16年度文部科学省科学研究費補助金特定領域研究(2)（領域名：新世紀型理数科系教育の展開研究），研究題目名「社会科及び社会系教科における数理教育の実践と評価」（研究代表者：福田正弘，課題番号：15020251）の研究成果の一部である。

文　献

福田正弘(2003).『社会科及び社会系教科における数理教育の可能性』，平成14年度科学研究費補助金特定領域研究(2)研究成果報告書.

福田正弘・山下英明(2003).「数理的思考を活用した歴史授業」『長崎大学教育学部紀要教科教育学』41号，pp.1-14.

岩永健司(1989).「社会認識過程における数量の機能―『山びこ学校』の場合―」，全国社会科教育学会『社会科研究』37，pp.125-135.

岩永健司(1992).「社会認識過程における数量の機能Ⅱ―『村の五年生』の場合―」，全国社会科教育学会『社会科研究』40，pp.53-62.

日本数理社会学会(2004).『社会を〈モデル〉でみる―数理社会学への招待―』，勁草書房.

巻末資料

1．将来人口推計モデル

1.1 将来推計の困難さ

推計＝既知のものから未知のものを知ること

我々にとって分かっていること：過去のデータと，そこから読み取れる傾向

↓

これをもとに，将来を推計

将来の姿＝過去のデータを（傾向）の方向に変化させた姿

例えば，人口が毎年１％ずつ増加しているなら，来年は今年の1%増しと推計できる。

しかし，この推計は，

（傾向）が過去のデータから見出されること

（傾向）が将来も継続することが保証されること

を前提にしている。社会の場合，両方とも怪しい？

例えば，１％の人口増加率は，実は少子化による減少分を，長寿化による増加分でカバーしたものだとしたら，長寿化が限界に行き着いたときには妥当しなくなる。

さて，どうして推計すればいいだろうか？少なくとも，全体の傾向がこうだから，次もこうだろうでは通用しない。

1.2 基本的な考え方

前年のデータを引き継ぐ漸化式の発想

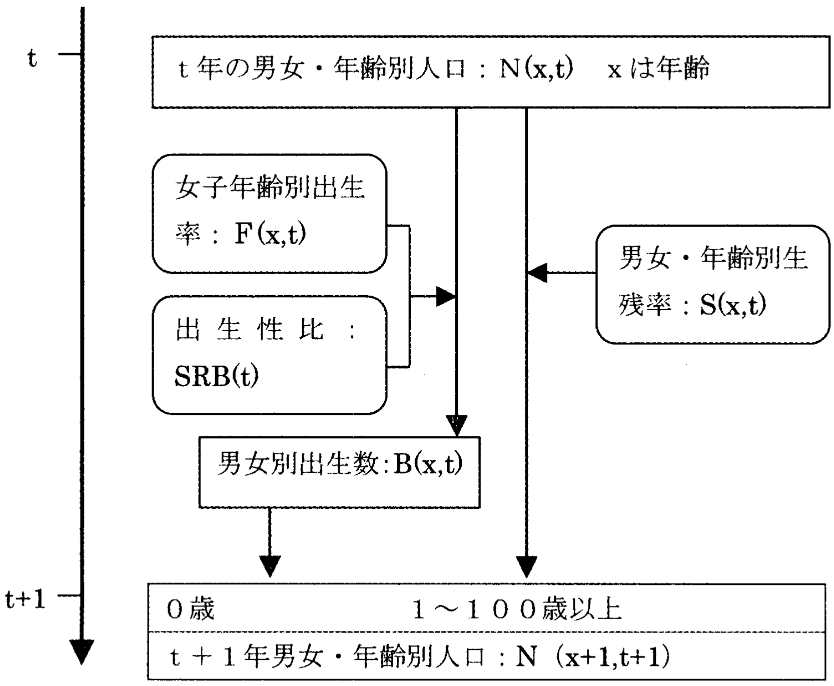
来年の人口＝今年の人口－来年の死亡者数＋来年の出生児数
＝来年の生残者数＋来年の出生児数
（海外移動は考慮しない）

来年の生残者数＝今年の生残者数×生残率
来年の出生児数＝今年の女子生残者数×出生率
ただし，生残率も出生率も年齢層によって異なる。
また，出生可能なのは女子だけなので，男女別データ，推計が必要。
↓
各年齢男女別に推計する必要。

1.3 コーホート要因法

年齢層を単位とする推計方法を，コーホート要因法という。

人口推計の手順



国立社会保障・人口問題研究所『日本の将来推計人口平成14年1月推計』2002年、厚生統計協会、p.8を一部簡略化

1.4 推計式

求める人口：任意の年次 t の総人口 TN(t)

男の総人口 TNm(t)

女の総人口 TN f (t)

x 歳の男の人口＝Nm(x,t)

x 歳の女の人口＝N f (x,t)

x 歳の人口＝N(x,t)

$$TN(t)=TNm(t)+TNf(t)$$
$$=\sum_{X=0} Nm(x,t)+\sum_{X=0} Nf(x,t)$$
$$=Nm(0,t)+\sum_{X=1} Nm(x,t)+Nf(0,t)+\sum_{X=1} Nf(x,t)$$

t 年度の出生児数

年齢別出生率＝F(x,t)

出産可能なのは15－49歳の女性

$$N(0,t)=\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}=Nm(0,t)+Nf(0,t)$$

男児出生性比＝SRBm(t)　女児出生性比＝SRB f (t)

男児出生数 $Nm(0,t)=SRBm(t)*N(0,t)$

$$=SRBm(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}$$

女児出生数 $Nf(0,t)=SRBf(t)*N(0,t)$

$$=SRBf(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}$$

生残人口

男子年齢別生残率＝Sm(x, t)　　女子年齢別生残率＝Sf(x,t)

男子生残人口 $\sum_{X=1} Nm(x,t)=\sum_{X=1}\{Nm(x-1,t-1)*Sm(x-1,t-1)\}$

女子生残人口 $\sum_{X=1} Nf(x,t)=\sum_{X=1}\{Nf(x-1,t-1)*Sf(x-1,t-1)\}$

よって，

$$TNm(t)=SRBm(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}+\sum_{X=1}\{Nm(x-1,t-1)*Sm(x-1,t-1)\}$$

$$TNf(t)=SRBf(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}+\sum_{X=1}\{Nf(x-1,t-1)*Sf(x-1,t-1)\}$$

ゆえに，

$$TN(t)=TNm(t)+TNf(t)$$

$$=SRBm(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}+\sum_{X=1}\{Nm(x-1,t-1)*Sm(x-1,t-1)\}$$

$$+SRBf(t)*\sum_{X=15}^{49}\{Nf(x,t)*F(x,t)\}+\sum_{X=1}\{Nf(x-1,t-1)*Sf(x-1,t-1)\}$$