長崎大学教育学部社会科学論叢　第65号　（2004年）

ワルラシアン・オファー・カーブと複数均衡

永　田　聖　二

Walrasian Offer Curve and Multiple Equilibria

Seiji NAGATA

1．はじめに

現代の一般均衡理論の礎となる経済モデルを築きあげたワルラスは、かれの経済観を表現するもっとも基本的なモデルとして、生産活動を欠いた2商品交換モデルを採用した。すなわち、ワルラスによれば、

「生産物であるという事情を、もっとあとで考察するために捨象し、市場で交換される商品だけを考えて、自由競争の下にそれらの商品の数量とそれらの価格との間に存在する関係を研究する。…それは交換の数学的理論の対象をなし、厳密にはつぎのように表現されうる。すなわち、商品の数量が与えられるとき、それらの商品の価格を根とする方程式の体系を定式化することである。」[1)]

また、

「任意の数の商品相互間の交換を研究するに先立って、2商品の交換を研究せねばならない。その上、価値尺度財と貨幣の導入によって、多数商品の交換の場合は部分的に2商品交換の場合に還元されることが確実である」[2)]

という表現で、基本モデルの性質は、多数財モデルに拡張するさい、たとえ体系内に貨幣が導入されてさえも、なお、いぜんとして保持されるという、今日ではいわゆる「貨幣ベール観」とよばれる内容さえ主張している。

本稿では、ワルラスの主著である[21]や[22]に示されている経済観にもとづいて、生産活動を欠いた、2商品の純粋交換モデルを検討する。そのさい、かれの前提となる経済観が供給を需要の鏡像とみなすことに根ざしていることに注目して、価格の単調減数関数としての需要量と、等価交換の条件をみたすためにその対価として提供すべき供給量とのあいだの関係を、国際貿易論でひろく利用されているオファー・カーブの用語に変換して、表現する。そして、導出されたオファー・カーブを利用して、複数均衡解の存在問題を再検討する。

---

1)　Walras[21]訳書7ページ。

2)　Walras[21]訳書9ページ。

なお、永田[14]では、ワルラス自身の表現を尊重して、通常の価格 - 数量軸上に[3]、需要の鏡像として導かれた単調減少な部分をもとりうる供給曲線と、相手がわの単調減少な需要曲線とのあいだのバランスというかたちで問題設定をおこなった。ところが、ワルラスに忠実にしたがうよりは、むしろ、オファー・カーブを利用したほうが、煩雑でないばかりか、むしろ、一般均衡状態をより適切に表現できると思われるので、本稿では、均衡解の存在問題に、マーシャル[7]・[8]で使用されたオファー・カーブを援用することにする[4]。

2．需要の鏡像としての供給とオファー・カーブ

ワルラスによれば、2商品の純粋交換問題では、ある商品を需要するということは、それと引き換えに、等価な価値に相当する量だけ手持ちの商品を供給しないといけない。すなわち、

> 「ある商品のもう1つの商品と引換えでの有効供給は、このもう1つの商品の有効需要に、その商品の最初の商品で表わされた価格を乗じたものと相等しい。」[5]

したがって、かれは、

---

3) 永田[14]では、今日の常套的表現にしたがって、価格軸を縦に、また数量を横軸に位置づけた図表を使用したが、ワルラス自身のオリジナルな表現では、縦・横の軸の位置づけが逆になっている。これは、ほんらい、数学的な意味からは、従属変数を縦軸に、いっぽう、独立変数は横軸に描かれるのが、グラフの通常の表記法であるため、ワルラスは、これに忠実に従ったにすぎないとおもわれる。今日の常套的な座標軸の表現を採用したのは Marshall[9]であるが、かれのいう、需要曲線や供給曲線は、それぞれの数量に対応した需要価格あるいは供給価格を意味するので、これらのグラフでも、従属変数と独立変数との識別は明確に表現されている。ところが、今日の一般均衡理論では、経済均衡をさまざまな変数の相互依存の結果とみなすためか、独立変数と従属変数とのあいだの峻別には無頓着であるようにおもわれる。この無頓着さは、マルクスが価値形態論で使用した「等号」とおなじく、非可逆性の見落としという、かれらの経済観や論証に致命的な欠陥をもたらしたとおもわれる。マルクスの価値形態論の難点については、永田[14]参照。

4) 注3)で述べたように、マーシャルの需要・供給曲線とワルラスのそれらとは、その背景となる経済観に、明白な相違がある。そして、それは、不均衡状態からの調整プロセスの描写に如実に反映される。したがって、マーシャルからオファー・カーブを借用するとはいっても、本稿では、あくまで、ワルラスの経済観を表現するための簡明な手段として、形式上の借用するにすぎない。

5) Walras[21]訳書19ページ。ここで、かれのいう有効供給や有効需要とは、任意に価格があたえられたときに、その価格データに応じて表明される供給量または需要量のことである。

「需要曲線から…供給曲線が、…ひき出されなければならない」[6)]
として、もっぱら需要がわに積極的要因を求めた。これにたいして、供給は、需要の鏡像としての消極的な役割しか認められていない。

そこで、このようなワルラスの経済観を、ワルラスの主著[21]・[22]にしたがって、2商品交換モデルとして表現しよう。純粋交換問題を検討するさい、ワルラスは、商品所有者1が、それぞれの価格水準 $1/p$ に対応して、商品2にたいする需要 D_2 をもつこと。そして、その関係が、価格にかんする単調減少関数として表現されること。さらに、商品2の需要量におうじて、その代価として提供しないといけない商品1の数量 S_1 を、等価交換条件をみたす式のかたちで、

$$S_1 = 1/p \cdot D_2(1/p) \qquad (2.\ 1)$$

と表現した[7)]。ここで、記号 p は、商品2に換算された商品1の価格をあらわし、したがって、その逆数 $1/p$ は、商品1で表現された商品2の相対価格を意味する。限界効用価値説の開祖のひとりであるワルラスにとっては、あくまで、使用価値を目的とした需要が積極的要因であり、供給は、必要なものを入手するために、それと等価な分量、手ばなすだけの消極的な役割しか果たしていない。いわば、供給は、もっぱら、需要の鏡像としてのみ考察されていたにすぎない。その手法は、商品販売が資本の価値増殖の手段としておこなわれる資本主義システムの特殊性を、いっさい、考慮することなく、たんなる個人の嗜好問題に矮小化して還元しているにすぎない。

このようにして、交換条件 $1/p$ のそれぞれの水準におうじて、需要量と、その鏡像としての供給量のあいだの関係が（2. 1）式から導出される。この関係を、それぞれの商品量を両軸にとって、交換条件の変化にともなう需要量 D_2 と供給量 S_1 の組の軌跡とし、グラフ形式で視覚化して表現したものが、オファー・カーブである。この式を微分すれば、オファー・カーブの勾配

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}D_2} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}(1/p)} \cdot \frac{\mathrm{d}(1/p)}{\mathrm{d}D_2} = \frac{(1-\varepsilon_2)D_2}{D_2'} = \frac{D_2}{D_2'} + \frac{1}{p} \qquad (2.\ 2)$$

が求められる。ただし、記号 ε_2 は、商品2にかんする需要の価格弾力性

$$\varepsilon_2 = -\frac{D_2'}{pD_2}$$

をあらわす。また、ワルラスの想定によれば、需要関数は単調減少なので、

$$D_2' = \mathrm{d}D_2/\mathrm{d}(1/p) < 0$$

である。そうすると、

$$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 \gtreqless 0 \iff \varepsilon_2 \gtreqless 1$$

すなわち、需要の価格弾力性が1より大か小かにおうじて、オファー・カーブの勾配は、正の値あるいは負の値をとる。

6)　Walras [21] 訳書19ページ。

7)　永田 [14] 参照。

そこで、オファー・カーブの形状を検討するために、商品2にたいする個人1の需要関数は、つぎのような直線タイプのかたちであらわされるとしよう。

$$D_2 = -\alpha_1 \cdot (1/p) + \beta_1 \tag{2. 3}$$

ただし、α_1とβ_1は、ともに、正のパラメーターである。そうすると、

$$D_2' = \mathrm{d}D_2/\mathrm{d}(1/p) = -\alpha_1 < 0$$

であるから、たしかに、単調減少性を示す。また、このとき、需要の価格弾力性は、

$$\varepsilon_2 = -\frac{D_2'}{pD_2} = \frac{\alpha_1}{-\alpha_1 + \beta_1 p}$$

になる。したがって、

$$\varepsilon_2 \gtreqless 1 \Leftrightarrow p \lesseqgtr \frac{2\alpha_1}{\beta_1}$$

であることがわかる。

いっぽう、供給関数は、(2. 1) 式から、需要関数の鏡像として導出されるので、

$$S_1 = -\alpha_1 \cdot (1/p)^2 + \beta_1 \cdot (1/p) \tag{2. 4}$$

になる。そこで、(2. 2)式にしたがって、オファー・カーブの勾配を求めれば、

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}D_2} = \frac{D_2}{D_2'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \tag{2. 5}$$

したがって、さきの条件とあわせて、

$$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 \gtreqless 0 \Leftrightarrow p \lesseqgtr \frac{2\alpha_1}{\beta_1} \Leftrightarrow \varepsilon_2 \gtreqless 1 \tag{2. 6}$$

をえる。

ところが、需要量の非負条件 $D_2 \geqq 0$を考慮すれば、解が経済的に意味をもつためには

$$p \geqq \alpha_1/\beta_1 \tag{2. 7}$$

という条件をみたさないといけないので、(2. 6) 式の条件とあわせて、まとめれば、

$p = \alpha_1/\beta_1$	$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 = \beta_1/\alpha_1$	$D_2 = 0$	$S_1 = 0$
$\alpha_1/\beta_1 < p < 2\alpha_1/\beta_1$	$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 > 0$		
$p = 2\alpha_1/\beta_1$	$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 = 0$	$D_2 = \beta_1/2$	$S_1 = \beta_1^2/(4\alpha_1)$
$p > 2\alpha_1/\beta_1$	$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 < 0$		
$p \to \infty$	$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 = -\alpha_1/\beta_1$	$D_2 \to \beta_1$	$S_1 \to 0$

になる。なお、D_2の非負条件さえ満足すれば、pの非負条件もあわせて考慮したとき、(2. 1) 式から、自動的に S_1の非負条件もみたされることがわかる。

同様に、商品2の所有者も、また、商品1の需要関数の鏡像として、商品2の供給を計画する。かれにとって、交換条件のパロメーターとなる価格はpであるから、

$$S_2 = p \cdot D_1(p) \tag{2. 8}$$

になる。そうすると、この個人にとってのオファー・カーブの勾配は、

$$\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}S_2} = \frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S_2} = \frac{D_1'}{(1-\varepsilon_1)D_1} = \frac{D_1'}{D_1 + pD_1'}$$

ただし、のちにグラフのかたちで、個人1のオファー・カーブと重ねて表示するさいに適するように、縦軸に商品1の数量が、また横軸には商品2の数量が表示される形式で、勾配の表現を個人1のそれにあわせている。また、記号ε_1は商品1にかんする需要の価格

弾力性

$$\varepsilon_1 = -\frac{pD_1'}{D_1}$$

を意味する。そして、このとき、

$$dD_1/dS_2 \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 \gtreqless 1$$

が成立する。

こんども、さきと同様に、単純化のために、直線タイプの需要関数

$$D_1 = -\alpha_2 p + \beta_2 \tag{2. 9}$$

を採用しよう。このとき、

$$D_1' = dD_1/dp = -\alpha_2 < 0$$

また、

$$\varepsilon_1 = -\frac{pD_1'}{D_1} = \frac{\alpha_2 p}{-\alpha_2 p + \beta_2} \tag{2.10}$$

であるから、

$$\varepsilon_1 \gtreqless 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \gtreqless \frac{\beta_2}{2\alpha_2}$$

になる。

そうすると、オファー・カーブの勾配は、

$$\frac{dD_1}{dS_2} = \frac{D_1'}{D_1 + pD_1'} = \frac{1}{2p - \beta_2/\alpha_2} \tag{2.11}$$

したがって、

$$D_1/dS_2 \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \gtreqless \frac{\beta_2}{2\alpha_2} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_2 \gtreqless 1 \tag{2.12}$$

であることがわかる。

ところが、非負条件 $D_1 \geqq 0$ より、

$$p \leqq \beta_2/\alpha_2 \tag{2.13}$$

なので、整理すれば、けっきょく、

$p = 0$	$dD_1/dS_2 = -\alpha_2/\beta_2$	$D_1 = \beta_2$	$S_2 = 0$
$0 < p < \beta_2/(2\alpha_2)$	$dD_1/dS_2 < 0$		
$p = \beta_2/(2\alpha_2)$	$dD_1/dS_2 \to \infty$	$D_1 = \beta_2/2$	$S_2 = \beta_2^2/(4\alpha_2)$
$\beta_2/(2\alpha_2) < p < \beta_2/\alpha_2$	$dD_1/dS_2 > 0$		
$p = \beta_2/\alpha_2$	$dD_1/dS_2 = \alpha_2/\beta_2$	$D_1 = 0$	$S_2 = 0$

になる。なお、さきと同様に、D_1の非負条件さえ満足すれば、pの非負条件もあわせて考慮したとき、(2. 8) 式から、自動的にS_2の非負条件もみたされる。

3．市場均衡価格

市場均衡価格を求めるために、商品1に注目して、その供給量

$$S_1 = -\alpha_1 \cdot (1/p)^2 + \beta_1 \cdot (1/p)$$

と、その需要量

$$D_1 = -\alpha_2 p + \beta_2$$

とが一致するような条件

$$\alpha_2 p^3 - \beta_2 p^2 + \beta_1 p - \alpha_1 = 0$$

をみたす解を検討しよう。このとき、需要の鏡像として供給をとらえるワルラス型純粋交換モデルでは、(2. 1)式と (2. 8)式から、自動的に、のこされた商品2についても均衡条件がみたされることに注意せよ。

この式は、つぎのように変形できる。

$$p^3 - (\beta_2/\alpha_2)p^2 + (\beta_1/\alpha_2)p - \alpha_1/\alpha_2 = 0 \tag{3. 1}$$

そうすると、根と係数との関係から[8]、

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \beta_2/\alpha_2 \tag{3. 2}$$

$$\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = \beta_1/\alpha_2 \tag{3. 3}$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \alpha_1/\alpha_2 \tag{3. 4}$$

が成立する。

一般に、代数学の基本定理によれば、n 次方程式には、解の範囲を複素数にまでひろげれば、虚根（複素解）をふくめて n 個の解が存在する。そして、とくに、その多項式の係数がすべて実数ならば、複素解はかならずその共役複素数とペアで解になる[9]。したがって、3次方程式には、複素解をふくめて3個の解が存在するが、その内訳は、すべて実数解であるケースか、あるいは、実数解1個と1組の共役な複素解のケースであるかにかぎられる。

---

8) 代数学の基本定理から、3次方程式には、複素解をふくめて3つの解が存在するので、これらの解を、それぞれ、ρ_1、ρ_2、ρ_3とすれば、

$$(p-\rho_1)(p-\rho_2)(p-\rho_3) = 0$$

これを展開して、

$$p^3 - (\rho_1+\rho_2+\rho_3)p^2 + (\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)p - \rho_1\rho_2\rho_3 = 0$$

をえるが、これはもとの方程式 (3. 1) と恒等的に一致するはずであるから、各項の係数どうしも一致することになり、いわゆる根と係数との関係がえられる。

なお、3次方程式を解く方法としては、カルダノの公式があるが、煩雑なうえに2重根号や3乗根などを求めないといけないので、あまり有用ではない。そのうえ、経済学で必要とされる非負条件の検討については、この公式では、適用しづらいようにおもわれる。カルダノの公式については、淡中[20]、Birkhoff and MacLane[1]、Курош[5]などを参照。

以下で示すように、この3次方程式（3. 1）だけを検討すれば、いずれのケースでも、非負解$p \geqq 0$が存在するようにみえるが、経済的に意味のある解に限定するためには、さらに、数量にかんする非負条件をも満足しないといけないので、条件

$$\alpha_1/\beta_1 \leqq p \leqq \beta_2/\alpha_2 \qquad (3.\ 5)$$

が追加されることは、（2. 7）と（2. 13）から、あきらかであろう。

はじめに、1実根と2虚根のケースを検討しよう。たとえば、3根を記号ρ_1、ρ_2、ρ_3であらわしたとき、

$$\rho_1 \in R\ ;\ \rho_2, \rho_3 \in C$$

であるとする。ここで、記号RとCとは、それぞれ、実数あるいは複素数全体の集合を意味する。さきに述べたように、ρ_2とρ_3はたがいに共役な複素数であるから、

$$\rho_2 = \overline{\rho_3}$$

そうすると、これらの積は、複素数のノルムになるので[10]、非負の実数である。

$$\rho_2\rho_3 = \rho_2\overline{\rho_2} = \rho_3\overline{\rho_3} \geqq 0$$

したがって、根と係数との関係（3. 4）によって、

$$\rho_1 > 0$$

でなければならない。いいかえれば、方程式は正の実数解をもつ。

ところが、価格方程式（3. 1）が正の実数解をもつことが証明されたからといって、経済的に意味をもつ解がえられたと即断するのは早計である。というのは、たとえ価格にかんしては非負条件をみたす解がみつかったとしても、それが自動的に数量にかんする非負条件をみたすとはかぎらないからである。じっさい、これら共役な複素解の実部を、それぞれ、記号$Re(\rho_2)$、$Re(\rho_3)$であらわせば、共役複素数の定義から、

$$Re(\rho_2) = Re(\rho_3)$$

---

9) じっさい、多項式

$$\Sigma a_i x^i = 0$$

の係数がすべて実数、すなわち、

$$a_i = \overline{a_i}$$

であるとしよう、ただし、アッパーライン記号（$\overline{\cdot}$）は、共役を意味する記号である。

この条件と、複素数の和や積の共役はそれぞれに共役な複素数の項の和や積に分解できることに注意すれば、

$$\Sigma a_i x^i = 0$$

$$0 = \overline{0} = \overline{\Sigma a_i x^i} = \Sigma a_i \overline{x^i}$$

となるので、解xの共役複素数$\overline{x}$も、やはり、解になる。

10) Birkhoff and MacLane［1］訳書516ページ参照。ここでいう複素数のノルムとは、複素数の絶対値の2乗のことである。

さらに、

$$\rho_2 + \rho_3 = 2Re(\rho_2) = 2Re(\rho_3)$$

が成立する。そこで、かりに、複素根の実部が負であったとしよう。すなわち、

$$Re(\rho_2) = Re(\rho_3) < 0$$

であれば、$p = \rho_1$ という実数解は、根と係数との関係（3. 2）から、

$$p = \rho_1 > \rho_1 + 2Re(\rho_2) = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \beta_2/\alpha_2$$

になり、D_1の非負条件（2.13）を満足しない。いいかえれば、この価格は、個人２の最低限の要求を受け入れる余地がないので、経済的に意味のある均衡価格としての要件をみたさない。同様に、このとき、根と係数との関係（3. 3）から、

$$p(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1) = \rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1^2(\rho_2+\rho_3)$$
$$= \rho_1\rho_2\rho_3+2Re(\rho_2)\rho_1^2 < \rho_1\rho_2\rho_3$$

したがって、ふたたび、(3. 3) と（3. 4）から、

$$p < \rho_1\rho_2\rho_3/(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1) = \beta_1/\alpha_1$$

になるので、この価格は、D_2 の非負条件（2. 7）をも満足できず、個人１の最低限の要求までも、却下する。マーシャルの用語を借用すれば、いずれにせよ、市場では、両者ともに、かれらの「需要価格」より好条件の価格を提示されることにはならないので、交渉は決裂し、均衡解は存在しないのである。いいかえれば、このケースでは、はじめから、

$$\beta_2/\alpha_2 < \beta_1/\alpha_1$$

という、両者の思惑が調和しえない前提条件があるために、これらの数値のあいだに、

$$\beta_2/\alpha_2 < p < \alpha_1/\beta_1$$

をみたすように任意に価格を設定しようとも、当事者は双方ともに不満で、交渉は決裂する。

それでは、実部が正のばあい、すなわち、

$$\rho_1 > 0,\quad Re(\rho_2) = Re(\rho_3) > 0$$

のケースはどうであろうか？このときは、上述の議論で不等号を逆転させればよいだけなので、けっきょく、$p = \rho_1 > 0$ は、数量にかんする２つの非負条件

$$\alpha_1/\beta_1 < p < \beta_2/\alpha_2$$

をともにみたし、経済的に意味のある一意均衡解をもたらす。

なお、のこされた可能性である、

$$\rho_1 > 0,\quad Re(\rho_2) = Re(\rho_3) = 0$$

となる、純虚数のケースでは、この条件と、根と係数との関係（3. 2)から、

$$p = \rho_1 = \rho_1+\rho_2+\rho_3 = \beta_2/\alpha_2$$

また、実部がゼロであることと、(3. 3)、(3. 4) から

$$p = \rho_1\rho_2\rho_3/(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1) = \alpha_1/\beta_1$$

が成立するので、けっきょく、

$$\alpha_1/\beta_1 = p = \beta_2/\alpha_2$$

という、均衡価格のもとで、数量均衡

$$D_1 = S_2 = D_2 = S_1 = 0$$

が達成される。

こんどは、３根すべてが実数のケースを検討しよう。このとき、根と係数との関係

(3. 4) から、それらは、すべてが正根

$$\rho_1>0,\quad \rho_2>0,\quad \rho_3>0$$

であるか、あるいは、1つの正根と2つの負根

$$\rho_1>0,\quad \rho_2<0,\quad \rho_3<0$$

であるかのいずれかであるが、じつは、後者の可能性は排除される。じっさい、後者を仮定すれば、根と係数との関係 (3. 2) から、

$$\rho_1>-(\rho_2+\rho_3)>0$$

いっぽう、(3. 3) から、

$$\rho_2\rho_3>-\rho_1(\rho_2+\rho_3)$$

だから、上式とあわせて、

$$\rho_2\rho_3>(\rho_2+\rho_3)^2$$

これを展開すれば、

$$\rho_2^2+\rho_2\rho_3+\rho_3^2<0$$

になるが、この式は、仮定から左辺のすべての項は正であることに矛盾する。

したがって、3根すべてが実根のさいの議論は、それらすべてが正根のケースにかぎられる。こうして、どの根についても価格の非負条件はみたされたわけであるから、あとは、これらの根が、数量にかんする非負条件をみたすことを確認しなければならない。その検証のために、価格として任意の正根ρ_iをとり、$p=\rho_i$とすると、

$$p(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)>\rho_1\rho_2\rho_3$$

だから、根と係数との関係(3.3)、(3.4)から、

$$p>\rho_1\rho_2\rho_3/(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)=\beta_1/\alpha_1$$

が成り立つ。いっぽう、おなじく、任意の正根解$p=\rho_i$にたいして、あきらかに、

$$p<\rho_1+\rho_2+\rho_3=\beta_2/\alpha_2$$

が成立するので、これらの結果をあわせて、けっきょく、

$$\alpha_1/\beta_1<p<\beta_2/\alpha_2$$

になり、数量にかんする非負条件も自動的にみたされる。いいかえれば、3実根のケースは、経済的に意味をもつ均衡解を3つもつ。したがって、このケースこそ、複数均衡が存在するケースにあたる。

なお、これら3つの実根のなかには、重根が存在する可能性もある。とくに、3重根のケースでは、この共通の根を記号ρであらわせば、根と係数との関係から、

$$3\rho=\beta_2/\alpha_2$$
$$3\rho^2=\beta_1/\alpha_2$$
$$\rho^3=\alpha_1/\alpha_2$$

が成り立つので、はじめの式から、

$$\rho=\beta_2/(3\alpha_2)$$

2番目の式を最初の式で割って、

$$\rho=\beta_1/\beta_2$$

2番目の式のρ倍と3番目の式の3倍とを比較して、

$$\rho=3\alpha_1/\beta_1$$

したがって、この非負解$p=\rho$は、数量にかんする非負条件

$$\alpha_1/\beta_1 \leqq p \leqq \beta_2/\alpha_2$$

も満足するので、経済的に意味をもつ解を一意にあたえる。

ところで、たまたま、両者が要求する最低条件が一致し、初期条件として、

$$\alpha_1/\beta_1 = \beta_2/\alpha_2$$

があたえられたときには、この式に根と係数との関係を代入して、

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \rho_1\rho_2\rho_3/(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1)$$

になる。この節のはじめに述べたように、3つの根のうち、すくなくとも1つは実根であるから、それをρ_1としよう。このとき、上式から、

$$(\rho_2 + \rho_3)(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) = 0$$

であるが、積の右がわのカッコ内の項は、ゼロにはなりえない。というのも、かりに、そうだとすれば、

$$\rho_1^2 = -(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) = -\beta_1/\alpha_2 < 0$$

となり、ρ_1が実数であることに矛盾するからである。そうすると、

$$\rho_2 + \rho_3 = 0$$

になるので[11]、これは、3実根のケースには該当しない。というのも、さきに示したように、3実根の存在を仮定すると、根はすべて正になるから、上式に矛盾するからである。したがって、

$$\rho_1 \in R; \quad \rho_2 = \overline{\rho_3} \in C$$

になるから、

$$\rho_2 + \rho_3 = 2Re(\rho_2)$$

これと、さきの式から、けっきょく、

$$Re(\rho_2) = Re(\rho_3) = 0$$

すなわち、ρ_2とρ_3は、たがいに共役な純虚数になる。さらに、実数解ρ_1については、

$$p = \rho_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \beta_2/\alpha_2 = \alpha_1/\beta_1 > 0$$

になり、初期条件を交換条件として、均衡

$$D_1 = S_2 = D_2 = S_1 = 0$$

を達成する。これらの結果は、さきに、1実根と2虚根のケースで、$Re(\rho_2) = Re(\rho_3) = 0$と想定したときのそれと一致する。

4．ワルラシアン・オファー・カーブの図示

前節で導かれたオファー・カーブに関係する均衡問題の結果を、一覧表のかたちで整理すれば、つぎのようになる[12]。そこで、こんどは、これらの結果を、視覚にうったえるようなかたちで、グラフ形式で表現してみよう。

---

11) 複素数全体の集合は体であるので、零因子は存在しない。

12) $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$, $\rho_3 < 0$のケースは、均衡価格方程式 (3. 1) の解自体の性質にも適合しないので、一覧表からは除外してある。

根の内訳	ρ の 符 号	非負解の性質
3 実根	$\rho_1 > 0,\quad \rho_2 > 0,\quad \rho_3 > 0$	複数均衡（3 つ）
	$\rho_1 > 0,\quad \rho_2 = \rho_3 > 0$	複数均衡（2 つ）
	$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > 0$	一意均衡
1 実根 と 2 虚根	$\rho_1 > 0,\quad Re(\rho_2) = Re(\rho_3) > 0$	一意均衡
	$\rho_1 > 0,\quad Re(\rho_2) = Re(\rho_3) = 0$	一意均衡（ゼロ数量の均衡）
	$\rho_1 > 0,\quad Re(\rho_2) = Re(\rho_3) < 0$	解なし

その準備段階として、はじめに、個人 1 のオファー・カーブを導出しよう。図 1 の第 4 象限には、商品 2 にたいする個人 1 の需要関数（2. 3）が描かれていて、それぞれの価格 $1/p$ に応じた需要量をあたえる。そして、その鏡像として、（2. 1）にしたがって、第 3 象限にあらわれる商品 1 の供給量が導かれる。こうして、第 4 象限の需要量 D_2と第 3 象限の供給量 S_1とが、第 2 象限の45° 線を媒介にして、第 1 象限で出会う。このような事情が、その軌跡として、第 1 象限に個人 1 のオファー・カーブとして描かれる。

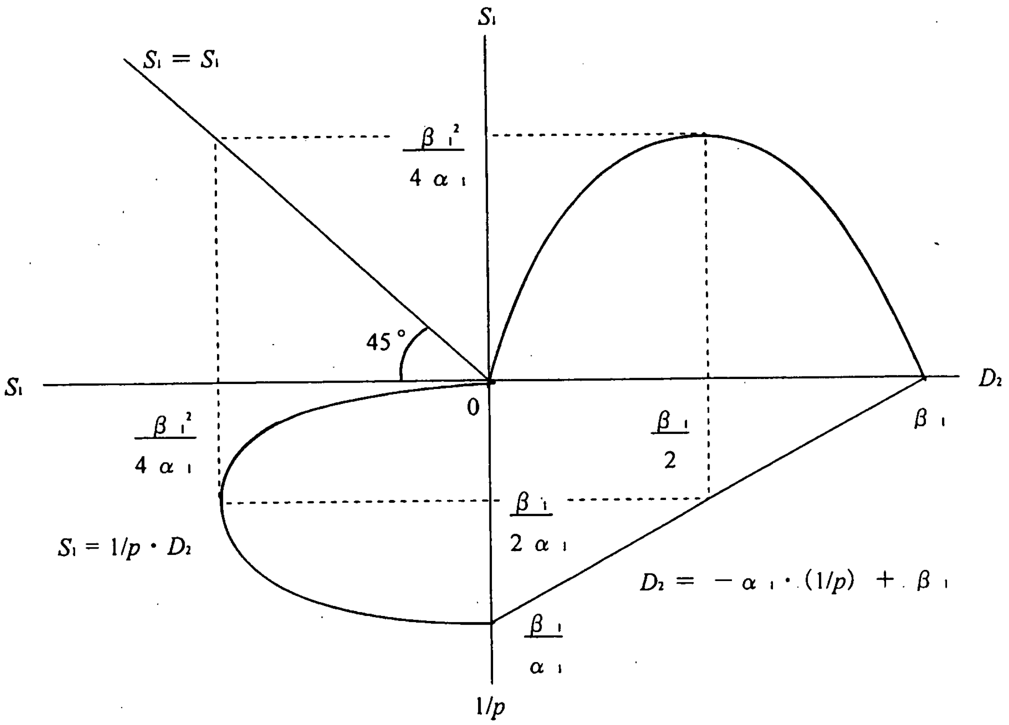

図 1　個人 1 のオファー・カーブ

同様にして、(2. 8) と (2. 9) から、個人2のオファー・カーブが導かれる。ただし、こんどは、個人2が関心をよせる価格はpであることに注意する。また、均衡問題を図上で検討するためには、これら2種類のオファー・カーブを同一平面上に重ねあわせて表示する必要がある。そのため、座標軸の数量表現を統一する目的で、図2では、供給量と需要量とが座標系上で図1とは逆位置に描かれている。

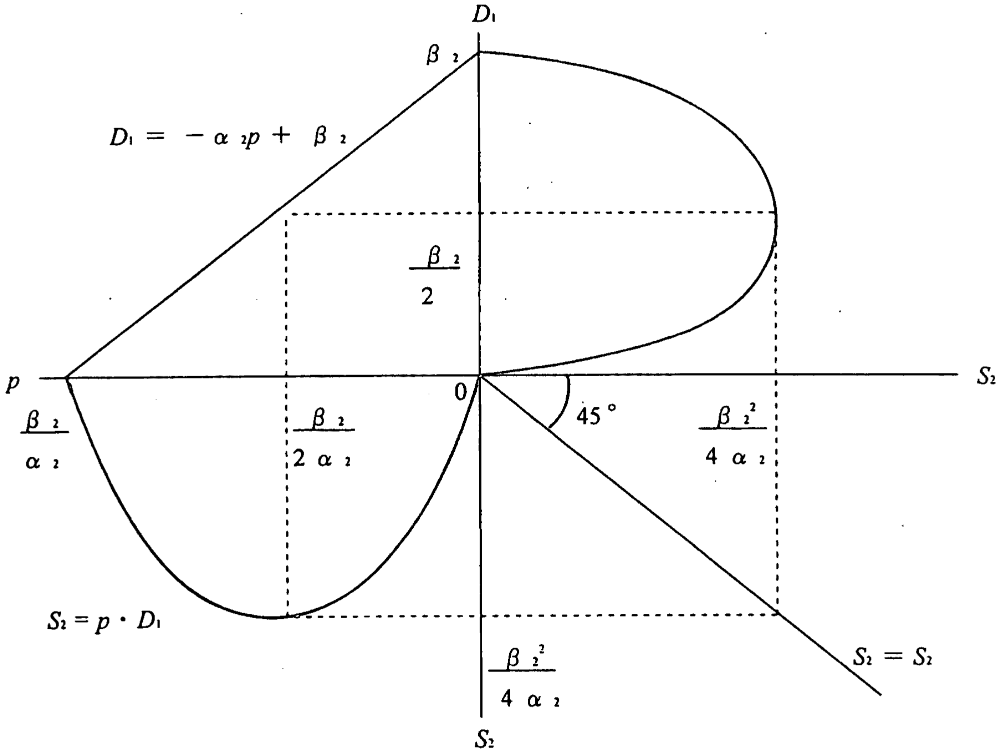

図2　個人2のオファー・カーブ

このようにして導出された2種類のオファー・カーブを、同一平面上に重ね合わせれば、前節で検討された均衡解の存在問題が、一目瞭然になる。はじめに、3根がすべて実根となるときには、前節で示したように、それらはすべて正の値をとることに注意しよう。そのなかで、図3は、相異なる実根が3つ存在するケースに相当し、それにおうじて、均衡解も3つ存在する。つづいて、図4は、重根のほか、それとは異なる根が1つ存在するケースで、均衡解は2つ存在することになる。重根の存在は、図上では、オファー・カーブどうしが接している部分に表現されている。そうすると、オファー・カーブが接する部分のほかには交点をもたないような性質をもつときが、3根すべてが重根のケースであり、これは図5であらわされている。

のこる可能性は、1つの正の実根のほかは、1組の共役複素根が存在するばあいであるが、これは、複素根の実部の符号におうじて、3つのケースに分類される。実部が正のケースは、図6であらわされており、一意均衡をもたらす。また、図7に示されているように、実部がゼロのばあいも、ゼロ数量のもとで、一意均衡解をあたえる。ところが、図8で表

現される、実部が負のケースでは、たとえ正の実根が価格方程式を満足する解ではあるとしても、前節で述べたように、数量の非負条件をみたさないため、経済的に意味のある均衡解をもたらさないのである。なお、(2. 5) と (2. 11) からわかるように、原点におけるオファーカーブの傾きは、それぞれ、$\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}D_2 = \beta_1/\alpha_1$ と $\mathrm{d}D_1/\mathrm{d}S_2 = \alpha_2/\beta_2$ である。これらは、それぞれの個人が所有する商品を供給するインセンティブを引きだすための最低限の要求とみなすことができるので、(3. 5)式からわかるように、前提条件として、後者が前者を上まらないかぎり、けっして、経済的に意味のある解をもたらさない。したがって、これらの値が一致する図 7 のケースでは、この共通の値の逆数になる交換比率のもとで、ゼロ数量の均衡がもたらされるのにたいして、前提条件をみたさない図 8 では、均衡解は存在しないのである。なお、図だけの考察にたよれば、ほかの図でも、原点も均衡点のようにみえるかもしれないが、上述の議論から、図 7 のケースをのぞいて、原点は均衡点になりえないことは明白であろう。

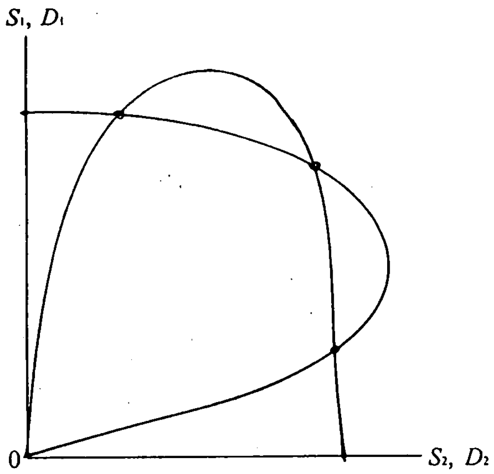

図 3　複数均衡（3 実根）

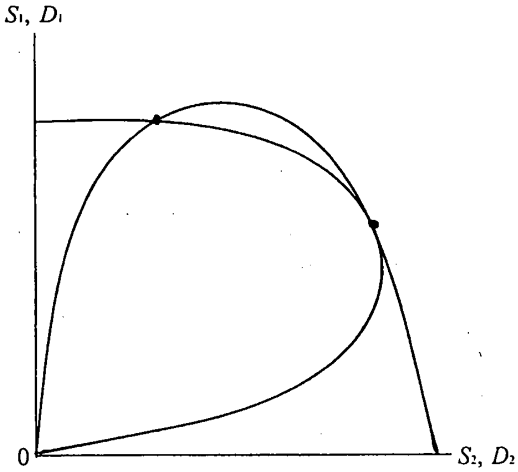

図 4　複数均衡（2 重根＋ 1 実根）

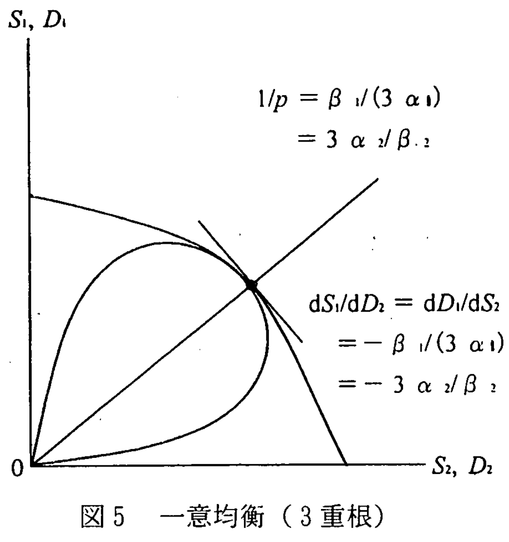

図 5　一意均衡（3 重根）

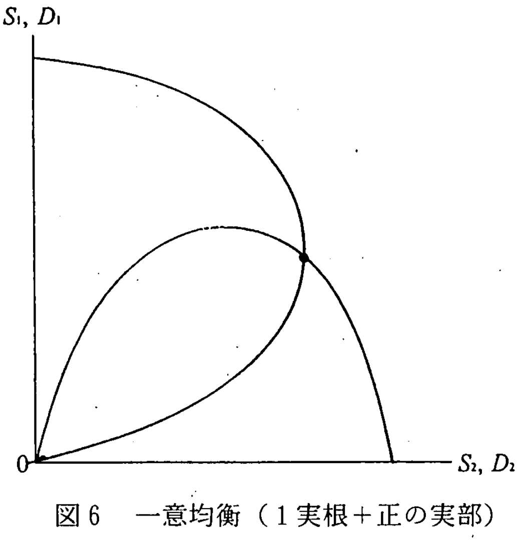

図 6　一意均衡（1 実根＋正の実部）

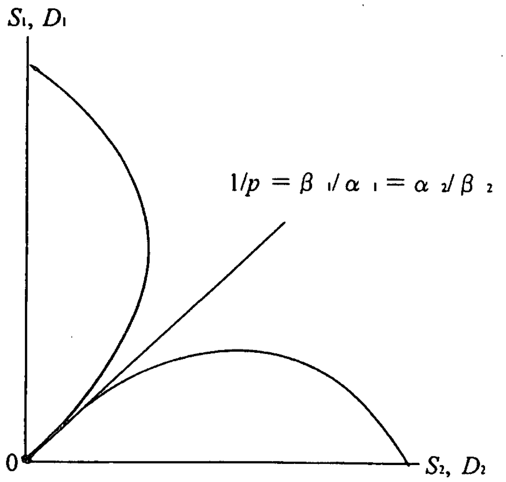

図7　一意均衡（1実根＋ゼロの実部）

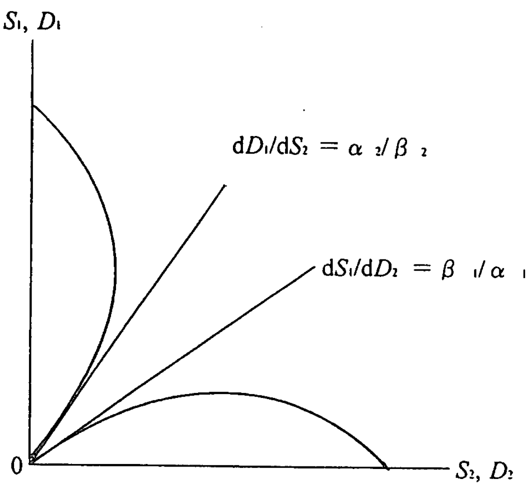

図8　均衡解なし（1実根＋負の実部）

5．おわりに

本稿では、ワルラスが提示した2商品純粋交換モデルにかんする均衡解の存在問題を、マーシャル流のオファー・カーブの用語に翻訳して検討した。ワルラスは、純粋交換問題の解明が価格の説明に基本的な光明を投じると信じ、2商品間の交換問題では、需要が積極的要因であるとみなすかれ自身の経済観に、等価交換の要請を組み合わせて、けっきょく、供給を、もっぱら、需要の鏡像としてのみ考察することになった。その結果、かれの供給関数は価格にかんして単調減少な部分をもふくむ、勾配が反転する形状を示すことになったため、均衡解が存在しなかったり、たとえ存在しても一意解でなかったりするケースが生じる可能性もありうることになった。ところが、ワルラスの議論では、均衡問題は、通常の価格 - 数量平面に描かれた需要・供給曲線の用語で表現されているために、供給曲線の形状が複雑になり、かえって、問題を取りあつかいにくくしている。そこで、本稿では、ワルラスの特徴が端的にあらわれる、需要の鏡像としての供給の性質を、マーシャル流のオファー・カーブの用語に翻訳して表現しなおすことにより、ワルラスが提示した2商品純粋交換モデルの均衡解の存在問題を整理して検討した。

ところで、オファー・カーブは、ほんらい、マーシャル自身により、かれの著作[7]や[8]で利用されているように、2人の個人を2国に読み替えることによって、国際貿易論における交易条件の決定問題に利用されている[13]。そのさい、マーシャル自身は、いわゆる「相互需要説」にもとづく交易条件論において、ミルによる複数均衡解存在の可能性への指摘にインスパイアされて、オファー・カーブを考案した[14]。さらに、そのミルは、

13) たとえば、Mundell[13]、Heller[3]、Kemp[4]、藤井[2]、小宮・天野[6]などを参照。

14) Marshall[8]参照。

リカードゥの比較生産費の原理における交易条件の未決定問題にメスを入れることから出発している[15]。本稿で検討したように、ワルラス純粋交換モデルをマーシャルの用語に翻訳したワルラシアン・オファー・カーブの議論では、マーシャル流の用語を借用すれば、取引に参加している当事者双方の需要価格が適切な初期条件をみたしていないと、均衡解が存在しなかったり、あるいは、たとえ存在したとしても、ゼロ数量の均衡をもたらしたりする可能性がある。これらのケースは、国際貿易論の用語に翻訳すれば、じつは、比較優位が逆転したり、あるいは、それらがまったく一致したりするケースに相当するとおもわれる。このような、国際貿易論における、オファー・カーブと比較優位論とのあいだの関連については、別稿にゆずる。

また、本稿の冒頭の引用文では、ワルラスは、体系内に貨幣を導入しても、物々交換の検討で導かれた結論は、いぜんとして、そっくりそのまま妥当するという観点にたつ貨幣ベール観を表明していた。ところが、そもそも、一般的等価物としての貨幣の意義のひとつは、物々交換とは異なり、売りと買いを時間的・空間的に分離しうることにある。そうすると、貨幣経済では、供給は、かならずしも需要の鏡像として、同時に実行されることにはならない。さらに、一般的等価物としての貨幣は、他の商品所有者たちだれもが自己が所有する商品と引き換えに交換を希望する結果、どのような商品とも即時に交換可能であるという一般的使用価値を認められるために、この貨幣という、富の代表者となるべき一般的使用価値を獲得することが目的に転じて、貨幣を獲得するための手段として、需要よりもむしろ供給のほうが重要視されるような活動に転じる。いわば、物々交換の使用価値目的から、貨幣経済の交換価値目的への転回がおこなわれるのである。マルクスの用語を借用するならば、流通手段としての貨幣の存在は、使用価値の取得を目的とした単純流通 $W-G-W'$のなかから、交換価値を目的とした資本としての流通 $G-W-G'$への転化をもたらす。その結果、もはや、需要の鏡像として供給を位置づけることはできず、ワルラスが期待するほど、単純には、貨幣経済の議論が物々交換のそれへ帰着すると、楽観視することはできない。というのも、ノガロも指摘するように、

「貿易差額の均衡に関しては国際貿易は物々交換の概念に帰せしめらるゝことが出来ない。故に、リカルドの理論に交換の一般的条件の上に立つ広範なる基礎を与えむとしたミルの努力は全く徒労であつて、物々交換の過程と国際貿易のそれとの間には何らの論理的関係はない」[16]

のであるから。このような純粋交換モデルからの類推による国際貿易論の欠陥は、

「国際価値論と国際貨幣論が、互いに交わることのない平行線の形で、論理的関係のない別々のもののように論述された」[17]

ことに起因する。この点にかんしては、新庄[17]で、指摘されているように、

「リカードが…結論を導出せる原因の一つには、二国間に於ける二財貨のみの交換を仮定し、従って一方からの一財貨の輸出に対し他の側からその対価として引き渡し

---

15) Mill[11]および[12]参照

16) Nogaro[15]訳書47ページ。

17) 新庄[18]157ページ。

得るものは二財貨の中の残された一財貨以外にはないような想定そのものに求められよう。しかるに現実の貿易は多数の財貨を対象として多数諸国間に行われるのであり、その決済も亦多角的に行われ得べきものなのであってこの前提に立って貿易の進行を推論せんとする限り、世界貨幣の存在が不可欠であることは直ちに理解されるはずである。」[18]

したがって、国際貿易論を実り豊かなものにするためには、ワルラス型純粋交換モデルからのアナロジーにすぎないオファー・カーブにたよるのではなく、世界貨幣としての金の役割を明示的に導入した、貿易モデルを再構成する必要がある。しかも、交易条件の決定には外国為替レートの決定問題も密接に関連するため、貿易収支や経常収支という限られた範囲内の均衡を検討するだけではなく、国際間の金利差に起因する利子裁定行為などもふくめて、ひろく資本収支にまで範囲をひろげて考察すべきであろう。

参考文献

[1] Birkhoff, G. and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra* (3rd ed.), 1965; (奥川光太郎・辻吉雄訳『現代代数学概論』白水社, 1967年)。

[2] 藤井茂『国際貿易論（増補版)』国元書房, 1955年。

[3] Heller, H. R., *International Trade; Theory and Empirical Evidence*, Prentice-Hall, 1968; (木村滋・村上敦訳『国際貿易論』ダイヤモンド社, 1970年)。

[4] Kemp, M. C., *The Pure Theory of International Trade and Investment*, Prentice-Hall, 1969; (上河泰男監修『国際貿易と投資の純粋理論』日本評論社, 1981年)。

[5] Курош, А. Г., *Курс Высшей Алгеьры*, Физико-Математической Литературы, 1959; (吉崎敬夫訳『代数学教程（1・2)』東京図書, 1963年)。

[6] 小宮隆太郎・天野明弘『国際経済学』岩波書店, 1972年。

[7] Marshall, A., *Money Credit and Commerce*, Macmillan, 1923; (永澤越郎訳『貨幣信用貿易（1-2)』岩波ブックサービスセンター, 1988年)。

[8] Marshall, A., The Pure Theory of Foreign Trade, 1930; (杉本栄一編『マーシャル経済学選集』日本評論社, 1940年所収)。

[9] Marshall, A., *Principles of Economics* (9th ed.), Macmillan, 1961; (馬場啓之助訳『経済学原理（I-IV)』東洋経済新報社, 1965-1967年)。

[10] Marx, K., *Das Kapital* (Erster Band), Dietz Verlag, 1962; (岡崎次郎訳『資本論（1)』(国民文庫) 大月書店, 1972年)。

[11] Mill, J. S., *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy*, John W. Parker, 1844; (末永茂喜訳『経済学試論集』(岩波文庫) 岩波書店, 1936年)。

[12] Mill, J. S., *Principles of Political Economy with Some of Their Applications to Social Philosopy*, 1848; (末永茂喜訳『経済学原理（1-5)』(岩波文庫) 岩波書店, 1959-63年)。

---

18) 新庄[17]67ページ。

[13] Mundell, R. L., *International Economics*, Macmillan, 1968;（渡辺太郎・箱木真澄・井川一宏訳『国際経済学』ダイヤモンド社, 1971年）。

[14] 永田聖二「等価交換とワルラス」長崎大学教育学部『社会科学論叢』第64号, 2004年。

[15] Nogaro, B., *Le rôle de la monnaie dans le commerce international et la théorie quantitative*, M. Giard, 1904;（手塚寿郎訳『国際貿易に於ける貨幣の職分と貨幣数量説』同文館, 1923年）。

[16] Ricardo, D., *On the Principles of Political Economy, and Taxation* (2nd ed.), 1819;（羽鳥卓也・吉澤芳樹訳『経済学および課税の原理（上・下）』（岩波文庫）岩波書店, 1987年）。

[17] 新庄博『貨幣論』岩波書店, 1952年。

[18] 新庄博『国際金融論』有斐閣, 1967年。

[19] 新庄博「「世界貨幣」と為替相場の論理—紛糾せる為替相場調整問題—」（田中金司先生喜寿記念論文集編集委員会『現代金融論』千倉書房, 1974年所収）。

[20] 淡中忠郎『代数学』朝倉書店, 1960年。

[21] Walras, L., *Théorie mathématique de la richesse sociale*, Corba, 1883;（柏崎利之輔訳『社会的富の数学的理論』日本経済評論社, 1984年）。

[22] Walras, L., *Eléments d'économie politique purre ou Théorie de la richesse sociale*, Corba, 1926;（久武雅夫訳『純粋経済学要論』岩波書店, 1983年）。