

花火の運動のコンピューターシミュレーション による3次元表現

福山 豊*・大原里絵*・菅野優美*

(平成10年3月13日受理)

3-D Expressions of Fireworks by Computer Simulation

Yutaka FUKUYAMA, Rie OHARA and Yumi KANNO

(Received, March 13, 1998)

1. はじめに

長野の冬季オリンピックの閉会式は、5000発の花火で、会場にいた選手たちとともに、テレビの前の多くの人々に、日本の花火の美しさを堪能させ、感動のなかで終了した。このとき打ち上げられた花火の多くは、割物と呼ばれ、玉皮の内側沿いに球形に星を並べ、内部に詰め込んだ割り薬に火をつけて、強い力で破裂させ、点火した星が四方八方に飛び散ることで球形の花を咲かせるように作られている。ところで、このような花火の運動は、力学の問題としてどのように取り扱う事ができるだろうか。力学の教科書は、かなりの記述が、その運動方程式が解析的に解ける運動に費やされているため、学生の中には、解析的に解けない、空気抵抗を受ける花火運動などは、力学では取り扱えないのではないかと考えているものもある。そこで、学生たちに、たとえ運動方程式が解析的に解けなくても、初期条件が与えられれば、その後の速度と位置が求められ、運動方程式の解が求められることを体験させることは、力学教育のなかで極めて重要であると考えられる。このようなテーマを、力学の教材として、取り上げることができるようになったのは、コンピューターを利用した簡単な言語による数値計算と、この結果をグラフィックスとして視覚化することが可能になったためである。解析解を求める学習に加えて、このような数値計算を具体的におこなって解を求める方法は、力学の重要な学習方法となると思われる。

この論文の目的は、夜空で開く一見複雑そうに見える花火の運動の様子を理解するために、割物から飛び出す星の運動方程式をコンピューターによる数値計算によって解き、それぞれの星の軌跡を描かせることによって、いろいろな花火の形を描き出す力学教材の開発を試みることにある。

力学の例題としての花火のコンピューターによる表現は、高校生など物理の初習者のため、通常、二次元(平面)の運動として表され、四方に等間隔で飛び出す星の運動の軌跡で表されている¹⁾³⁾。そのため、描かれた花火の表現は立体感を欠いていて不自然な形となっている。しかも、このとき星に働く空気抵抗は無視されているので、星には重力のみが働

*長崎大学教育学部理科教室

き、わざわざ、運動方程式を数値計算するまでもなく、解析解が求められている。そこで我々は、より現実的な花火の運動を表現するために、速度の二乗に比例した空気の抵抗を考慮した三次元の花火の運動を考察することにした。この場合の運動方程式は、解析解が無いことが知られているのでコンピューターにより数値計算を行い、ディスプレイの画面にグラフィックスとして描かせることにした。

2. 花火の運動方程式

花火の運動を記述する座標系を、 x 軸を右側横軸、 y 軸を鉛直上方、 z 軸を手前側にする。このとき花火の星の運動方程式の x , y , z 成分は、速度の二乗 v^2 に比例した空気の抵抗を考慮すると

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\beta v v_x \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v v_y \quad (2)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\beta v v_z \quad (3)$$

と表される。

ここで m は星の質量、 g は重力加速度、 β は空気抵抗の係数とする。また、速度の大きさ v は、

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (4)$$

の関係がある。

(1) ~ (3) 式に記述している速度の二乗に比例する空気抵抗の係数 β は、星の半径を r と表すと経験式として

$$\beta = 0.87r^2 \quad (5)$$

と表される⁴⁾。そのため星の燃焼とともに β は減少することとなる。しかし、この運動に寄与するのは β を $m (= 4\pi\rho r^3/3; \rho$ は星の密度) で割った値 k 、すなわち、

$$k = \beta/m \\ = 0.21/r \quad (6)$$

であり、星の燃焼とともに増加することがわかる。この変化は、花火の運動の詳細を考察するために無視できないことがらであるが、今回の花火の三次元表現においては、花火の運動の特徴的な形に大きな違いは生じないと考えて、 r が一定の値 ($\sim 0.01\text{m}$) で近似し、多くの場合、この近似による値 $k \sim 0.02$ を用いて計算を行った。星の質量の時間変化も今回は無視して計算した。 k の r 依存性や質量の時間による減少の効果を考慮したより精密な計算による報告書を現在準備中である。

以上の考察から、今回の花火の運動方程式 (1) ~ (3) は、

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v v_x \quad (7)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - k v v_y \quad (8)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -k v v_z \quad (9)$$

と表すことができると仮定する。ただし、ここで k は定数とする。

3. 数値計算法

これらの運動方程式は、解析的には解が求められないことが知られているため、数値計算を行う事になるが、今回は定量的な比較を行う訳ではないので、一番簡単なオイラー法を用いることにする。

オイラー法は、与えられた微分方程式が

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (10)$$

であるとき、 $t = t_n$ における x の値を x_n 、 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における x_n の値を x_{n+1} とすると

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{dx}{dt} \Delta t \\ &= x_n + f(t_n, x_n) \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

と近似する計算法である。

初期条件として、 $t = t_0$ のとき、 $x = x_0$ が与えられているとすると

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + f(t_0, x_0) \Delta t \\ x_2 &= x_1 + f(t_1, x_1) \Delta t \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(t_{n-1}, x_{n-1}) \Delta t \end{aligned} \quad (12)$$

と順次 x の値を求めて行くことができる。

そこで、花火の星の運動方程式を、オイラー法で、実際に解くためには、各々の星の速度と位置の初期値が必要となる。次にその問題を検討する。

4. 飛び出す星の位置と速度の初期値の決定

通常、花火玉の破裂は、打ち上げた後、ほぼ頂点に達したときに起こるように考慮して作られていることが多いので、この頂点の位置を座標の原点とし、飛び出す星の位置の初期値は、

$$x = 0, y = 0, z = 0 \quad (13)$$

ととることにする。

次に、速度の初期値を決めることが必要となる。二次元の花火のグラフィックスの場合は、平面的に一様な角度の割合で飛び出すと見なせばよく、360度を飛び出す星の数で割れば、その値の整数倍の角度が飛び出す方向と考えられ簡単に初速度の値を決定することができるが、三次元の花火のグラフィックスは、そのようには簡単に決定できない。

星の飛び出す速度の大きさ v_0 はすべての星で一定と考えるとして、四方八方へ一様に飛び出すときのそれぞれの星の角度を、どのような値にするかが明らかではない。そこで、我々は、実際の花火の玉皮に星を詰める様子を再現し、次のようにして星の飛び出す角度の決定を試みた。

半径20cm程の結晶解析で用いる透明な半球の内側に、紙粘土を薄く張り付け、その上か

らビー玉を隙間なく並べて押し付けた。その結果、ビー玉を押し付けて粘土が押しつけられた場所を、半球の外側から印を付け、その点が星が飛び出す方向を決めるの緯度と経度に相当する角度（正確には極座標の θ と ϕ の角度）と見なした。すなわち、半球によってできる球の中心とその点を含む断面を、座標軸の原点と x - y 面ととり、それに直角に z 軸をとると、 θ は半球上の点を極座標で表したときの z 軸となす角であり、 ϕ はその点を x - y 面に射影したときの x 軸となす角を表す。具体的な数値は、ビー玉の位置の印を付けた透明な半球を、 θ と ϕ を読み取ることでできる結晶儀に被せて読み取った。この値をもとに、ビー玉に見立てたそれぞれの星の初速度は、それぞれの θ と ϕ のデータを用いて

$$\begin{aligned}v_{0x} &= v_0 \sin \theta \cos \phi \\v_{0y} &= v_0 \sin \theta \sin \phi \\v_{0z} &= v_0 \cos \theta\end{aligned}\tag{14}$$

で決定した。

5. BASIC言語による計算

ここでは、一番簡単なプログラム言語であるBASIC言語⁵⁾を用いて計算とグラフィックスを描かせてみた。今回の計算で花火の形を決める変数は、基本的には、初速度 v_0 、質量で割った空気抵抗係数 k 、星の燃焼時間 T の3つであるが、花火の色の変化や点灯点滅を考慮して、いろいろな色の花火を描かせることができる。また、親星の内側に芯星を入れて芯入、八重芯、三重芯などの日本の得意な花火については、それぞれの花火を重ねて描くことによって表現することができる。今回は、花火の写真⁶⁻⁹⁾を参考に数種類の花火をグラフィックスとして描かせてみた。ディスプレイ上のグラフィックスにおける花火は、今回は、その形や種類を優先させたため、花火の大きさはWINDOW文で適当に調節し、なるべくディスプレイ上に大きく描かせることにしたので、以下で示す写真間の花火の相対的な大きさは比較することはできない。

今回計算に用いた一番基本となるプログラム（DATAは省略）を付録に示した。写真1には、この結果を示している。ここでは、 $v_0 = 60 \text{ m/s}$ 、 $k = 0.02 \text{ m}$ 、 $T = 4 \text{ s}$ で花火の色を緑とした牡丹を表現した。以後、 v_0 、 k 、 T の値は省略するが、同様にして、写真2には、赤い芯入りの冠菊を、写真3には変化菊、写真4には変芯変化菊、写真5には芯入り牡丹、写真6には点滅する花火の形を示した。

以上のように、割物の花火の運動を、地上で無視できない空気抵抗を考慮し、力学の問題として数値計算による三次元的表現を試みた。これらの写真は、実際の花火を撮った対応する写真の特徴をよく表しているとみなすことができる。これらの試みから、花火の運動の教材は、一見複雑そうに見えるが、力学の基本概念を忠実に表現し、それを元に簡単なプログラムを学ぶ練習ともなる、力学の学習に面白いテーマを提供してくれる優れた教材と考える事ができる。このような教材の更なる開発が望まれる。また、空気の抵抗のより詳細な考察は、花火の運動の詳しい定性的な運動の様子を理解することができるが、この問題については現在考察中であり、別の機会に報告したい。

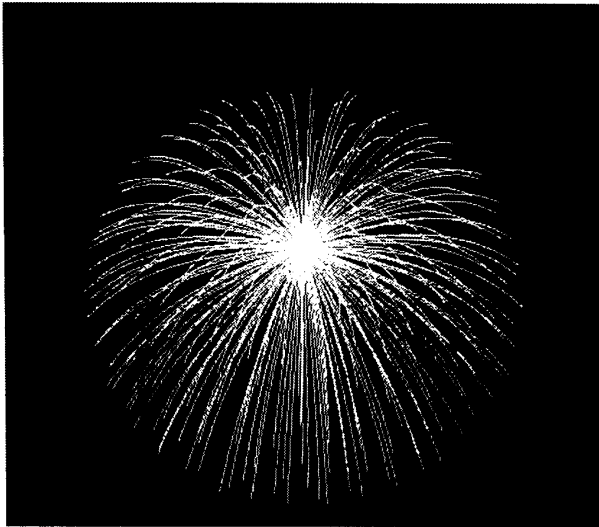


写真1 緑牡丹

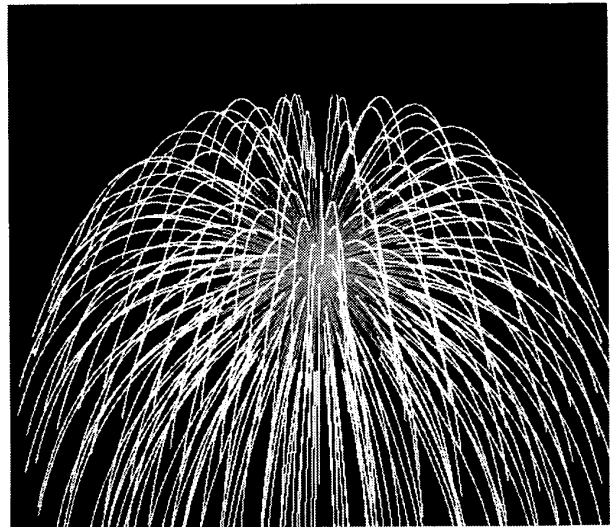


写真2 赤芯入り冠菊

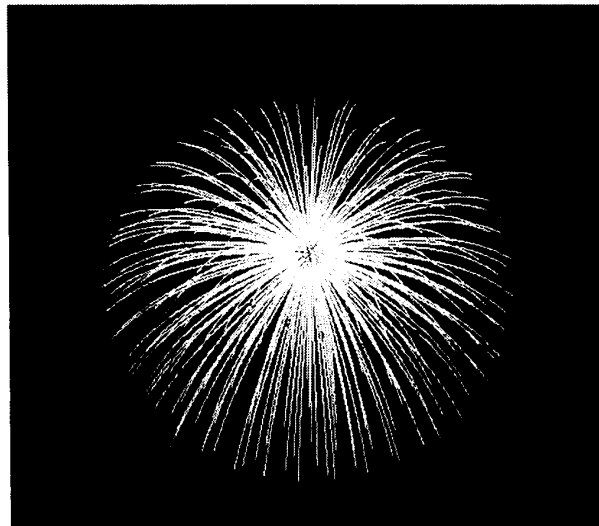


写真3 変化菊

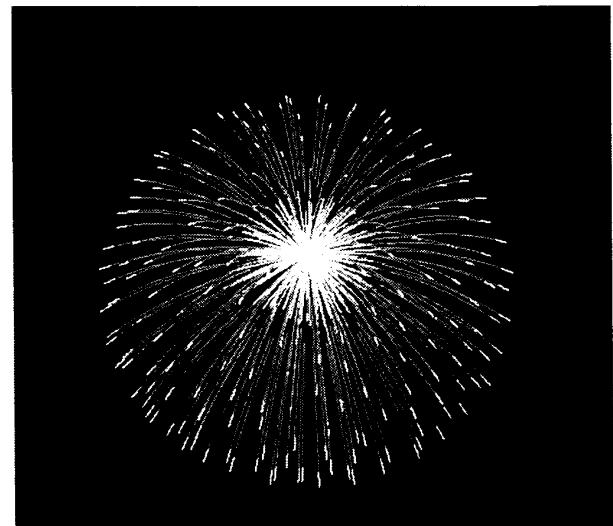


写真4 変芯変化菊

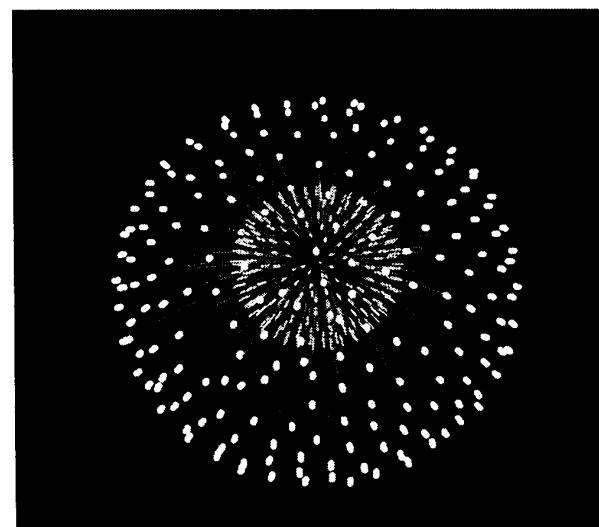


写真5 芯入り牡丹

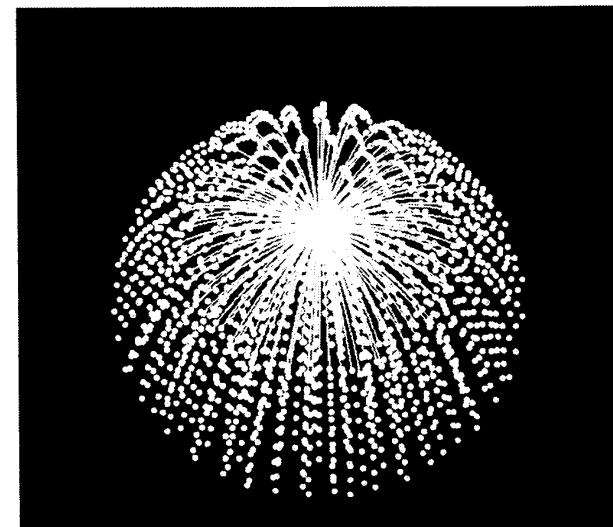


写真6 点滅する花火

付録 プログラム

```

100 ' HANABI1A
110 '
120     SCREEN 3,0
130     WIDTH 80,25
140     CONSOLE 0,25,0,1
150     CLS 3
160 '
170     PI=3.14159
180     G=9.8
190     DT= .02
200     V=60
210     K=.02
220     N=120
230     COL=4
240 '
250     WINDOW(-120,-60)-(120,90)
260 '
270     READ A,B
280     WHILE A<>-999
290     TH=5*A :FI=B
300         VZ = V*COS(PI*TH/180)
310         VX = V*SIN(PI*TH/180)*COS(PI*FI/180)
320         VY = V*SIN(PI*TH/180)*SIN(PI*FI/180)
330         X =0
340         Y =0
350         Z =0
360     FOR C= 0 TO N
370         IF C=0 THEN PSET(X,-Y),COL ELSE LINE-(X,-Y),COL
380         X=X+VX*DT
390         Y=Y+VY*DT
400         Z=Z+VZ*DT
410         AX=-K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VX
420         AY=-G-K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VY
430         AZ=-K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VZ
440         VX=VX+AX*DT
450         VY=VY+AY*DT
460         VZ=VZ+AZ*DT
470     NEXT C
480     READ A,B
490     WEND

```

参考文献

- 1) 吉沢純夫：パソコンで見る物理シミュレーション（森北出版，1990）19
- 2) 岡田利男，川田重夫：シミュレーション物理学3 力学（近代科学社，1991）44
- 3) 吉沢純夫：力学シミュレーション入門（CQ出版社，1998）51
- 4) A.P.フレンチ（橘高知義監訳）：MIT物理 力学（培風館，1983）68
- 5) 例えば，河西朝雄：入門ソフトウェアシリーズ3 BASIC（ナツメ社，1991）
- 6) 武藤輝彦，小野里公成，川上信定：花火大会に行こう（新潮社，1997）
- 7) 丸玉屋・丸玉屋小勝煙火店監修：花火うかれ（日本交通公社，1994）
- 8) 毎日新聞社編，丸玉屋監修：花火満天（CD-ROM版）（毎日新聞社，1996）
- 9) 武藤輝彦，小野里公成：ドン！と花火だ（三空出版，1994）