

第1章 状態方程式

現代制御理論では、制御対象や制御器を状態方程式で表して解析や設計を行う。本章では、制御対象の状態方程式の導き方と応答の計算法や安定解析を述べる。

1.1 状態方程式

制御対象やフィードバック制御システムを連立微分方程式で記述してシステムの解析や設計を行うことがある。これは応答の計算や現代制御理論などで用いられる。

図 1-1 の制御対象で説明しよう。入力（操作量）は電源電圧 $e(t)$ であるが、出力をコンデンサの電圧 $v(t)$ としよう。電源電圧 $e(t)$ は直流電源の記号を用いているが、自由に電圧が変えられるものとする（以下同様）。微分方程式は、

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + v \quad (1-1)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1-2)$$

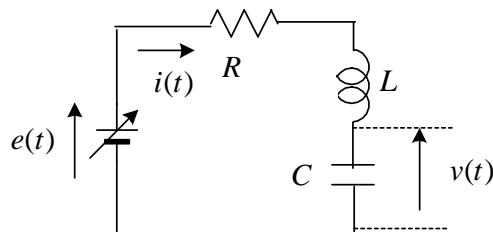


図 1-1 制御対象の例 (RLC 回路)

となる。**状態方程式**(state equation)は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \quad (1-3)$$

連立微分方程式で、微分を左辺におき、右辺は左辺の変数と入力だけを使って表す。

入力は自由に変えることができる量で、電気回路では電源である。一方、出力は、目的で異なるが、通常センサで検出する量である。電圧 v を出力とする場合、**出力方程式**(output equation)は次式で与えられる。

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

出力は状態方程式の変数を使って表すもので、それ以外の変数を使ってはいけない。

次に DC モータの状態方程式を導く。図は DC モータの等価回路である。

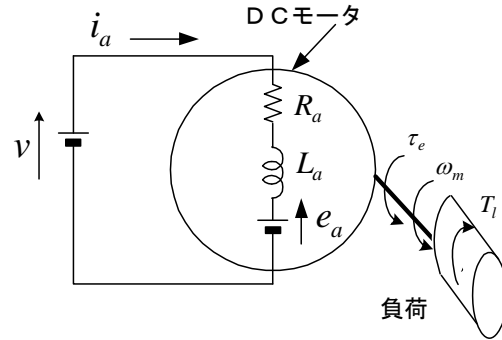


図 1-2 制御対象の例(DC モータ)

回路の式は,

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\Phi\omega_m \quad (1-5)$$

ここで、 v : 電源電圧[V], i_a : 電機子電流[A], $e_a = K\Phi\omega_m$: 誘導起電力[V]

K : 定数, Φ : 界磁磁束[Wb] (一定)

R_a : 電機子巻線の抵抗[Ω], L_a : 電機子巻線のインダクタンス[H]

$\omega_m = 2\pi \frac{N}{60}$: 回転角速度[rad/s], N : 1 分間の回転数[min^{-1}]

モータの負荷としてはいろいろあるが、モータと負荷が一体となって回転すると考えることが多い。この場合、運動方程式が以下の様に表される。

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = K\Phi i_a - R_m \omega_m - T_l \quad (1-6)$$

ここで、 $\tau_e = K\Phi i_a$: 発生トルク[Nm], J : 慣性モーメント[kgm^2] (DC モータ+負荷)

R_m : 制動係数[Nms], T_l : 負荷トルク[Nm]

入力は電源電圧 $v(t)$ であり、状態方程式を求めると、以下の様になる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K\Phi/L_a \\ K\Phi/J & -R_m/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J \end{bmatrix} T_l \quad (1-7)$$

ここで、負荷トルク T_l の項は、制御には利用できない外乱である。外乱は入力と同じように考えて定式化する。

出力を回転角速度とすると出力方程式は、次式となる。

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

この様に、一般に m 入力、 l 出力の制御対象は、**状態方程式**(state equation) :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-9)$$

成分表示 :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

出力方程式(output equation) :

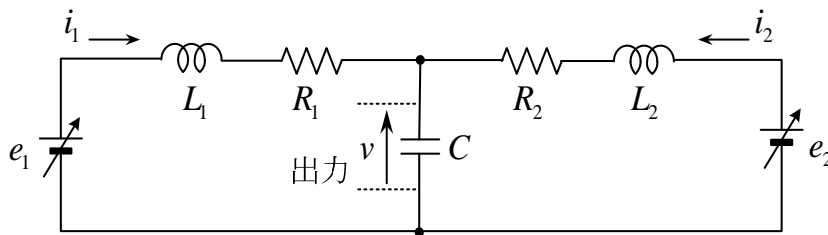
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-10)$$

成分表示 :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \cdots & d_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

により記述できる。 \mathbf{x} は**状態変数ベクトル**(state variable vector)と呼ばれ、成分を**状態変数**(state variable)という。 \mathbf{u} は入力ベクトル、 \mathbf{y} は出力ベクトルである。状態変数は(1-9)の様に整理できるなら、何を選んでも良い。電気回路のシステムでは、コイルの電流とコンデンサの電圧（または電荷）を選ぶと良い。状態変数の選び方やその順序は自由で、状態方程式の書き方は人により異なる。入力 \mathbf{u} は、我々が直接自由に変えることができる量であるが、状態変数は入力を変えることで間接的に変化する量である。以下、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ が定数（時不変）の場合だけを考える。なお、先の例にもあるように $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ の場合が多い。1入力の1出力の場合は、 \mathbf{B}, \mathbf{C} はベクトル、 \mathbf{D} はスカラとなる。

問題 1-1 図の制御対象の状態方程式と出力方程式を求めよ。 e_1, e_2 が入力、 v を出力とする。



$$(解) \quad e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + v \quad , \quad e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_1 + i_2$$

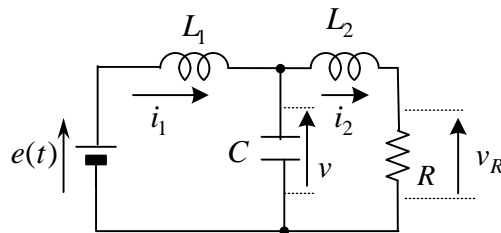
状態方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

出力方程式

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

問題 1-2 図の制御対象の状態方程式, 出力方程式を求めよ。ただし, 出力は, v_R とする。



(解) 状態方程式

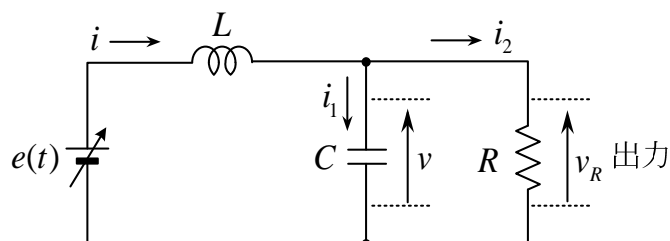
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

出力方程式

$$v_R = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

* $v_R = R i_2$ なので, i_2 の代わりに v_R を状態変数に選ぶことも可能である。つまり, i_1, v_R, v を選んでも良い。第3章で詳しく述べるが, 微分や積分を含まないで表せるなら, どちらを状態変数に選んでも良い。

問題 1-3 状態方程式と出力方程式を求めよ。



(解)

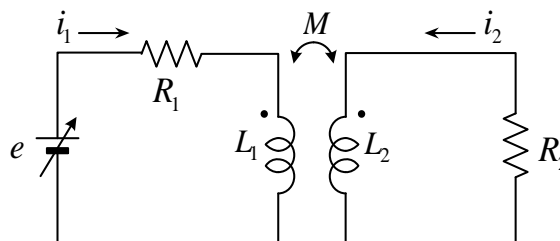
$$\text{状態方程式: } \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/(RC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$\text{出力方程式: } v_R = \begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

- * $v = Ri_2$ なので、 v の代わりに i_2 を状態変数に選ぶことも可能である。
 $i_2 = i - i_1$ なので、 i_2 の代わりに i_1 を状態変数に選ぶことも可能である。
 つまり、 i, i_1 と e だけで状態方程式を作ることが可能である。

$$\text{そのとき出力方程式は } v_R = \begin{bmatrix} R, & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_1 \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

問題 1-4 状態方程式を求めよ。



$$\text{(解) } e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

状態方程式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_2 R_1}{\Delta} & \frac{MR_2}{\Delta} \\ \frac{MR_1}{\Delta} & -\frac{L_1 R_2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta} \\ -\frac{M}{\Delta} \end{bmatrix} e$$

ただし、 $\Delta = L_1 L_2 - M^2$

1.2 時間応答の計算

状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

を解く方法を述べよう。これは、初期値に対し応答を求めることを意味する。ラプラス変換して(ベクトルのラプラス変換は各成分のラプラス変換),

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (1-11)$$

$$\therefore \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (1-12)$$

但し, \mathbf{I} : **単位行列**(identity matrix) (対角成分が 1, 他は 0)
逆ラプラス変換し, 第 2 項には **畳み込み積分**(convolution integral)を適用して,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (1-13)$$

ここで, $e^{\mathbf{A}t}$ は, **状態推移行列**(state transition matrix)と呼ばれ, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \end{aligned} \quad (1-14)$$

$e^{\mathbf{A}t}$ には, 以下の性質がある。

$$(1) \quad \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \quad (1-15)$$

$$(2) \quad e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \quad (1-16)$$

$$(3) \quad e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} \quad \text{一般に, } e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad (1-17)$$

$$(4) \quad (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (1-18)$$

$$(5) \quad L[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (1-19)$$

$$L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = e^{\mathbf{A}t} \quad (1-20)$$

ここで, L : **ラプラス変換**(Laplace transform), L^{-1} : **ラプラス逆変換**(inverse Laplace transform)

(5)の証明 まず, $(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$ ① を証明する。

左辺に $sI - A$ を掛けると, 単位行列になる。右辺について,

$$\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots\right)(sI - A) = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s^2} - \dots = I$$

であるから, ①が成立する。①を逆ラプラス変換すると, (1-14)となる。

(1-14)は, 以下の式と対応する。

テイラー展開(Taylor expansion)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots$$

マクローリン展開(Maclaurin expansion) ($a=0$, $h=x$ とおく)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

e^{At} の計算法について述べる。

(1) **ラプラス逆変換による方法**

(1-20) を用いる方法。逆行列を計算する必要があるから, 手計算向き。

A が 3×3 (3行3列) 位までしかできないだろう。

(2) **級数展開による方法**

(1-14) を用いる方法で, 項は段々小さくなり, $k=10$ 程度でもかなり良い近似が得られるだろう。コンピュータによる数値計算向きである。

(3) **行列の対角化による方法**

制御理論を考える場合に便利である。

以下に, **行列の対角化**による方法を述べる。

A を $n \times n$ 行列として, 述べよう。 A の **固有値**(eigenvalue) s_1, s_2, \dots, s_n (一般に複素数) が全て異なるとき, A は次式で表される。

$$A = P Q P^{-1} \tag{1-21}$$

$$\text{ここで, } Q = \begin{bmatrix} s_1 & & & \mathbf{0} \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix}, P = [u_1, u_2, \dots, u_n] \tag{1-22}$$

P, Q はいずれも, $n \times n$ 行列である。固有値 s_i に対する一つの固有ベクトル(eigenvector)を

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix} \text{ とすると, (1-21)は, 固有値の定義}$$

$$A \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-23)$$

より導ける。すなわち, 以下の式より出る。行列と成分の掛け算はサイズが合えば可能。

$$A P = A [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] = [A \mathbf{u}_1 \ A \mathbf{u}_2 \ \dots \ A \mathbf{u}_n] = [s_1 \mathbf{u}_1 \ s_2 \mathbf{u}_2 \ \dots \ s_n \mathbf{u}_n] = P Q \quad \therefore A = P Q P^{-1}$$

$P Q$ になる部分を $n = 3$ のとき証明する。

$$P Q = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 u_1^1 & s_2 u_2^1 & s_3 u_3^1 \\ s_1 u_1^2 & s_2 u_2^2 & s_3 u_3^2 \\ s_1 u_1^3 & s_2 u_2^3 & s_3 u_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{bmatrix} & s_2 \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{bmatrix} & s_3 \begin{bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

行列の対角化を用いることで, 次式により A^k が計算できる。対角化のすごいところである。

$$A^k = P Q P^{-1} P Q P^{-1} P Q P^{-1} \dots P Q P^{-1} \\ = P Q^k P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} s_1^k & & & \mathbf{0} \\ & s_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad (1-24)$$

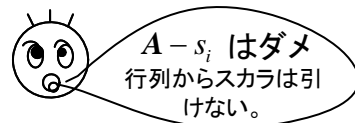
A の固有値の計算 (1-23)より

$$(A - s_i I) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

$A - s_i I$ の逆行列が存在すると, $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ となり, つまらない。固有値は, この逆行列が存在しない条件,

$$|A - sI| = 0 \quad \text{または,} \quad |sI - A| = 0 \quad (1-25)$$

より計算できる。[] 行列, || 行列式をしっかりと区別すること。行列式はスカラーである。



$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \text{ 単位行列 } n \times n$$

(1-21)を用いると,

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}^2 t^2)/2! + (\mathbf{A}^3 t^3)/3! + \dots \\
 &= \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}t + (\mathbf{Q}^2 t^2)/2! + (\mathbf{Q}^3 t^3)/3! + \dots)\mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 + s_1 t + \frac{s_1^2 t^2}{2} + \dots & & & 0 \\ & 1 + s_2 t + \frac{s_2^2 t^2}{2} + \dots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + s_n t + \frac{s_n^2 t^2}{2} + \dots \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \tag{1-26}
 \end{aligned}$$

これは、安定性を検討する場合に制御理論で用いられる。

例題 1-1 次の状態方程式の解を求めよ。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

(ラプラス変換による方法)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

とおく。成分ごとにラプラス逆変換して求める。

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= L^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= L^{-1} \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \\
 &= L^{-1} \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{s+3} & -\frac{1}{s+4} \\ \frac{2}{s+3} & -\frac{2}{s+4} \end{array} + \begin{array}{cc} \frac{-1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{-1}{s+3} & \frac{2}{s+4} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) + 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

故に,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{At} \mathbf{x}(0) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

(行列の対角化による方法)

\mathbf{A} の固有値を求め, 固有ベクトルによる対角化を行う。

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4) = 0$$

よって, \mathbf{A} の固有値は $s = -3, -4$ である。

$$s_1 = -3 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に, $x_1 = x_2$ よって, s_1 に対する固有ベクトルは, 簡単な場合を選んで

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 1]^T$$

とする。(両方 0 以外なら自由に選んでよい)

$$s_2 = -4 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に, $2x_1 = x_2$ よって, s_2 に対する固有ベクトルは, 簡単な場合を選んで

$$\mathbf{u}_2 = [1 \ 2]^T$$

とする。

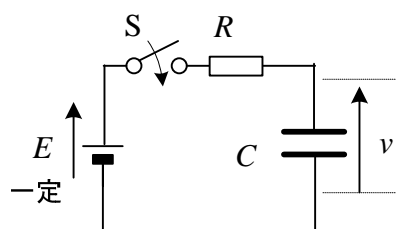
$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ とすると, } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ と確かになる。}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(-3t) & 0 \\ 0 & \exp(-4t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) + 2\exp(-4t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。以下, 同様に。

例題 1-2 状態方程式の解の公式を利用して、 $v(t)$ を求めよ。 $v(0) = v_0$ とする。



(解) $E = RC \frac{dv}{dt} + v$ より状態方程式は、 $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC}v + \frac{1}{RC}E$

公式 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ より

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{t}{RC}}v_0 + \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \frac{E}{RC} d\tau = e^{-\frac{t}{RC}}v_0 + e^{-\frac{t}{RC}} \frac{E}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau \\ &= E + (v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

問題 1-5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ のとき、 e^{At} を

(1) ラプラス変換, (2) 行列の対角化
により求めよ。

(解) $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-3t})/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

ヒント (2) の場合 固有値 0, -3 となる。0 に対する固有ベクトルは $x_2 = 0$ より、例えば x_1 を 1 に選ぶ。 $e^{0t} = 1$ であることに注意。

応答を計算するには、(1-13)を用いることもできるが、簡単な場合(状態変数が2個程度)を除いて、コンピュータにより状態方程式(1-9)を直接数値積分することが簡単である。数値積分による方法は、入力のいろいろの変化や非線形の状態方程式に対しても適用できる。この際に、制御用の市販ソフトウェアであるマトラブ(MATLAB)も良く用いられている。

以下に数値積分による時間応答の計算法を示す。

前進オイラー法(forward Euler's method)は簡単だが精度が悪いので一般には使われないが、最も基本的な方法である。次に示す2次の非線形システムを例にとり、説明する。

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad (1-27)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad (1-28)$$

前進オイラー法では、この微分方程式を、きざみ h (微小量) で次のように差分近似する。

$$\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} \approx f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} \approx f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

これから、以下の式を用いて t の値から、 $t+h$ の値が求まる。

$$k_1 = h f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_1 \text{ の } t \text{ での増分 } f_1 \text{ は傾き}$$

$$k_2 = h f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_2 \text{ の } t \text{ での増分 } f_2 \text{ は傾き}$$

$$x_1(t+h) = x_1(t) + k_1 \quad ; \text{増分の加算}$$

$$x_2(t+h) = x_2(t) + k_2 \quad ; \text{増分の加算}$$

$t+h$ の値が求まると、同様にして $t+2h$ の値が計算でき、以下次々に x_1, x_2 が計算できる。一般の非線形システム (線形システムを含む)

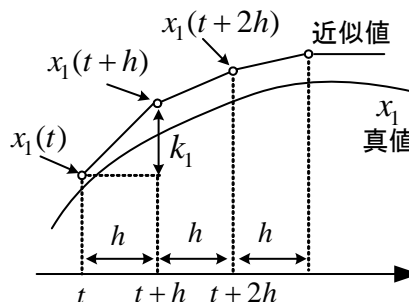
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (1-29)$$

の場合、前進オイラー法による数値積分は次式で与えられる(単に行列表示しただけ)。

$$K = h f(x(t), u(t)) \quad (1-30)$$

$$x(t+h) = x(t) + K \quad (1-31)$$

次に、2次の**ルンゲ・クッタ法**(Runge-Kutta method)を紹介する。まず(1-27), (1-28)の2次の非線形システムを例に説明する。2次のルンゲ・クッタ法では、次のように差分近似することにより求める。



$$k_{11} = h f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_1 \text{ の } t \text{ での増分}$$

$$k_{21} = h f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_2 \text{ の } t \text{ での増分}$$

$$k_{12} = h f_1(x_1(t) + k_{11}, x_2(t) + k_{21}, u(t+h)) \quad ; x_1 \text{ の } t+h \text{ での増分}$$

$$k_{22} = h f_2(x_1(t) + k_{11}, x_2(t) + k_{21}, u(t+h)) \quad ; x_2 \text{ の } t+h \text{ での増分}$$

$$x_1(t+h) = x_1(t) + (k_{11} + k_{12})/2 \quad ; \text{増分の平均値加算}$$

$$x_2(t+h) = x_2(t) + (k_{21} + k_{22})/2 \quad ; \text{増分の平均値加算}$$

$t+h$ での微分値を使いたいが、そこでの x_1, x_2 の値はこれから求めようとしているので未知であり、仕方なく前進オイラー法で求めた x_1, x_2 値を使う。それでも前進オイラー法より同じ刻みに対する精度は良くなる。一般の場合に行列表示すると次式で表せる。

$$\mathbf{K}_1 = h \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1-32)$$

$$\mathbf{K}_2 = h \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1, \mathbf{u}(t+h)) \quad (1-33)$$

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)/2 \quad (1-34)$$

例題 1-3 次の非線形微分方程式を前進オイラー法，2次のルンゲクッタ法で解くFORTRANのプログラムを作れ。

$$\frac{dx}{dt} = x \sin(2t) + 1$$

$t=0$ から、きざみ $h=0.001$ で、 $t=0.1$ まで計算する。 $x(0)=1.0$ とする。

(解) オイラー法

```

X = 1.0
T = 0.0
H = 0.001
DO 200 I=1,100
    X=X+H*(X*SIN(2.0*T)+1.0)
    T=T+H
    WRITE(*,*) T,X
200 CONTINUE
STOP
END
```

DO文は文番号200までを
I=1,2,...100と変化して
ぐるぐる回る。
データ出力

2次のルンゲクッタ法

```
X=1.0
T=0.0
H=0.001
DO 100 I=1,100
  K1=H*(X*SIN(2.0*T)+1.0)
  K2=H*((X+K1)*SIN(2.0*(T+H))+1.0)
  X=X+(K1+K2)*0.5
  T=T+H
  WRITE(*,*)T,X
100 CONTINUE
STOP
END
```

例題 1-4 初期値 $x_1(0) = 1.0$, $x_2(0) = 0.0$ の非線形微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = (1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

をきざみ $h = 0.2$ で $0 \sim 4$ 秒間, 前進オイラー法で求めるプログラムを作れ。

(解) $X_1=1.0$
 $X_2=0.0$
 $T=0.0$
 $H=0.2$

DO 10 I=1, 20

DX1=X2

DX2=(1.0-X1**2)*X2-X1

X1=X1+DX1*H

X2=X2+DX2*H

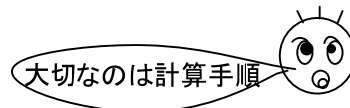
T=T+H

WRITE(*,*)T,X1,X2

10 CONTINUE

STOP

END



*以下のプログラムはなぜいけないか?

省く

省く

X1=X1+X2*H

X2=X2+((1.0-X1**2)*X2-X1)*H

* X2 の計算のとき, 新しい X1 が入るから。

1.3 安定判別

安定にもいろいろの定義があるが、ここでは、状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

において、 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、時間 t が十分たつと、 \mathbf{x} がある値に落ち着いて変化しなくなる場合を安定であると呼ぶことにしよう。このときの \mathbf{x} の値は、定常値と呼ばれ、 $d/dt = 0$ とおくことにより、次式で求まる。

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-35)$$

状態方程式の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

であるから、 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-36)$$

となる。 \mathbf{A} の固有値がすべて異なるとき、(1-26)より、

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

と書ける。 \mathbf{P} は定数だから、 $e^{\mathbf{A}t}$ は $\exp(s_k t)$: $k=1 \sim n$ により時間的变化が支配される。

一方、積分については、

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau &= \int_0^t \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{A}\tau + (\mathbf{A}^2\tau^2)/2! + (\mathbf{A}^3\tau^3)/3! + \dots \right\} d\tau \\ &= \left[\mathbf{I}\tau + \mathbf{A}\tau^2/2! + (\mathbf{A}^2\tau^3)/3! + (\mathbf{A}^3\tau^4)/4! + \dots \right]_0^t \\ &= \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (1-37)$$

である。やはり、 $e^{\mathbf{A}t}$ で支配される。

そこで、 $e^{\mathbf{A}t}$ について考えると、 $s = \alpha + j\beta$ のとき、

$$e^{st} = e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t)$$

であるから、 $\alpha < 0$ であれば、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $\exp(st) \rightarrow 0$ となる。従って、 A のすべての固有値 s_k の実部が負であれば、

$$e^{A\infty} = \mathbf{0} \quad (1-38)$$

となる。よって、(1-36), (1-37)より

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

となり、定常値に落ち着く。従って、次の重要な定理を知る。



『線形時不変システム $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ で、入力 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、 $\mathbf{x}(\infty)$ が一定の値に落ち着くときシステムは安定（漸近安定）であると言われ、この必要十分条件は、 \mathbf{A} の全ての固有値の実部が負（左半平面にあるとき）となることである。』

なお、 $\mathbf{u}(t)$ が一定でない場合にも、 $\mathbf{u}(t)$ を $\mathbf{x}(t)$ に関係なく与えるならば、上記の定理は成り立つ。つまり安定条件は $\mathbf{u}(t)$ に関係ない。さらに、 \mathbf{A} の固有値に重根がある場合にも上記の定理は成り立つことが判っている。

次に、伝達関数の求め方につき述べる。1入力1出力の場合を考える。

$$\text{状態方程式} \quad : \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\text{出力方程式} \quad : \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

につき考える。上式をラプラス変換して、

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$$

を得る。初期値 $\mathbf{x}(0)$ を 0 とおいて、

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad \therefore \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

制御対象の**伝達関数**(transfer function) $G(s)$ は、

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (1-39)$$

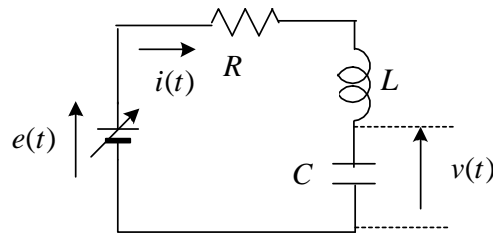
となる。ここで、 adj は、**余因子行列**を示す。伝達関数の分母を 0 とおいたものが**特性方程式**(characteristic equation)だから、特性方程式は、

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1-40)$$

となる。**特性方程式の根(特性根)**(characteristic root)は、 \mathbf{A} の固有値と等しいことが判る。古典制御理論で、特性根が左半平面にあればシステムは安定であることが判っているが、これは、上述の定理と全く一致する。



例題 1-5 図の制御対象の伝達関数を求めよ。ただし、出力は $v(t)$ とする。



[解 1] 微分方程式を立てると、

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v(t), \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

ラプラス変換して、初期値を 0 とおくと

$$E(s) = RI(s) + LsI(s) + V(s), \quad I(s) = CsV(s)$$

よって、
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

[解 2] 状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e$$

出力方程式：

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} &= [1, 0] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \\ &= [1, 0] \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} = \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

よって、
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

◎ 行列式, 逆行列の公式

$n \times n$ 行列 A の第 i 行と第 j 列を省いてできた $(n-1) \times (n-1)$ の行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを M_{ij} とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき, 例えば, } M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \text{行列式 (determinant): } |A| &= \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} M_{ij} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{adj}(A) \\ \swarrow \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{逆行列 (inverse matrix): } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

逆行列が存在するには, $|A| \neq 0$ でないといけない。

$$\text{余因子行列 (adjoint matrix): } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}^T$$

T は, 転置行列 (transpose of matrix) を意味する。

◎ 逆行列, 転置行列の基本公式

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{注 } (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} \quad (\text{成立しない})$$

$$(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \text{注 } AB \neq BA \quad (\text{成立しない})$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T, (ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^T)^T = A, (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (I: \text{単位行列})$$

$$AI = IA = A$$

(注) 転置行列は正方行列でなくてもよいが, 逆行列は正方行列でないと定義できない。