

積層偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析

森田 千尋^{*1}・田中 哲也^{*2}・崎山 毅^{*3}
松田 浩^{*3}・黄 美^{*3}・白濱 敏行^{*3}

Geometrical Nonlinear Behavior Analysis of Laminated Shallow Shells

by

Chihiro Morita^{*1}, Tetsuya Tanaka^{*2}, Takeshi Sakiyama^{*3}, Hiroshi Matsuda^{*3},
Mei Huang^{*3} and Toshiyuki Shirahama^{*3}

In this paper, a discrete method for analyzing the geometrical nonlinear problem of laminated shallow shells is proposed. The discrete solutions of partial differential equations governing the geometrical nonlinear behavior of laminated shallow shells are obtained in discrete forms. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The nonlinear problems are solved by the iteration and the displacement incremental procedure.

As the application of the present method, geometrical nonlinear problem of laminated elliptic paraboloidal shallow shells are calculated. The numerical results obtained by this method are verified to be in good agreement the other solution. Moreover, symmetrical and unsymmetrical buckling behavior of laminated shallow shells are shown.

Key words: laminated shallow shell, geometrical nonlinear analysis, a discrete method, buckling behavior

1 緒言

近年、構造物の大型化、薄肉軽量化が進む中で種々の非線形を考慮した構造解析が各種の分野で行われている。例えば、土木の分野においては、直線および曲線のプレートガータの腹板、アーチ系橋梁のアーチリブ、箱桁橋の圧縮フランジなどを構成している板パネル等の耐荷力問題等が挙げられる。建築の分野においては、壁、床スラブなどの解析、また大スパン建築構造のシェル、膜などの自重や雪荷重による大たわみや座屈などの幾何学的非線形問題などがある。

一方、軽量性、高比強度、高比剛性を持つ繊維強化プラスチック(FRP)に関する技術の発達はめざましいものがあり、土木や建築などのさまざまな分野において適用事例が増加している。その適用理由としては、軽量であることから施工性の向上やコストダウン、また、腐食しないことから、塩害に対する耐腐食性の向上や、維持補修にかかるコストの低減などが挙げられる。繊維強化複合材料の使用法として、積層状に重

ねて利用する事が多く、単一の材料にはなかった特性を生みだしており、積層板または積層偏平シェルは、一般に異方性材料となる⁽¹⁾。その異方性を利用して、FRPを構成している繊維の方向や積層数、積層順序を変えることにより、力学的に有利な材料設計が可能となる。しかしながら、異方性材料は土木・建築分野において解決すべき課題も多いため、有効利用するためには、これらの構造に対する非線形挙動解析も必要となる。

以上のように、積層シェル構造を用いた構造物が多くなっており、非線形を考慮した実際状態に近い条件下での解明が必要となっている。そこで、本論文では、離散的近似解法⁽²⁾を用いて繊維強化型複合材料からなる積層偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析を行う。本解析法による数値解の収束性、精度を検討するために既往の解析結果と比較し、本解析法の実用性を検討するとともに、積層偏平シェルの幾何学的非線形挙動を明らかにすることを目的としている。

平成 17年 6月 24日 受理

^{*1}大学院生産科学研究科(Graduate School of Science and Technology)

^{*2}大学院生産科学研究科博士前期課程(Graduate Student, Graduate School of Science and Technology)

^{*3}構造工学科(Department of Structural Engineering)

2 解析手法

2.1 積層偏平シェルの応力-ひずみ関係

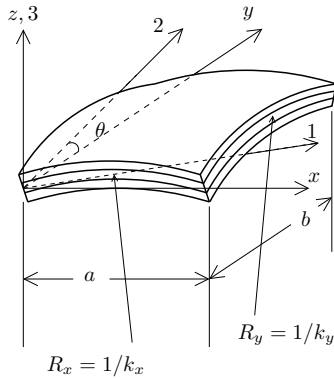


Fig. 1 積層偏平シェルの直交異方性軸

解析に用いるシェルは \$N\$ 層のラミナから成り、各ラミナは均質な直交異方性材料とする。密度および厚さは同じであり、それぞれ完全に密着しているものとする。Fig.1に示すような積層偏平シェルを考え、材料の異方性主軸を1, 2, 3で表わし、主軸3は板厚方向 \$z\$ に平行で、主軸1, 2はそれぞれ \$x\$ 軸, \$y\$ 軸に対して傾き \$\theta\$ だけ傾いているものとする。\$k_x, k_y\$ は各軸の曲率である。

Fig.2はシェルの断面を表わしている。いま、中央面から \$z_{k-1}\$ だけ離れた \$k\$ 番目の層について考えると、材料の主軸方向における応力-ひずみ関係は次式のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (1)$$

ここに、

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

であり、\$E_1, E_2\$ は軸方向の縦弾性係数、\$\nu_{12}, \nu_{21}\$ はポアソン比、\$G_{12}\$ はせん断弾性係数である。

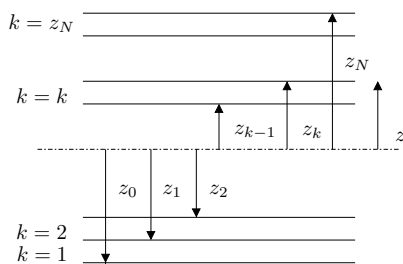


Fig. 2 板厚方向における基準線

式(1)より \$x-y-z\$ 座標系における応力-ひずみ関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (2)$$

ここに、\$\bar{Q}_{ij}\$ (\$i, j = 1, 2, 6\$) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}l^4 + 2(Q_{12} + Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(l^4 + m^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})l^2m^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}l^4 \\ \bar{Q}_{16} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})l^3m \\ &\quad - (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})lm^3 \\ \bar{Q}_{26} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})lm^3 \\ &\quad - (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})l^3m \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{ep12} - 2Q_{66})l^2m^2 \\ &\quad + Q_{66}(l^4 + m^4) \end{aligned}$$

$$l = \cos\theta, \quad m = \sin\theta$$

2.2 増分形基礎微分方程式

積層偏平シェルの幾何学的非線形解析における増分形基礎微分方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left[k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Delta N_x + \left[k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Delta N_y \\ + 2 \left[k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \Delta N_{xy} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} N_y \\ + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} N_{xy} + \Delta N_c = -\Delta q \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} = \Delta Q_x \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} = \Delta Q_y \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= B_{11} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + B_{12} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + B_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ &\quad + D_{11} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_y &= B_{12} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ &\quad + B_{22} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ &\quad + B_{26} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ &\quad + D_{12} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{xy} = & B_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ & + B_{26} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ & + B_{66} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ & + D_{16} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\Delta Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (11)$$

$$\Delta Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta N_x = & A_{11} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ & + A_{12} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ & + A_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ & + B_{11} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta N_y = & A_{12} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ & + A_{22} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ & + A_{26} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ & + B_{12} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta N_{xy} = & A_{16} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w + \Delta W_{xc} \right) \\ & + A_{26} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w + \Delta W_{yc} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - 2k_{xy} \Delta w + \Delta W_{xyc} \right) \\ & + B_{16} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa = \frac{5}{6}$ はせん断修正係数であり、 A_{ij} は面内剛性、 B_{ij} はカップリング剛性、 D_{ij} は曲げ剛性であり、次式で表わされる。

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

2.3 基礎微分方程式の無次元化と離散化

せん断力 ΔQ_y 、 ΔQ_x 、モーメント ΔM_{xy} 、 ΔM_y 、 ΔM_x 、面内力 ΔN_{xy} 、 ΔN_y 、 ΔN_x 、たわみ角 $\Delta \theta_y$ 、

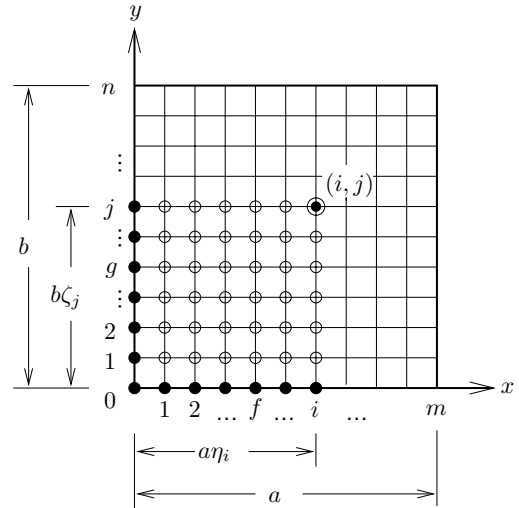


Fig. 3 積層偏平シェルの矩形の離散化モデル

$\Delta \theta_x$ 、および変位 Δw 、 Δu 、 Δv に関して、次の無次元量

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= \frac{a^2 \Delta Q_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & \Delta X_2 &= \frac{a^2 \Delta Q_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ \Delta X_3 &= \frac{a \Delta M_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & \Delta X_4 &= \frac{a \Delta M_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ \Delta X_5 &= \frac{a \Delta M_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ \Delta X_6 &= \Delta \theta_y, & \Delta X_7 &= \Delta \theta_x, & \Delta X_8 &= \frac{\Delta w}{a}, & \Delta X_9 &= \frac{\Delta v}{a}, \\ \Delta X_{10} &= \frac{\Delta u}{a}, & \Delta X_{11} &= \frac{a^2 \Delta N_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ \Delta X_{12} &= \frac{a^2 \Delta N_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & \Delta X_{13} &= \frac{a^2 \Delta N_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ \eta &= \frac{x}{a}, & \zeta &= \frac{y}{b}, & \xi &= \frac{z}{h} \end{aligned}$$

を式(3)~(15)に導入すると、無次元化された次式を得る。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ F_{1ts} \frac{\partial X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} X_s \right\} + f_t = 0 \quad (16)$$

($t = 1, 2, \dots, 13$)

ここで、 F_{1ts} 、 F_{2ts} 、 F_{3ts} は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり、 a 、 b は積層シェルの横、縦の辺長、 $\mu = \frac{b}{a}$ は辺長比、 $D_0 = \frac{E_2 h_0^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ は基準シェル剛度、 $q = q(x, y)$ は荷重強度である。

式(16)の解析解を一般的に求めるのはほとんど不可能であると考えられる。そこで、Fig.3に示すような矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする。Fig.3に示すように、矩形板を横、縦方向

にそれぞれ m, n 等分し, これらの等分割線の交点の集合体とみなす. ここで, 任意の交点 (f, g) に関する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し, これを領域 $[i, j]$ と表記することとする. \odot 印を付けた交点 (i, j) をこの領域 $[i, j]$ の主要点と称し, 領域 $[i, j]$ 内の主要点以外の交点 $(f, g), f = 0, 1, \dots, i, g = 0, 1, \dots, j$ をこの領域の従属点と称することとする. さらに, 従属点に関しては, $\eta = 0$ および, $\zeta = 0$ の境界上にある \bullet 印を付けた交点 $(f, 0)$ および $(0, g)$ を境界従属点と称し, その他の \circ 印を付けた交点 (f, g) を内部従属点と称し区別することとする.

2.4 基礎微分方程式の積分方程式への変換と離散化

前節で求められた基礎微分方程式を領域 $[i, j]$ において面積分し, 積分方程式に変換する. 式(3)を無次元化し, 積分方程式に変換すると,

$$\int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\partial \Delta X_{11}(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} d\eta d\zeta + \mu \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\partial \Delta X_{13}(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta - \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \bar{k}_x(\eta, \zeta) \Delta X_2(\eta, \zeta) = 0 \quad (17)$$

となる. 以下同様に式(4)~(15)を変換する.

次に, 求められた積分方程式の離散化を行う. 積分方程式を等間隔の数値積分法の応用により, 領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 (f, g) の諸量を用いて離散表示すれば, 無次元化された断面力および変形 $X_p (p = 1 \sim 13)$ の主要点 (i, j) における値 ΔX_{pij} に関する連立方程式が得られる. 式(17)は以下のように離散表示される.

$$\begin{aligned} & \beta_{ii} \Delta X_{11ij} + \mu \beta_{jj} \Delta X_{13ij} - \beta_{ii} \beta_{jj} \bar{k}_{xij} \Delta X_{2ij} \\ & = \sum_{k=0}^i \beta_{ik} [\Delta X_{11k0} - \Delta X_{11kj} (1 - \delta_{ki})] \\ & + \mu \sum_{l=0}^j \beta_{jl} [\Delta X_{130l} - \Delta X_{13il} (1 - \delta_{lj})] \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, β_{ik}, β_{jl} は数値積分における重み係数, δ_{ij} は Kronecker's delta である. 以下同様に積分方程式に変換された式(4)~(15)を離散表示する.

次に離散表示された式の左辺の係数マトリックスを $[\bar{\gamma}_{tp}]$, 右辺を $A_t (t = 1 \sim 13)$ において, マトリックス表示すると,

$$[\bar{\gamma}_{tp}] [\Delta X_{pij}] = [A_t]$$

と表わすことができる. 具体的には, 領域 $[i, j]$ における主要点 (i, j) の諸量 ΔX_{pij} と境界従属点 (f, g) の諸量 ΔX_{pfg} との関係式が求められ, 次式となる.

$$\Delta X_{pij} = \sum_{t=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [\Delta X_{tk0} - \Delta X_{tkj} (1 - \delta_{ik})] \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pt} [\Delta X_{t0l} - \Delta X_{til} (1 - \delta_{ij})] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{ptkl} \Delta X_{tkl} (1 - \delta_{ik} \delta_{jl}) \right\} - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} A_{pi} \Delta \bar{q}_{kl} \quad (19)$$

各領域の主要点の諸量 ΔX_{pij} を式(19)により求め, これを次の領域の内部従属点における諸量 ΔX_{pfg} として, 式(19)の右辺に逐次代入していくと, 結局, 任意の領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) における諸量 ΔX_{pij} は, この領域の境界従属点 $(f, 0), (0, g)$ における諸量 $\Delta X_{rf0}, \Delta X_{s0g}, (r = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (s = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13)$ のみによって表わされることになり, 次式のように整理される.

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{f=0}^i a_{pijfd} \Delta X_{rf0} + \sum_{g=0}^j b_{pijgd} \Delta X_{s0g} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (20)$$

3 積分定数と境界条件

積層偏平シェルを解析する上で, 必要となる境界条件について述べる. 各辺上における積分定数および境界条件は, 幾何学的に求められる. また, \square で囲まれた積分定数および境界条件は, 隅角点におけるものである. 隅角点における積分定数および境界条件は, その隅角点において交差する二境界边上での諸量間の関係を考慮して定められる.

Fig.4に四辺単純(ピン)支持での1/4部分の積分定数と境界条件を示す.

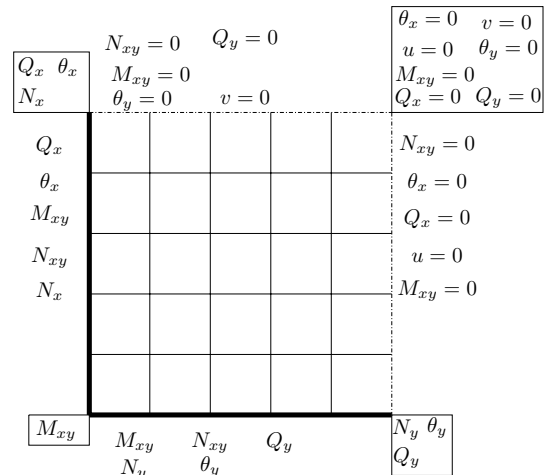


Fig. 4 四辺単純(ピン)支持の積分定数と境界条件

Table. 1 材料特性値

弾性係数	: $E_1/E_2 = 25$
せん断弾性係数	: $G_{12}/E_2 = 0.5$
	$G_{23}/E_2 = 0.2$
ポアソン比	: $\nu_{12} = 0.15, \nu_{21} = 0.006$

4 積層偏平シェルの対称座屈問題

本解法の収束性および精度を明らかにするために、対称座屈問題に関して既往の数値解⁽³⁾との比較を行う。また、積層数、板厚、曲率および支持条件の違いによる幾何学的非線形挙動に及ぼす影響について明らかにする。

ここでは、対称座屈問題のみ取り扱っており、2軸対称のシェルであるためシェルの1/4部分を対象とし、等分布荷重を満載するものとする。

数値解析に用いた材料特性値をTable. 1に示す。

なお、図中で用いる無次元量パラメータは以下のとおりである。

$$\bar{q} = \frac{qa^4}{64E_1h_0^2H^2}, \bar{w}_c = \frac{w_{center}}{h_0},$$

$$Wav = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{w}{h_0} dx dy,$$

$$\bar{M}_x = \frac{aMx}{D_0(1-\nu^2)}, \bar{N}_x = \frac{a^2Nx}{D_0(1-\nu^2)}, \bar{w} = \frac{w}{h_0}$$

4.1 本解法の実用性の検証

本解法の収束性および精度を明らかにするために、微小変位増分 $\Delta\bar{w}_c = 0.02$ を一定とし、 x, y 軸方向の分割数 $m = n = 2, 3, 4, 5$ (板全体では4, 6, 8, 10)と変化させて、クロスプライ積層偏平シェル(0°/90°)の幾何学的非線形解析を行った。ここでは、シェル厚辺長比 $h/a = 0.01$ 、曲率 $ak_x = ak_y = 0.1$ 、支持条件は四辺単純(ピン支持)とする。

Fig.5は積層偏平シェルの中央点での荷重-たわみ曲線である。同図より、 x, y 軸方向の分割数を大きくするにつれて、本解析値は一樣に収束することがわかる。 $m = n = 4$ 程度で、十分に収束した解析値が得られており、飛び移り現象も十分に追跡できていることがわかる。さらに、Liaoらによる解⁽³⁾ともほぼ一致していることから、本解析は有効であるといえる。以後、解析は4分割で行うこととし、記載のない条件は、上述のものと同様のものとする。

4.2 積層数による影響

Fig.6は積層数 $N = 2, 4, 6, 8$ とした場合の逆対称クロスプライ積層偏平シェルの中央点における荷重-た

わみ曲線であり、Fig.7は、積層数 $N = 4, 6, 8$ とした

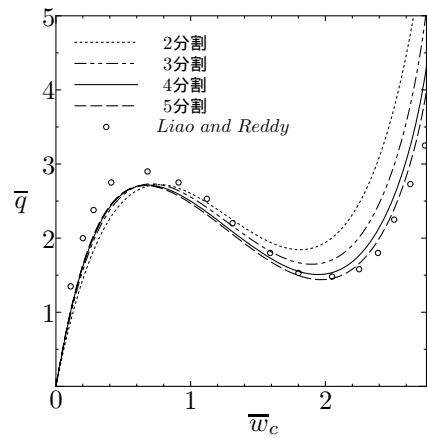


Fig. 5 収束性および既往の解との比較

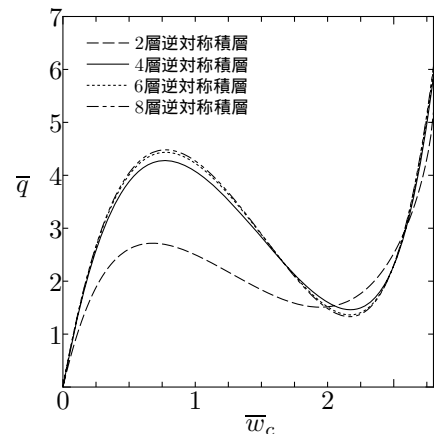


Fig. 6 逆対称積層(ピン支持)

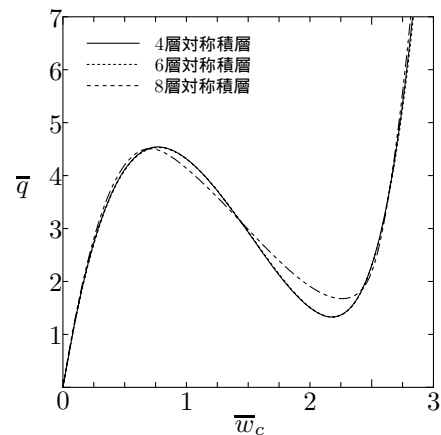


Fig. 7 対称積層(ピン支持)

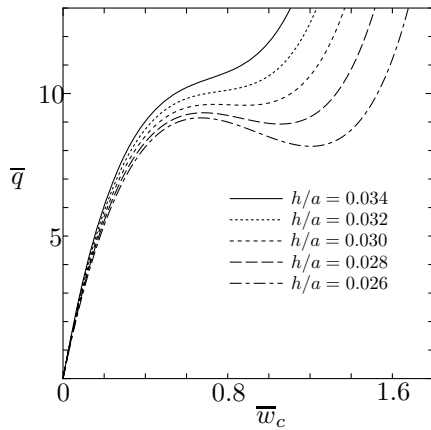


Fig. 8 板厚による影響(ピン支持)

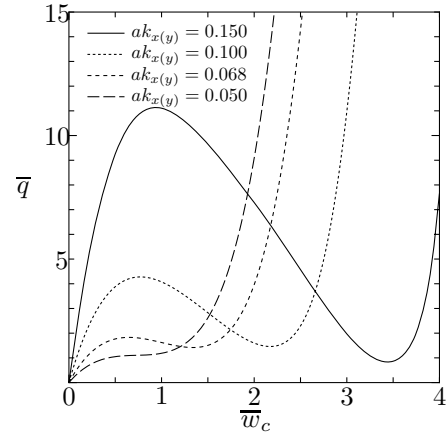


Fig. 9 曲率による影響(ピン支持)

場合の対称クロスプライ積層偏平シェルの中央点における荷重-たわみ曲線である。

Fig.6より, 逆対称積層において積層数が4層以上の場合, 対称座屈挙動に大きな差はないが, 2層に積層した場合のみ大きく異なり, 座屈荷重が2/3程度に低下している。Fig.7より, 対称積層においては座屈荷重はほとんど差がないことがわかる。これらの図より積層数が4層以上のときは飛び移り座屈荷重に大きな影響を及ぼさないと考えられる。

4.3 板厚による影響

板厚による影響を調べるために, シェル厚辺長比 h/a を0.026 ~ 0.034 まで変化させ, $ak_x = ak_y = 0.15$ として, 4層逆対称クロスプライ積層偏平シェルの解析を行った。

Fig.8は中央点における荷重-たわみ曲線である。同図より板厚を大きくすると座屈荷重が大きくなり, また, $h/a = 0.030$ 程度以上になると, 飛び移り現象は生じていないことがわかる。

4.4 曲率による影響

曲率による影響を調べるために, 曲率 $ak_x = ak_y$ を0.050 ~ 0.150 まで変化させ, 4層逆対称クロスプライ積層偏平シェルの解析を行った。

Fig.9は中央点における荷重-たわみ曲線である。同図より曲率が大きくなるほど座屈荷重が大きくなり, また, $ak_x = ak_y = 0.05$ 程度以下では, 飛び移り現象は生じていないことがわかる。

4.5 支持条件による影響

支持条件による影響を調べるために, 固定支持, 単純支持(ピン, ローラー)とした場合の4層逆対称クロスプライ積層偏平シェルの解析を行った。

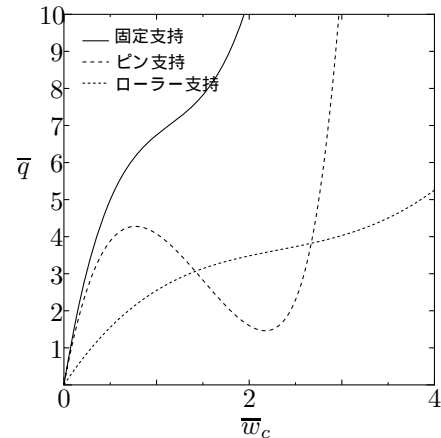


Fig. 10 支持条件による影響

Fig.10はそれぞれの支持条件の場合の中央点における荷重-たわみ曲線である。同図より固定支持とピン支持を比較すると, 回転拘束を大きくすることにより, 飛び移り現象が生じにくくなることがわかる。さらに, ピン支持とローラー支持を比較すると, 水平拘束を大きくすることにより, 飛び移り現象が生じやすくなることがわかる。

5 積層偏平シェルの非対称座屈問題

偏平シェルに関しては, シェル厚が薄い場合には, 対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈を起こす場合がある。そこで, 非対称座屈挙動を明らかにするために, シェル厚が薄い場合についての幾何学的非線形解析を行った。

非対称座屈問題においては, $y = 0.5b$ の1軸対称性を考慮してシェルの1/2部分を対象とし, 数値解析に用いた複合材料の材料特性値および諸量は前章とほぼ同

Table. 2 材料特性値および諸量

せん断弾性係数	: $G_{12}/E_2 = 0.4$
シェル厚	: $h/a = 0.008$
曲率	: $ak_x = ak_y = 0.1$ (E.P.)
微小変位増分	: $\Delta\bar{w}_c = 0.01$
積層数	: 4層逆対称クロスプライ ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)

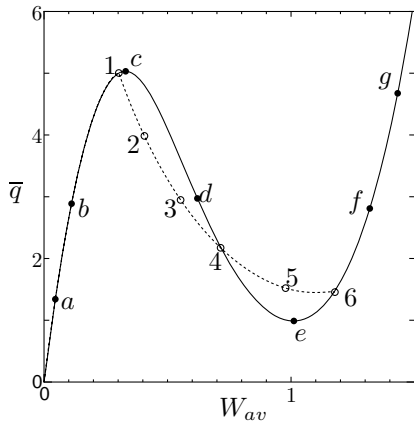


Fig. 11 非対称座屈挙動

じであるが、値が変わるもののみを Table. 2 に示している。非対称座屈挙動を追跡するために、初期不整として、 $x = 0.5a$ に逆対称な微小荷重を初期の段階で与えている。分割数は $m = 8, n = 4$ とする。

Fig. 11 は非対称座屈挙動を起こす積層偏平シェルの荷重-たわみ曲線である。実線が対称座屈挙動の場合、破線が非対称座屈挙動の場合であり、点 1 において対称座屈挙動から非対称座屈挙動に移行している。

また、代表的な荷重段階においての $y = 0.5b$ 上の曲げモーメント \bar{M}_x 、面内力 \bar{N}_x およびたわみ \bar{w} の分布を Fig. 12 に示す。Fig. 12 の番号 1 ~ 6 は Fig. 11 の各段階の番号に対応している。比較のために、対称座屈挙動における代表的な荷重段階での分布を Fig. 13 に示しており、これらも、Fig. 11 の $a \sim g$ に同様に対応している。

Fig. 12, Fig. 13 より、対称な分布(点 1)から非対称な分布(点 2 ~ 5)、やがてまた対称な分布(点 6)になることがわかる。曲げモーメントの分布には非対称座屈挙動の影響が顕著に現われており、点 2 ~ 5 の状態では、負の曲げモーメントが発生する範囲が増えてくる。それに比べ面内力には非対称座屈挙動の影響はさほど見られない。

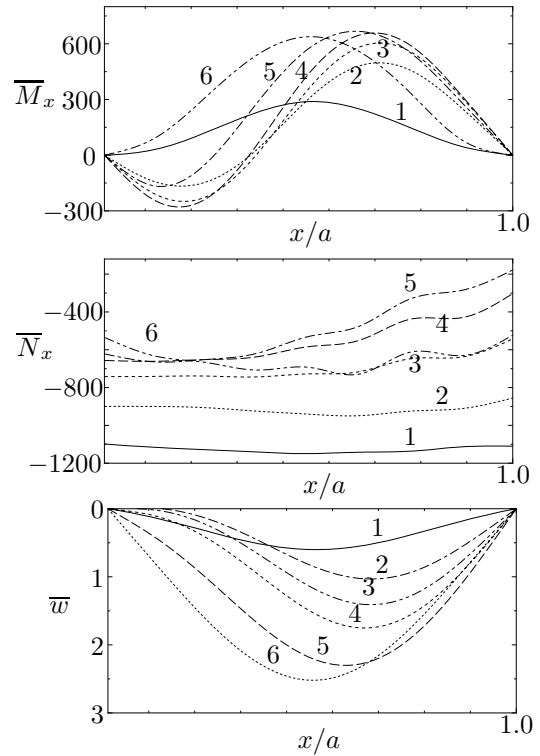


Fig. 12 非対称座屈挙動における $\bar{M}_x, \bar{N}_x, \bar{w}$ の分布

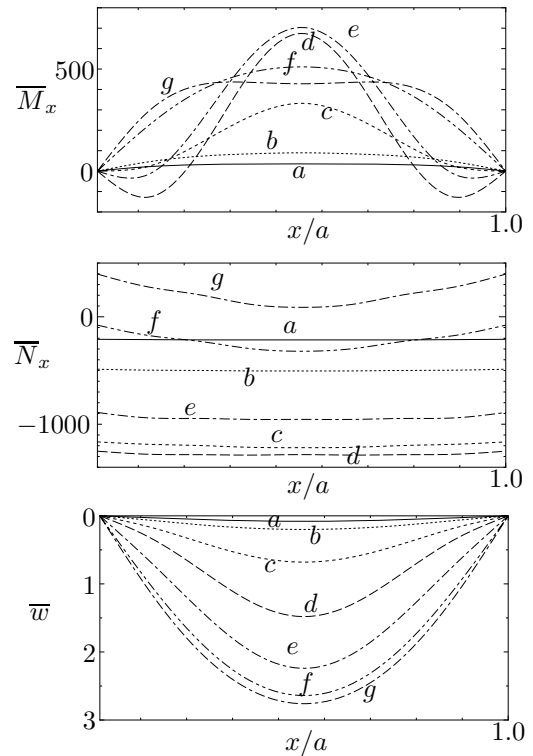


Fig. 13 対称座屈挙動における $\bar{M}_x, \bar{N}_x, \bar{w}$ の分布

6 まとめ

本論文では、積層偏平シェルの幾何学的非線形解析問題の一解析手法として、離散的近似解法を用いた解析法を提示した。本解析法による解析結果と、既往の解との比較により本解析法による数値解は、一様に収束性を持つこと、比較的粗い分割による解析においても事実上十分の精度を持つ解が得られることなどが確認された。

また、飛び移り現象の追跡も可能であり、積層数、板厚、曲率、支持条件の違いによる対称座屈挙動に及ぼす影響を明らかにすることができた。

さらに、対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈挙動の追跡も可能であり、対称座屈挙動における曲げモーメント、面内力の分布の比較により、非対称座屈挙動における応力状態を明らかにすることができた。

最後に、本研究を遂行するにあたり、数値計算を行って戴いた末宗英隆氏(研究当時、大学院博士前期課程2年)に感謝申し上げます。

参考文献

- (1) 福田 博: 複合材料の力学序説, 古今書院 (1977)
- (2) 森田千尋, 崎山 毅, 松田 浩, 鈴木夷浩: クロスプライ積層偏平シェルの幾何学的非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.59-64 (1995)
- (3) Liao, C.L. and Readdy, J.N: Analysis of Anisotropic, Stiffened Composite Laminates Using a Continuum-Based Shell Element, *Comput.Structures*, Vol.34, No.6, pp.805-815 (1990)