長崎大学教育学部－社会科学論叢－　第58号　43～50（1999）

レオンティェフ体系における
有効生産と労働価値

永　田　聖　二

Efficient Production and Labour Value in Leontief System

Seiji Nagata

1. はじめに

生産活動をおこなうときに，おなじ労力を投下してもすくない生産物しか産出できなかったり，あるいは，同一の生産物をえるためにおおくの労働を必要とするときには，これら双方のケースは，ともに，非効率的な生産活動であるといえよう。そのため，アクティヴィティ分析では，このような非効率的な生産活動を排除して，効率的な生産活動だけに限定して分析をすすめるのが常套手段となっている。そのさい，生産活動にかんする効率性の判定規準として採用されている概念が有効生産である。

本稿では，有効生産の定義をレオンティェフ体系に適用して，その経済上の意味を検討したのち，この定義を線形計画の最適化問題に読み替えて，その双対問題を導きだす。そして，そのことをつうじて，シャドウ・プライスとして有効生産を誘導する価格体系が，じつは，労働価値ベクトルにほかならないことを示す。また，検討の過程の副産物として，このベクトルが，経済全体からみて利潤最大化をもたらす価格でさえもあることが判明する。

2. レオンティェフ体系における有効生産

つぎのようなレオンティェフ体系をかんがえる。

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f},$$

$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}=L.$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{A}$ とは，それぞれ，単位行列と投入係数行列，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{a}_0$は，順に，産出量，最終生産物，労働投入係数をあらわすベクトルであるとする。また，この経済全体にかんする労働投入の総量を記号Lで表記する。これを線形計画問題のかたちで表現すれば，

$$\min \quad \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{x} \geqq 0,$$

になる。そうすると，この問題の双対は，

$$\max\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{f}$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \leqq \boldsymbol{a}_0,\quad \boldsymbol{v} \geqq 0\,,$$

であり，その解$\boldsymbol{v}$が労働価値ベクトルになることは，ひろく知られている[1]。じっさい，

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}$$

をみたす非負解$\boldsymbol{x}^{\circ} \geqq 0$の存在は，同時に，方程式

$$\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ =\boldsymbol{a}_0$$

の非負解$\boldsymbol{v}^{\circ} \geqq 0$の存在を保証するので，けっきょく，これらの最適化問題の制約式をみたす任意の実行可能解$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{v}$にたいして，それぞれ，

$$\boldsymbol{v}^{\circ}\boldsymbol{f}\ =\boldsymbol{v}^{\circ}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}^{\circ}=\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}^{\circ}\ \geqq \boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}^{\circ}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\,,$$
$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}^{\circ}=\boldsymbol{v}^{\circ}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}^{\circ}=\boldsymbol{v}^{\circ}\boldsymbol{f}\ \leqq \boldsymbol{v}^{\circ}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}\ =\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}$$

が成り立ち，その結果，$\boldsymbol{v}^{\circ}$，$\boldsymbol{x}^{\circ}$が，対応する線形計画問題の最適解であることがわかる。

このようなレオンティェフ体系では，投入と産出の組み合わせとしてもたらされる生産活動の可能な結果を，各産業から構成される基本アクティヴィティの稼動状況として，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

のかたちで，プラスの符号がついた最終生産物ベクトルとマイナスの符号をもつ投下労働量の組として表現できる。そこで，以下では，このようなアクティヴィティの稼動がもたらす可能な結果全体の集合をかんがえることにする。このとき，生産にかんする効率性の要請から，効率的な生産活動を代表する添字記号としてアステリスク＊を採用すれば，この効率的な生産活動と比較したとき，けっして，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix}^{*}$$

をみたす生産活動が存在してはいけない。これが，レオンティェフ体系での有効生産の定義になる[2]。いいかえれば，生産活動が有効であるためには，ほかに，すくなくとも同一の産出量水準を保証したうえで投下労働量がすくない活動が存在してはいけないし，また，投下労働量をおなじ水準以内に保ったまま，よりおおく産出する活動が存在してもいけない。以下では，有効生産の定義をみたす生産活動を効率的であると表現しよう。

有効生産にかんするこの定義は，否定文の型式をとるので，いくぶん，つかいづらい。そこで，それと同値な条件文の型式で表現してみよう。すなわち，技術的に許容されるどんな生産活動にたいしても，

$$\boldsymbol{I}_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \geqq \boldsymbol{I}_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix}^{*} \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{e}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix}^{*}$$

---

1)　たとえば，森嶋［5］，あるいは，塩沢［15］参照。また，永田［7］，［8］もみよ。

2)　アクティヴィティ分析や有効生産の定義については，たとえば，Gale［1］，Koopmans［2］，Lancaster［3］，二階堂［14］，あるいは，水野［4］参照。

が成り立つとき，アステリスクのついた記号で代表される生産活動は効率的である[3)]。ただし，行列$\boldsymbol{I}_{-i}$は，単位行列$\boldsymbol{I}$の第i行をゼロベクトルで置き換えた，$n+1$次の行列をあらわし，また，この置き換えられたもとの$n+1$次ベクトルは記号$\boldsymbol{e}_i$で表記されるものとする。したがって，$\boldsymbol{e}_i$は，第i成分だけが1で，のこりはすべて0からなるベクトルを意味する。このベクトルは，しばしば，第i単位ベクトルとよばれることもある。そこで，この記法を利用すれば，

$$I_{-i}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{e}_{i-1} \\ 0 \\ \boldsymbol{e}_{i+1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{e}_{n+1} \end{pmatrix}$$

とあらわせる。

3. 有効生産と最適化問題

前節で同値な条件式のかたちであらわされた有効生産の性質を，こんどは，最適化問題としてとらえ直してみよう。はじめに，この条件式にあらわれる生産活動が，技術的に許容されるものに限定されることから，この要件は

$$\boldsymbol{I}_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{I}_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -L \end{pmatrix}^* \Rightarrow \boldsymbol{e}_i\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{e}_i\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^*$$

になることに注目しよう。

そうすると，この要請は，生産物にかんする条件（$1 \leqq i \leqq n$）と労働力に関係するそれ（$i=n+1$）との，ふたつのケースに分類できる。これらふたつの条件が同時にみたされて，はじめて生産の効率性が保証されるわけである。このうち，はじめのケースでは，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{-i}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^*_{-i} \\ -L^* \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^*$$

であるから，けっきょく，有効生産にかんする第1の条件をみたす産出量ベクトルは，

3） じっさい，生産活動が効率的であるとしよう。このとき，かりに，

$$I_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -L \end{pmatrix} \geqq \boldsymbol{I}_{-i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -L \end{pmatrix}^* \text{ かつ } \boldsymbol{e}_i\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -L \end{pmatrix} > \boldsymbol{e}_i\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ -L \end{pmatrix}^*$$

をみたす生産活動が存在するとしたら有効生産の定義に矛盾する。ぎゃくに，後者の条件文が成り立つとき，生産活動が効率的でないとすれば，ふたたび，矛盾が導かれることは，あきらかであろう。

$$\max\ e_i(I-A)x$$
$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix} -I_{-i}\,(I-A) \\ a_0 \end{pmatrix} x \leqq \begin{pmatrix} -f^*_{-i} \\ L^* \end{pmatrix},\quad x \geqq 0$$

というかたちであらわされる最適化問題の解として求められる。ここで，前節と同様に，添字$-i$と$*$は，それぞれ，第i行をゼロベクトルで置き換えた行列ないしベクトルと，効率的な生産活動を代表する指標とを意味するものとする。ただし，この式にあらわれる行列ないしベクトルの次数はn次であることに注意せよ。この最適化問題の経済上の意味は，ほかのすべての生産物の純生産を，効率的な生産水準のそれと比較して，すくなくとも同等以上確保して，同時に，後者が必要とする水準以内に労働投入量を制限したまま，ひとつの生産物の純生産を最大化しようとするこころみを表現している。

いっぽう，労働力に関係する，のこされたケースは，

$$(I-A)x \geqq f^* \Rightarrow a_0 x \geqq a_0 x^*$$

という条件式なので，これを最適化問題の形式に表現しなおせば，

$$\min\ a_0 x$$
$$\text{s.t.}\ (I-A)x \geqq f^*,\quad x \geqq 0,$$

になるが，これは，事実上，前節で紹介した，レオンティェフ体系にかんする最適化問題そのものにほかならない。どの生産物にかんしても，すくなくとも効率的な生産活動がもたらす水準以上に，純生産物を確保したうえで，経済全体からみた投下労働量を最小化しようとする問題が，その経済的意味づけになる。

4. 有効生産と労働価値

前節では，有効生産と同値な条件を，生産物にかんする条件と投下労働量に関係するそれとして，ふたつのパートにわけたうえで，それぞれを最適化問題の形式で表現しなおした。その結果，これらの変換された最適化問題のうち，後者は，事実上，レオンティェフ体系の線形計画バージョンにほかならないことが判明した。したがって，この後者の問題の双対は，

$$\max\ vf^*$$
$$\text{s.t.}\ v(I-A) \leqq a_0,\quad v \geqq 0$$

になるから，双対問題の最適解が労働価値ベクトルにほかならないことも，あきらかであろう。すなわち，有効生産を保証するために必要な労働がわの条件は，生産活動を誘導するシグナルの役割をはたす価格として，労働価値ベクトルを採用することにより，自動的にみたされる。

それでは，のこされた生産物がわの効率性を代表する線形計画問題については，どうであろうか。このばあいも，双対問題を検討することにより，じつは，解決のカギは，事実上，労働価値ベクトルの採否にあることが判明する。したがって，有効生産かんする問題は，すべて，ガイド・プライスとして労働価値ベクトルを採用することによって解決可能である。このことは，宇野のいう「経済原則」に相当する，あらゆる社会に共通な労働・生

産過程が，社会的な分業をつうじた効率的な労働編成システムとして，労働価値ベクトルという生産物にかんするひとつの評価指標の背後に，存在することを想起させる[4)]。

ともあれ，生産物にかんする効率化の要請をあらわす線形計画問題は，

$$\max\ \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} -\boldsymbol{I}_{-i}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leqq \begin{pmatrix} -\boldsymbol{f}^*_{-i} \\ L^* \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$$

であるから，これに対応する双対問題は，

$$\min\ -\boldsymbol{p}_{-i}\boldsymbol{f}^*_{-i} + wL^*$$

$$\text{s.t.}\quad [\boldsymbol{p}_{-i}\quad w] \begin{pmatrix} -\boldsymbol{I}_{-i}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix} \geqq \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

になる。ここで，生産物価格のニュメレールとして第$\boldsymbol{i}$生産物を採用すれば

$$p_i = 1$$

になるが，このとき，

$$p_i f^*_i = f^*_i$$

が定数であることに注意して，制約条件を整理すれば，この問題の解は，目的関数の値をのぞいて，

$$\max\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{f}^* - wL^*$$

$$\text{s.t.}\quad [\boldsymbol{p}\quad w] \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{0}$$

という問題の解と完全に一致する。

このような解集合どうしの一致は，生産物にかんする効率性の要求が，経済全体からみた利潤最大化をもたらす価格体系に誘導されるときに，みたされることを意味する。この結果をみて，私的企業の利潤最大化行動を，経済に効率性の規準を自動的にもたらすものとして，積極的に擁護する見解が，短絡的に，表明されうるかのようにおもいがちであるが，それは早計である。一般に，線形経済モデルでは，体系内でうみだされる利潤もまた線形性をたもつので，正の利潤が存在するかぎり，最大利潤問題には最適解が存在しない。事実，この双対問題でも，制約条件をよくみれば，実行可能解がもたらす利潤は非正であることがわかる。その結果，最適解は，ゼロ利潤をもたらす価格体系になるにすぎない。この問題は，経済活動を遂行して発生した付加価値以上の報酬を，生産活動に従事した労働者に保障したうえで，経済全体の付加価値をマイナスにはしないような価格づけを提案しているのにすぎない。そもそも，資本の価値増殖運動を人格的に代表するにすぎない資本家が，いったい，このような酔狂な提案を提示することがあるであろうか。かりに，いたとしても，かれは，資本家として失格の烙印を押され，資本の競争のなかから脱落していくであろう。

---

4)　価値論と労働・生産過程とのかかわりあいや「経済原則」については，宇野［16］参照。

事実は，そのような性急すぎる解釈の対局にある。労働者に最大限の保障を約束したうえで，経済全体からみて，約束の履行が確実に遂行されるように，支払い超過をさけるような誘導価格が必要とされるのであるが，じつは，そのような価格体系は，事実上，労働価値ベクトルなのである。というのも，この双対問題のヴァリアントを，ふたたび，同値な表現として，変形するために，価格体系を賃金単位の形式で表現しよう。すなわち，価格や賃金率を，ともに，賃金率 w でわり，賃金単位ではかった価格ベクトルと賃金率との組みあわせを，記号

$$[\boldsymbol{p}_w \quad 1]$$

であらわせば，双対問題の解集合は，

$$\max\ \boldsymbol{p}_w \boldsymbol{f}^* - L^*$$
$$\text{s.t.}\quad [\boldsymbol{p}_w \quad 1]\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{0}$$

のそれと一致するが，L^* が定数であることに注意すれば，それは，さらに，

$$\max\ \boldsymbol{p}_w \boldsymbol{f}^*$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{p}_w(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \leqq \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{p}_w \geqq \boldsymbol{0}$$

という問題の解集合と，正確に，一致することがわかるであろう。けっきょく，この問題は，労働価値体系の線形計画バージョンにすぎない。したがって，

$$\boldsymbol{p}_w = \boldsymbol{v}$$

が成立する。

以上，有効生産を保証する条件として，生産物にかんする条件と，労働に関係するそれとに大別し，それぞれ，それらの内容を検討してきたが，けっきょく，この両者をともにみたす価格システムは，じつは，労働価値ベクトルに帰着することが示された。労働価値ベクトルこそ，経済の効率的な生産を誘導する価格なのである。

5. おわりに

これまでみてきたように，物的に，あるいは，労力からみて，ムダな投入を排除するような効率的な生産活動を誘導するためには，シグナルとなるような価格システムとして，労働価値ベクトルを採用しさえすればよい。この結果は，べつに，驚嘆に値すべきほどのものではない。レオンティェフ体系を線形計画の用語に翻訳して，所望の純生産物を産出するのに最小の労力しか投入しない問題に定式化したとき，その双対として導出されるのが労働価値体系なのだからである。社会的にみて，物的生産の効率的な編成問題の背後には，その生産に必要な労働力の適正な配分が，かならず，対応して存在しているのは，直感的にも，もっともなことであろう。レオンティェフ体系では，そのような物的・労力的資源配分の効率性の双方を，同時に満足する方向に誘導する指標こそ，労働価値ベクトルにほかならない[5)]。

---

5) このように，価値体系は，レオンティェフ体系の双対にすぎない。したがって，森嶋 [5] のように，労働価値ベクトルを単純商品生産社会の均衡価格として理解するのは，いささか，勇み足であるように思える。このことについては，Nagata [6] 参照。

なお，技術の代替をみとめない単純なレオンティェフ体系では，このシステムに存在する唯一の技術体系を反映したアクティヴィティを利用してえられる実行可能解は，すべて，効率的になるので，これまでの議論は，やや，時間と労力を浪費する非効率的な活動の一例ともおもえるかもしれない。ところが，たとえ，レオンティェフ体系に，複数の代替的な技術の存在を認めたとしても，それらの技術に，資本にとって，利用可能性の上限が設定されていないかぎり，採用される技術は，通常，ただひとつであることが，産業連関分析の非代替定理として，ひろく知られている。したがって，このケースでは，問題は，唯一の技術しか存在しない単純なレオンティェフ体系に帰着する。いっぽう，生産条件の相違が自然的条件の差異などに起因していれば，利用可能性には上限が設定されることになる。このとき，優等な生産条件の利用可能性を超えて，生産物にたいする需要が高まれば，利用されている最劣等な条件と比較して，優等な条件を提供しているものには，差額地代が生じることになる。これらの事情の詳細は，別稿にゆずる[6)]。

6）技術の代替と非代替定理については，永田［9］を，また，差額地代と労働価値の問題にかんしては，永田［9］～［13］，を参照。

参考文献

[1] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, MacGraw-Hill, 1960；(和田貞夫，山谷恵俊訳『線型経済学』紀伊国屋書店，1964年)。

[2] Koopmans, T.C.(ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Yale U.P., 1951.

[3] Lancaster, K., *Mathematical Economics*, Macmillan, 1968；(時子山和彦，鈴村興太郎訳『数理経済学』好学社，1971年)。

[4] 水野正一『線型経済学』春秋社，1959年。

[5] Morishima, M., *Marx's Economics: A Dual Theory of Value and Growth*, Cambridge U.P., 1973；(高須賀義博訳『マルクスの経済学―価値と成長の二重の理論―』東洋経済新報社，1974年)。

[6] Nagata, S., Role of Demand in Leontief-Sraffa System：Focusing Attention on the Duality between Quantity System and Value System, 九州大学『経済論究』第64号，1986年。

[7] 永田聖二「安定行列と価格―Leontief-Sraffa体系における価格の収束性―」，九州大学『経済学研究』第52巻第6号，1987年。

[8] 永田聖二「スラッファ理論の構造」(時政　勗，山下正毅編著『現代マクロ経済学―その基礎と展開―』第12章)，中央経済社，1991年。

[9] 永田聖二「レオンティェフ体系における差額地代と労働価値」長崎大学教育学部『社会科学論叢』第51号，1996年。

[10] 永田聖二「レオンティェフ体系における「虚偽の社会的価値」」『九州経済学会年報』第35集，1997年。

[11] 永田聖二「レオンティェフ体系における生産物地代と貨幣地代」長崎大学教育学部『社会科学論叢』第55号，1998年。

[12] 永田聖二「レオンティェフ体系における生産物地代と投下労働」長崎大学教育学部『社会科学論叢』第56号，1998年。

[13] 永田聖二「レオンティェフ体系における生産物地代と「虚偽の社会的価値」」『九州経済学会年報』第36集，1998年。

[14] 二階堂副包『経済のための線型数学』培風館，1961年。

[15] 塩沢由典『数理経済学の基礎』朝倉書店，1981年。

[16] 宇野弘蔵『経済原論』(岩波全書版) 岩波書店，1964年。