第2章　PID 制御系の状態方程式

比例制御(proportional control)，**積分制御**(integral control)，**微分制御**(derivative control)を組み合わせた PID 制御は，古典制御に属するが実際に良く用いられている。本章では PID 制御系の状態方程式による表現と安定解析を考える。状態方程式に慣れるのが目的である。

2.1　P 制御系

1 入力 1 出力の制御対象が，状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \tag{2-1}$$

と，出力方程式

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{2-2}$$

で記述されるとき，y をセンサで検出し，入力 $u(t)$ を次式で P 制御する。

$$u(t) = K_p(y^* - y) \tag{2-3}$$

y^* は目標値（指令値）である。この閉ループ制御系を図 2-1 に示す。(2-2)とブロックの書き方に注意せよ。$y = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}$ ではなく，入力の左からブロックの行列を掛ける。

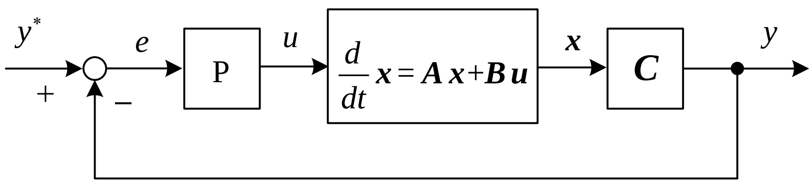


図 2-1　P 制御系

(2-2)を(2-3)に代入して，それを(2-1)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}K_p\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}K_p\, y^* \tag{2-4}$$

これを，次式で表す。この場合はスカラなので順序は関係ない。

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}'y^* \tag{2-5}$$

ただし，$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}K_p\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}K_p$

(2-1)の制御対象だけを考える場合，$\boldsymbol{A}$ の固有値で安定判別ができた。その場合，我々は入力 $u(t)$ を自由に与えることができた。しかし，図 2-1 では，$u(t)$ は自動的に変化する。そ

の代り，今度は目標値（指令値） y^* を自由に与えることができる。従って，(2-5)より図 2-1 の閉ループ制御系の安定判別は $\boldsymbol{A}'$ の固有値により可能となる。すなわち， $\boldsymbol{A}'$ の全ての固有値の実部が負であれば安定である。

2.2　PI 制御系

y を検出し，入力 $u(t)$ を次式で PI 制御する図 2-2 のシステムを考える。

$$u(t) = K_p(y^* - y) + K_I \int_0^t (y^* - y)dt \tag{2-6}$$

ここで， K_p を比例ゲイン， K_I を積分ゲインと言う。

比例制御は，現在の偏差が大きい程，入力を大きくして偏差をなくそうとするもので，最も自然な制御法と考えられる。ここで，制御対象は入力 $u(t)$ を大きくすれば，出力 $y(t)$ も大きくなるであろうとの前提がある。ところが，比例制御だけの場合には，指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致する場合，入力 $u(t) = 0$ となってしまう。一般に，入力が 0 であれば，出力も 0 となることが多いから，比例制御だけでは指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致することはあり得ないことになる。すなわち，**定常偏差**(steady-state error)が残り，望ましくない。

そこで，積分制御を加えてステップ応答（指令値 $r(t)$ が一定）の定常偏差を 0 にする。積分制御を加えるとステップ応答の定常偏差が 0 となる理由は以下のように考えるとよい。もし，指令値 r (一定)と出力 $y(t)$ が一致しない場合，その差の積分値は増加または減少し $u(t)$ が一定になることはない。これは定常状態と言えない。従って，指令値が一定であるならば，定常状態では $u(t)$ が一定になるので，そのとき指令値 r と出力 $y(t)$ は一致する必要がある。なお，定常状態で r と $y(t)$ が一致しても，積分器の出力は 0 ではなく，それまでの積分値が残ったままである。この積分値は制御対象との関係で決る。積分制御は，指令値のステップ変化に対する定常偏差を 0 にするという利点があるが，過去から現在までの情報を現在の入力に反映する結果，タイミング（位相）が遅れて不安定にする危険性をもっている。従って，積分制御だけを用いることはまれである。

図 2-2 の PI 制御系で，最終的には，(2-5)のように状態方程式を作りたいが，(2-6)には積分があり工夫しないといけない。

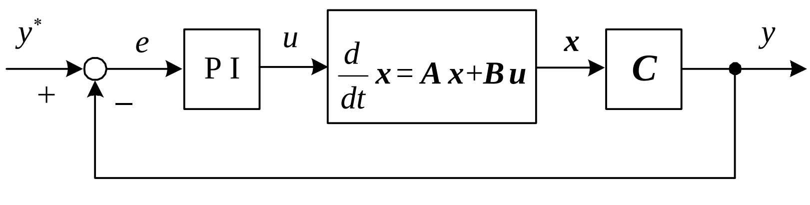


図 2-2　PI 制御系

コイルは電圧でなくその積分値の電流を，コンデンサでは電流でなくその積分値の電圧を状態変数に選ぶ。そこで，積分値

$$\int_0^t (y^* - y)dt = z \tag{2-7}$$

とおき， z を新しい状態変数として加えることにする。(2-7)より

$$\frac{dz}{dt} = y^* - y \tag{2-8}$$

が得られる。 z を用いると，(2-6) より次式が得られる。

$$u = K_p(y^* - y) + K_I z \tag{2-9}$$

(2-1)，(2-2)，(2-8)及び(2-9)より次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}K_P\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}K_P \\ 1 \end{bmatrix} y^* \tag{2-10}$$

上式は，次式のように書け，図 2-2 の状態方程式となっている。

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{B}'y^* \tag{2-11}$$

従って，系全体の安定性は，

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}K_P\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

の固有値によって決定できる。例えば， K_p をパラメータとして変化させ， $\boldsymbol{A}'$ の固有値を計算しプロットすると，古典制御理論の根軌跡と同じものが得られる。

例題 2−1　次の微分方程式で記述される制御対象がある。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = u(t) \qquad ①$$

$x(t)$ を検出し，目標値 $x^*(t)$ との偏差をとり， $u(t)$ を次式のように PI 制御する。

$$u(t) = K_P(x^* - x) + \frac{K_P}{T_I}\int_0^t (x^* - x)dt \qquad ②$$

このとき，系全体の状態方程式及び安定条件を求めよ。但し， $T_I = 0.1$ とする。

（解）まず，制御対象の状態方程式を導く。

$$x = x_1 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = x_2$$

とおくと，①より，

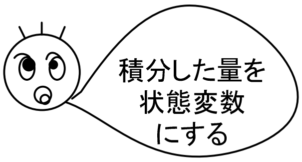
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 2x_1 + u$$

よって，制御対象の状態方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

PI 制御器については，

$$\int_0^t (x^* - x)dt = z$$



とおくと，

$$\frac{d\,z}{d\,t} = x^* - x$$

入力 $u(t)$ は，

$$u = K_P(x^* - x) + 10K_P\, z$$

入力 u を消去して，系全体の状態方程式は，次式のように求まる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2-K_P & -2 & 10K_P \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}'}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_P \\ 1 \end{bmatrix} x^*$$

$\boldsymbol{A}'$ の固有値を求める特性方程式は，

$$\left| s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}' \right| = s^3 + 2s^2 + (K_P + 2)s + 10K_P = 0 \qquad ③$$

となる。

ラウス(Routh)**の表**を作ると，

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & K_p + 2 \\ s^2 & 2 & 10K_p \\ s^1 & \dfrac{2(K_p+2) - 10K_p}{2} > 0 & \therefore K_p < \dfrac{1}{2} \\ s^0 & 10K_p > 0 & \end{array}$$

安定条件は 1 列目が全て同符号であることだから， $0 < K_p < \dfrac{1}{2}$

古典制御理論では，ラプラス変換してブロック線図を作り，特性方程式を求めた。この例題について特性方程式を求めてみよう。

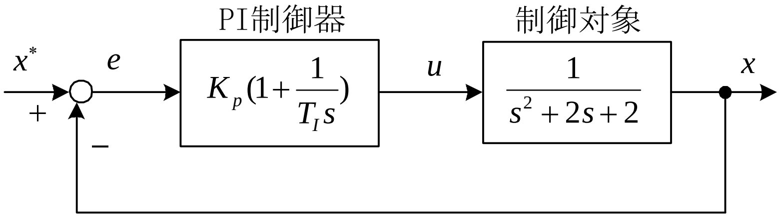
PI 制御の②をラプラス変換して，初期値を 0 とすると次式を得る。

$$U(s)=(K_p+\frac{K_P}{sT_I})(X^*(s)-X(s))$$

従って，PI 制御器の伝達関数$C(s)$は，次式で与えられる。

$$C(s)=K_p+\frac{K_P}{sT_I}$$

① の制御対象もラプラス変換して初期値を0とおくことにより，ブロック線図が得られる。



特性方程式は，
$$1+\frac{K_p(1+\frac{1}{T_I s})}{s^2+2s+2}=0$$

$$\therefore\quad s^3+2s^2+(K_p+2)s+10K_p=0 \qquad (T_I=0.1)$$

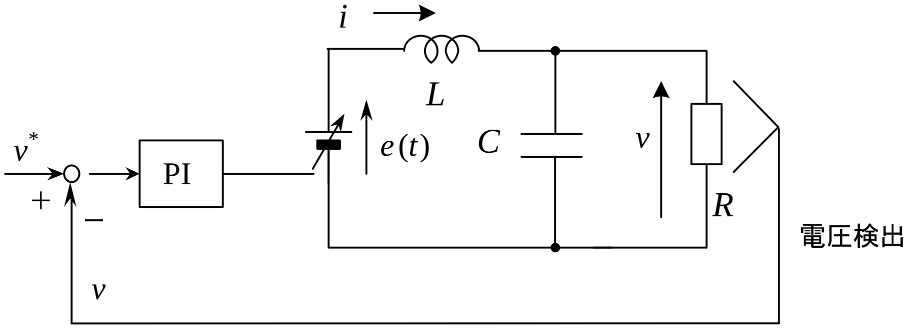
これは，③に一致する。

問題 2-1　(1) 系全体のブロック線図，閉ループ伝達関数$V(s)/V^*(s)$ を求めよ。ただし，

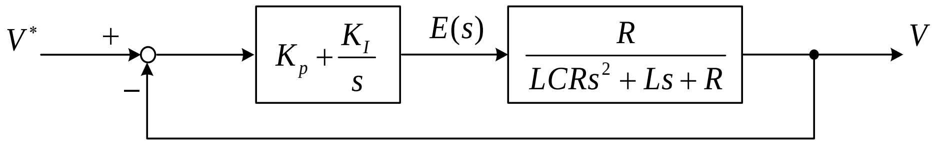
PI 制御器は次式で与えられる。

$$e(t)=K_p(v^*-v)+K_I\int_0^t(v^*-v)\,dt$$

(2) 系全体の状態方程式，特性方程式を求めよ。



（解）(1)
$$\frac{V(s)}{V^*(s)}=\frac{(K_p s+K_I)R}{LCRs^3+Ls^2+(R+K_pR)s+K_IR}$$



(2) $\int_0^t (v^* - v)\, dt = z$ とおくと系全体の状態方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+K_p}{L} & \frac{K_I}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{L} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v^*$$

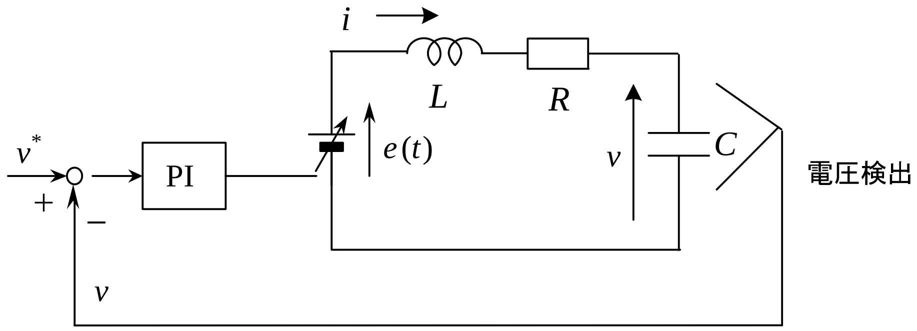
$|s\boldsymbol{I} - A| = 0$ より $\therefore LCRs^3 + Ls^2 + R(1+K_p)s + RK_I = 0$

問題 2-2 (1) 系全体のブロック図, 閉ループ伝達関数 $V(s)/V^*(s)$ を求めよ。ただし,

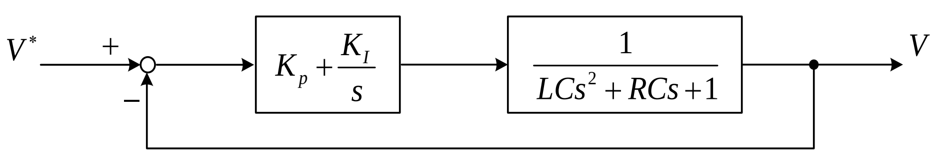
PI 制御器は次式で与えられる。

$$e(t) = K_p(v^* - v) + K_I \int_0^t (v^* - v)dt$$

(2) 系全体の状態方程式, 特性方程式を求めよ。また, 安定となる条件を求めよ。



（解）(1) ブロック線図



$$\frac{V}{V^*}=\frac{K_p s+K_I}{LCs^3+RCs^2+(1+K_p)s+K_I}$$

(2) $\int_0^t (v^*-v)\,dt=z$ とおいて系全体の状態方程式は，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1+K_p}{L} & \frac{K_I}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{K_p}{L} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v^*$$

$\left|s\boldsymbol{I}-A\right|=0$　より，　特性方程式は　$\therefore LCs^3+CRs^2+(1+K_p)s+K_I=0$

ラウスの表

$$\begin{array}{lll} s^3 & LC & 1+K_p \\ s^2 & CR & K_I \\ s^1 & \frac{CR(1+K_p)-LCK_I}{CR} & \\ s^0 & K_I & \end{array}$$

安定条件は 1 列目が全て同符号であることだから，

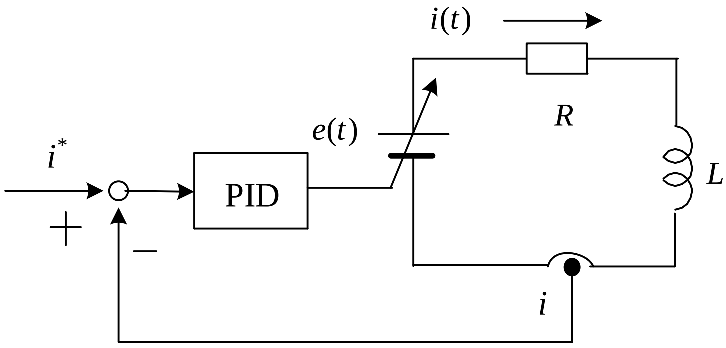
$$K_I>0,\ \ R(1+K_p)>L\,K_I$$

2.3　PID 制御系

図の *RL* 回路の電流を次式で PID 制御する場合を考える。

$$E(s)=(K_p+\frac{K_I}{s}+\frac{K_D\,s}{1+sT_D})\,(I^*(s)-I(s)) \tag{2-13}$$

純粋な微分制御はノイズの影響が大きいので，ローパスフィルタを通して微分するのが一般的である。この場合の系全体の状態方程式を導く。問題は微分制御の部分をどのようにして状態変数と関係付けるかであるが，ローパスフィルタも新しい状態変数を定義する必要がある。



制御対象の状態方程式は,

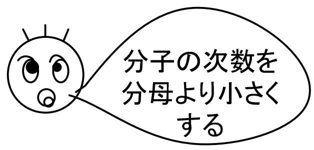
$$\frac{d\,i}{d\,t}=-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}e \qquad ①$$

積分器については, $\frac{1}{s}(I^*(s)-I(s))=Z_1(s)$ とおくと，ラプラス逆変換して,

$$\frac{d\,z_1}{d\,t}=i^*-i \qquad ②$$

$\frac{s}{1+sT_D}=\frac{1}{T_D}-\frac{1}{T_D(1+sT_D)}$ なので,

$$\frac{1}{1+sT_D}(I^*(s)-I(s))=Z_2(s)$$



とおくと, $(1+sT_D)Z_2(s)=I^*(s)-I(s)$ ，ラプラス逆変換して

$$\frac{d\,z_2}{d\,t}=-\frac{1}{T_D}z_2+\frac{1}{T_D}(i^*-i) \qquad ③$$

$E(s)$ を逆ラプラス変換して, $e=K_p\,(i^*-i)+K_I\,z_1+\frac{K_D}{T_D}(i^*-i)-\frac{K_D}{T_D}z_2$ ④

①～④より制御系全体の状態方程式は，次式で与えられる。

$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{T_D} & -\frac{1}{T_D} \\ \frac{K_I}{L} & -\frac{K_D}{LT_D} & -\frac{R}{L}-\frac{K_p}{L}-\frac{K_D}{LT_D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{T_D} \\ \frac{K_p}{L}+\frac{K_D}{LT_D} \end{bmatrix}i^*$$