

第4章 最適フィードバック制御

一般に言う現代制御理論の中心となる制御法が最適フィードバック制御である。過渡応答の評価関数を設定して、それが最小になるように制御ゲインを決定する。まず目標値を零とする場合を、次にそれを利用して一般の目標値に対する最適サーボシステムを示す。

4.1 レギュレータ

(A, B) が可制御である m 入力 of 制御対象

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad : A(n \times n), B(n \times m), x(n \times 1), u(m \times 1) \quad (4-1)$$

において、初期値 $x(0)$ が $\mathbf{0}$ でないとする。入力 $u(t)$ を制御して $x(t)$ をうまく $\mathbf{0}$ (原点) に収束させたい。入力 $u(t)$ をどの様に制御したらよいだろうか。

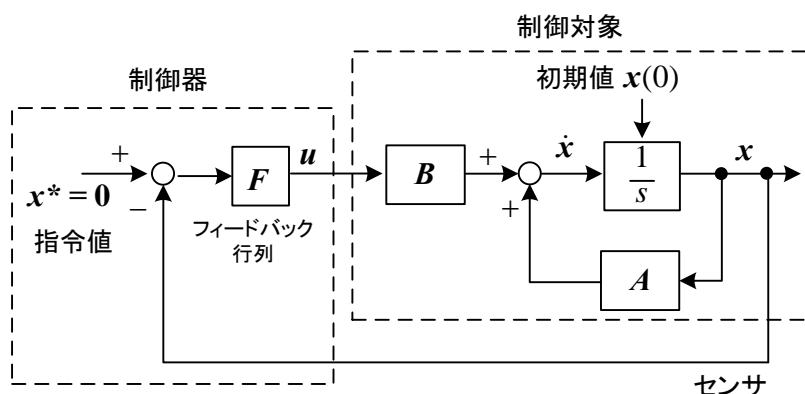


図 4-1 レギュレータ

最終的な定常状態 ($t = \infty$) では、 $d/dt = 0$ とすると、 $x(\infty) = -A^{-1}Bu(\infty)$ だから、 $x(\infty)$ が $\mathbf{0}$ なら $u(\infty)$ も $\mathbf{0}$ となる必要がある。いま、

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (4-2)$$

の変数が全て測定可能とする。このとき、

$$u(t) = -Fx(t) \quad (4-3)$$

ただし、

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

ベクトル x 行列 A ベクトル y

$$y = Ax$$

$y = xA$ はダメ

として制御したらどうだろうか。 \mathbf{x} が $\mathbf{0}$ になると、 \mathbf{u} も $\mathbf{0}$ になるので定常状態の条件は満足されている。(4-3)を**状態フィードバック制御**といい、 \mathbf{F} を**フィードバック係数行列**と言う。

(4-3)を(4-1)に代入して、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{x}(t) \quad (4-5)$$

(4-5)を閉ループシステムという。上式の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BF})t}\mathbf{x}(0) \quad (4-6)$$

となる。 \mathbf{F} をうまく選んで、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ を安定行列にできれば、任意の $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ に対して、 $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ となり、状態変数を原点に帰すことができる。このときの、目標値 $\mathbf{0}$ の閉ループシステムを**レギュレータ**という。 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を**レギュレータの極**といい、これが複素平面のより左側に設定できれば、より速く $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ となり、速応性の点では望ましい応答になると考えられる。

『定理』 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) が可制御であることと、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を任意の値に設定する行列 \mathbf{F} が存在することとは等価である。ただし、複素極を設定するときには、それと共役な極も同時に設定するものとする。

上記の定理は、 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) が可制御であれば行列 \mathbf{F} の選定により自由に応答が変えられることを意味する。注意すべき点は、 \mathbf{x} の全ての状態変数が検出できなければいけないこと、それに速く $\mathbf{0}$ に近づけようとするとう入力 \mathbf{u} が非常に大きな値となり現実的でなくなることがある。よって複素平面のより左側に極を設定することには限界がある。

\mathbf{F} をどの様に決定するかが、制御系の設計の問題である。次のような方法が考えられる。

- (1) \mathbf{F} を適当に選び、応答を調べる。応答が満足できるものであればその時の \mathbf{F} を採用する。簡単だが **trial and error**(試行錯誤)で効率的でない。
- (2) 望ましい $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を与えて、そのときの \mathbf{F} を計算する(**極配置**)。しかし、望ましい応答になっているかは応答を計算しないと判らない。だから、いくらか試行錯誤的となる。
- (3) ある評価関数を設定して、それが最小となるような \mathbf{F} を決定する(**最適レギュレータ**)。
 \mathbf{F} の最終的な決定は、やはり応答を計算して判断することになるので、評価関数の設定をやり直すこともある。

ここでは、1入力システムについて、(2)の極配置を述べる（最適レギュレータは次節で述べる）。

$A-BF$ の固有値の設定手順を以下に示す⁽⁵⁾。

手順1. A の特性方程式

$$|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (4-7)$$

と可制御性行列 $U_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ ($n \times n$)

を求め、可制御正準形式への変換行列 T をつくる。

$$T = U_c \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & \\ a_4 & & & & & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ a_n & 1 & & & 0 & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

手順2. 与えられた極 s_1, s_2, \dots, s_n に対し、 $A-BF$ が満たすべき特性多項式

$$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \dots + d_2 s + d_1 \quad (4-9)$$

の係数 d_1, d_2, \dots, d_n を求める。

手順3. F は次式により唯一に定まる。

$$F = [d_1 - a_1, d_2 - a_2, \dots, d_n - a_n] T^{-1} \quad (4-10)$$

(証明)

$$F' = FT = [f_1', f_2', \dots, f_n'] \quad (4-11)$$

とおくと、(3-12)より、 $A' = T^{-1}AT$, $B'F' = T^{-1}BFT$ であるから

$$\begin{aligned} |sI - A + BF| &= |T^{-1}T| |sI - A + BF| \\ &= |T^{-1}(sI - A + BF)T| \\ &= |sI - A' + B'F'| \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $A-BF$ と $A'-B'F'$ の固有値は一致する。右辺に(3-29)と(4-11)を代入して

$$\begin{aligned}
|sI - A' + B'F'| &= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1', \dots, f_n'] \right| \\
&= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_1 - f_1' & -a_2 - f_2' & \cdots & \cdots & -a_n - f_n' \end{bmatrix} \right| \\
&= s^n + (a_n + f_n')s^{n-1} + \cdots + (a_2 + f_2')s + (a_1 + f_1') \tag{4-12}
\end{aligned}$$

となる。

$n = 4$ の場合に説明しよう。

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad : M_{ij} \text{ は } i \text{ 行 } j \text{ 列を除いた小行列の行列式}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} s \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ b_2 & b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} b_1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{vmatrix} \\
&= s \left(s \begin{vmatrix} s & -1 \\ b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} \right) + b_1 (-1)^{2n} \\
&= s^4 + b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1 \quad b_1 \text{ から決まる。}
\end{aligned}$$

(4-12) が, (4-9) と一致しなくてはならないから,

$$f_k' = d_k - a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{4-13}$$

(4-10) より, F が求まる。

例題 4-1 DC モータの位置制御の問題を考える。制御対象が

$$J \frac{d\omega}{dt} = K\Phi i - R_m \omega, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{但し, } J, K, \Phi, R_m \text{ は定数}$$

で与えられる。ここでは簡単のため回路の式は無視し、電流 i を自由に変えられる入力と考える。位置 θ の目標値を 0 とし、状態フィードバック

$$i = -[f_1, f_2][\theta, \omega]^T$$

により、レギュレータの極を s_1, s_2 (いずれも負の実数) に配置するような f_1, f_2 を求めよ。

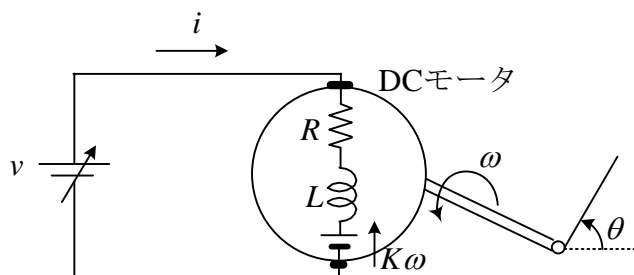


図 4-2 DC モータの位置制御

(解) 状態方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} i \quad \text{①}$$

$\mathbf{x} \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{B}$

$$\text{ただし, } a = \frac{R_m}{J}, \quad b = \frac{K\Phi}{J}$$

$$\text{手順 1. } |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{vmatrix} = s^2 + as \quad \therefore a_2 = a, \quad a_1 = 0$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b\mathbf{I}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{b}\mathbf{I}$$

$$\text{手順 2. } (s-s_1)(s-s_2) = s^2 - (s_1+s_2)s + s_1s_2 \quad \therefore d_1 = s_1s_2, \quad d_2 = -(s_1+s_2)$$

$$\text{手順 3. } \mathbf{F} = [f_1, f_2] = [d_1 - a_1, d_2 - a_2]\mathbf{T}^{-1}$$

$$= [s_1s_2/b, -(s_1+s_2+a)/b]$$

$$i = -\mathbf{F}\mathbf{x} = -[f_1, f_2]\mathbf{x} \quad \text{②}$$

(チェック) ②を①に代入して、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値が s_1, s_2 になっていることを確かめる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bf_1 & -a-bf_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$x \quad A-BF$

$$|sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ bf_1 & s + a + bf_2 \end{vmatrix} = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = (s - s_1)(s - s_2) = 0$$

よって $A - BF$ の固有値が s_1, s_2 であることが確認できた。

(注意) 実際のモータの位置制御では、任意の位置に静止させる必要がある。練習問題の1つのもとして取り上げた。

4.2 最適レギュレータ

図 4-1 のレギュレータで、 (A, B) が可制御である m 入力の制御対象

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad : A(n \times n), B(n \times m), \mathbf{x}(n \times 1), \mathbf{u}(m \times 1) \quad (4-14)$$

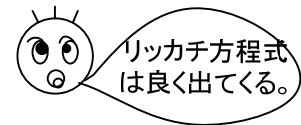
において、**評価関数**(performance index)

$$J = \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}(t)^T Q \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t) \} dt \quad (4-15)$$

を最小にする制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を求める。ここで、 $Q(n \times n)$ は**準正定対称行列**、 $R(m \times m)$ は**正定対称行列**であり、設計仕様として与えられる重み行列である。(4-15)を最小にする最適制御入力は次式で与えられる。証明は付録にある。

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1} B^T P \mathbf{x}(t) \equiv -F \mathbf{x}(t) \quad (4-16)$$

ここで、 F : **最適フィードバック行列**(optimal feedback coefficient matrix)。 $P(n \times n)$: 正定対称行列



P は次式に示す**リッカチ方程式** (Riccati equation) より求まる。

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4-17)$$

このとき評価関数の最小値は次式で与えられる。

$$J_{\min} = \mathbf{x}(0)^T P \mathbf{x}(0) \quad (4-18)$$

(4-16)を(4-14)に代入して、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(t) \quad (4-19)$$

となる。(4-19)の閉ループシステムを**最適レギュレータ**という。

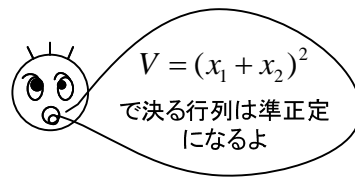
◎ **正定行列 \mathbf{A}** ($\mathbf{A} > 0$ と書く)

対称行列 \mathbf{A} についての二次形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が $\mathbf{0}$ でない \mathbf{x} に対し正のとき、行列 \mathbf{A} を正定行列という。必要十分条件は、 \mathbf{A} の先頭主座小行列がすべて正となることである。

(例) $V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$



$$|2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 19 > 0$$

従って、 $V(\mathbf{x}) > 0$ が成立する。

◎ **準正定行列 \mathbf{A}** ($\mathbf{A} \geq 0$ と書く)

対称行列 \mathbf{A} についての二次形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が $\mathbf{0}$ でない \mathbf{x} に対し非負 (≥ 0) のとき、行列 \mathbf{A} を準正定行列という。必要十分条件は、 \mathbf{A} の先頭主座小行列がすべて非負となることである。

(例) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ が非負となる a の条件は?

$$V(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|1| \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(2a+1) \geq 0$$

以上により、 $-1/2 \leq a \leq 1$

評価関数の選び方と意味

評価関数は、次式のように \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} を対角行列に選ぶのが簡単である。

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots + q_n x_n^2 + r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots + r_m u_m^2) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left([x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + [u_1, u_2, \dots, u_m] \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \right) dt \tag{4-20}
 \end{aligned}$$

ここで、 $q_i \geq 0$ ($i=1 \sim n$) 準正定、 $r_i > 0$ ($i=1 \sim m$) 正定

各変数の 2 乗を積分するのは、次の様に振動する場合に 2 乗しないで積分すると、正負が打ち消して積分値が小さくなってしまい、評価として適さないからである。各変数に q_i 、 r_i の重みをつけるのは、変数の単位は種々あるのでその調整と、特に小さくしたい変数に大きな重みをつけるためである。

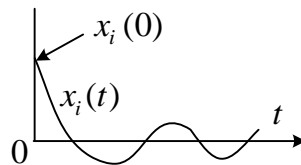


図 4-3 評価関数で変数を 2 乗する理由

(4-15)を最小化することから、最終的には $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ となる。つまり、この制御は、 $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ をすみやかに原点にもどす制御である。(4-15)の 1 項目が小さくできるほど、より速く \mathbf{x} は原点に戻る。しかし、このような制御を行うためには入力が非常に大きくなり、例えば容量の大きな電源を必要とし、望ましいことではない。そこで、(4-15)の第 2 項目を追加し、入力も評価する。 \mathbf{Q} の要素を \mathbf{R} の要素に対して、大きく選ぶと \mathbf{u} の大きな変化が許されるから、 \mathbf{x} の応答は良くなる。逆に、 \mathbf{R} の要素を \mathbf{Q} の要素に対して大きく選ぶと \mathbf{u} の大きな変化が許されないから、 \mathbf{x} の応答は悪くなる。例題 4-2 で確認できる。

リッカチ方程式が成立するとき(4-16)となる説明⁽⁵⁾

(4-15)の積分が有限な値をもつには、 $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ でなければならない。よって、

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \} dt = -\mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

$$\text{一方, } \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)$$

$$= (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

$$= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = 0$$

(4-15)の J に上式を加えて、

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

$$+ \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

$$= \int_0^{\infty} \{ (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})$$

$$+ \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{x} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (4-21)$$

もし、 \mathbf{P} がリッカチ方程式を満足するなら、最適入力(4-16)で与えられる。積分項は0が最小で、そうなるように \mathbf{u} が変化するのである。

例題 4-2 図の制御系で、電流の初期値を $i(0)$ としたとき、制御により電流を0にしたい。

次式の評価関数 J を最小にする k の値とそのときの評価関数の最小値を求めよ。

$$J = \int_0^{\infty} (qi^2 + v^2) dt \quad \text{ただし, } q > 0$$

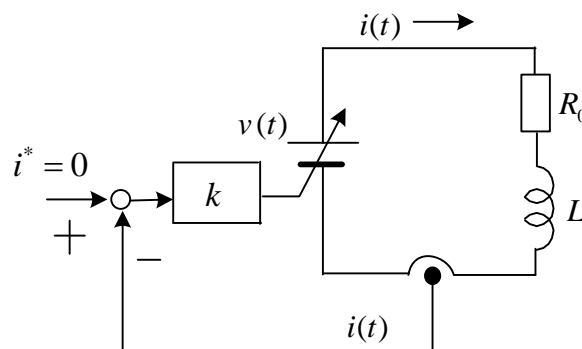


図 4-4 RL 回路の電流制御

(解) 制御対象の状態方程式は,

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_0}{L}i + \frac{1}{L}v$$

よって, (4-14), (4-15)と比べて

$$A = -\frac{R}{L}, B = \frac{1}{L}, Q = q, R = 1$$

リッカチ方程式は, (4-17)より

$$P\left(\frac{-R_0}{L}\right) + \left(\frac{-R_0}{L}\right)P - P\frac{1}{L}\frac{1}{L}P + q = 0$$

$$\therefore P^2 + 2LR_0P - L^2q = 0$$

$P > 0$ (正定) だから, $P = -LR_0 + L\sqrt{R_0^2 + q}$ なので

$$v = -ki \quad \text{ただし, } k = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -R_0 + \sqrt{R_0^2 + q}$$

このとき, (4-18)より

$$J_{\min} = P i^2(0) = L(\sqrt{R_0^2 + q} - R_0)i^2(0)$$

図 4-5 は評価関数の重み q を変えた場合の過渡応答を示す。 q が小さい時, 電流 i の変動は許され, 相対的に大きくなった入力 v の重みのため入力の変動が抑えられる。 q が大きい時, 電流 i の変動は許されず, 相対的に小さくなった入力 v の重みのため入力の変動が大きくなる。 q は両者のバランスを考えて選ぶ必要がある。

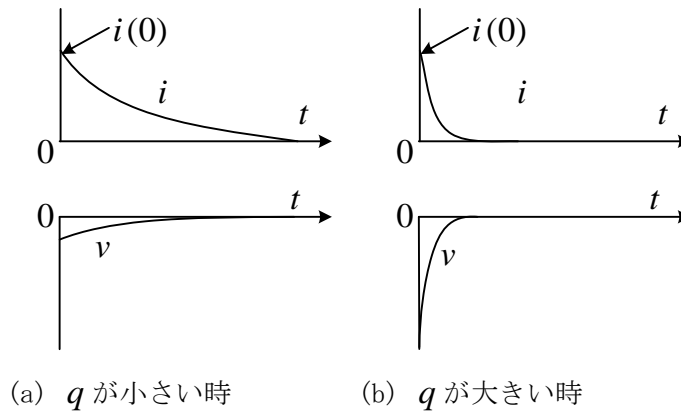


図 4-5 重みの違いが応答に及ぼす影響

(別解) リッカチ方程式を使わないで, 直接計算して求めてみよう。

$v = -ki$ だから, 制御系全体の微分方程式は

$$L\frac{di}{dt} + (R_0 + k)i = 0$$

よって, $i = e^{st}i(0)$, $s = -\frac{R_0 + k}{L}$

評価関数は, $s < 0$ すなわち $k > -R_0$ のときのみ収束し,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (qi^2 + v^2) dt \\ &= \int_0^\infty (qi^2 + k^2i^2) dt \\ &= (q + k^2)i^2(0) \int_0^\infty e^{2st} dt \\ &= \frac{L(q + k^2)}{2(R_0 + k)} i^2(0) \end{aligned}$$

極小値は, $\frac{\partial J}{\partial k} = 0$ より, $4Lk(R_0 + k) - 2L(q + k^2) = 0 \quad \therefore k = -R_0 + \sqrt{R_0^2 + q}$

$$J_{\min} = \frac{L(2q + 2R_0^2 - 2R_0\sqrt{R_0^2 + q})}{2\sqrt{R_0^2 + q}} i^2(0) = L(\sqrt{R_0^2 + q} - R_0) i^2(0)$$

(注意) 実際の電流制御では, 任意の指令値に追従しないといけない。練習問題の1つのもので取り上げた。

例題 4-3 制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} i \quad \text{ただし, } a > 0, b > 0$$

に対し, 評価関数 J を

$$J = \int_0^\infty (q\theta^2 + i^2) dt \quad \text{ただし, } q > 0$$

として, 変数を原点に収束させる最適レギュレータ入力 i を求めよ。

(解) リッカチ方程式の正定対称行列の解を

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

として, 題意より

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

であるから、リッカチ方程式より

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(1,1)\text{成分} \quad -b^2 p_{12}^2 + q = 0 \quad \text{①}$$

$$(1,2), (2,1)\text{成分} \quad p_{11} - a p_{12} - b^2 p_{12} p_{22} = 0 \quad \text{②}$$

$$(2,2)\text{成分} \quad 2p_{12} - 2a p_{22} - b^2 p_{22}^2 = 0 \quad \text{③}$$

$$\mathbf{P} \text{ は正定なので, } p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\therefore p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad \therefore p_{22} > 0 \quad \text{④}$$

$$\text{③, ④より, } p_{12} > 0 \quad \text{だから, ①より } p_{12} = \sqrt{q}/b$$

$$\text{③より④を考慮して } p_{22} = (-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}) / b^2$$

$$\text{②より } p_{11} = \sqrt{q} \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}} / b$$

最適制御入力は,

$$\begin{aligned} i(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= -[0, b] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= -\sqrt{q} \theta - \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b} \omega \end{aligned}$$

4.3 最適サーボシステム(積分形最適レギュレータ)

最適レギュレータでは、状態値に変動があった場合、それを零にするような制御が行われるが、変化する目標値に出力を追随させることやステップ外乱などの持続的な外乱に対する考慮が払われていない。これらを考慮した次のような性質を持つ制御系を一般に**サーボ系** (servo system) という。

(I) 目標値や外乱が存在しないとき、制御系は安定である。

(内部安定性の条件)

(II) 持続的な外乱入力が存在しても、制御対象の出力が与えられた目標入力に定常偏差なく追従する。

(出力レギュレーションの条件)

この (II) の条件を満たす制御系が設計できるためには、目標入力及び外乱のラプラス変換を $R(s)$ とするとき、これと同じ伝達関数を一巡伝達関数の中に含んでいなければならない。これを**内部モデル原理**(internal model principle)という。

例えば、ステップ指令 $r(t)=1$ のときそのラプラス変換は $R(s)=1/s$ であり、一巡伝達関数の中に積分器がなければならず、制御対象に積分器が入っていなければ、積分制御器を用いないと定常偏差を 0 にすることができない。正弦波指令 $r(t)=\sin \omega t$ の場合には、そのラプラス変換は $R(s)=\omega/(s^2+\omega^2)$ であり、 $1/(s^2+\omega^2)$ を制御器に含まないと定常偏差を 0 にできない。

ここでは、ステップ状の指令に対して、ステップ状の外乱があつた場合でも定常偏差なく追従するサーボ系を最適レギュレータを適用して求める方法を示す。これを、**最適サーボシステム**(optimal servo system)と呼ぶ。

制御対象は m 入力, m 出力で可制御, 可観測システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Hd \quad (4-22)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4-23)$$

ここに, $A(n \times n), B(n \times m), C(m \times n), H(n \times s)$

$$x(n \times 1), y(m \times 1), u(m \times 1), d(s \times 1)$$

で与えられるものとする。 d はステップ状外乱ベクトルを表す。

$y(t)$ をステップ状の一定目標入力ベクトル $r(m \times 1)$ に定常偏差なく追従するサーボ系を設計する **Smith-Davison の設計法** を以下に述べる⁽²⁶⁾。このとき偏差を

$$e = y - r \quad (4-24)$$

とする。一般とは符号が反対である。

(4-22)を微分すると d は一定だから次式が得られる。ドット・も時間微分 d/dt を表す。

$$\frac{d \dot{x}(t)}{dt} = A \dot{x}(t) + B \dot{u}(t) \quad (4-25)$$

(4-23)を用いて, (4-24)を微分し, r は一定だから 次式を得る。

$$\frac{d e(t)}{dt} = C \dot{x}(t) \quad (4-26)$$

(4-25), (4-26)をまとめて, 次の状態方程式 (**拡大系**と呼ぶ) が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \quad (4-27)$$

これを

$$\frac{d \mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{A}' \mathbf{x}' + \mathbf{B}' \dot{u} \quad (4-28)$$

と書く。評価関数を,

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'^T \mathbf{Q} \mathbf{x}' + \dot{u}^T \mathbf{R} \dot{u}) dt \quad (4-29)$$

とする。新しい状態変数 \mathbf{x}' は速やかに $\mathbf{0}$ (ステップ指令及び一定外乱の定常状態) に制御したいので、 J を最小にする制御に最適レギュレータ理論が適用できる。なぜなら定常状態は $\dot{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{0}$ とし、また偏差も 0 にしたいからである。この結果

$$\dot{u} = -\mathbf{F} \mathbf{x}', \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{P} \quad (4-30)$$

ここに、 \mathbf{P} は $(n+m) \times (n+m)$ の行列であり、次のリッカチ方程式の対称正定値解である。

$$\mathbf{P} \mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4-31)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

とおくと、(4-30)より

$$\dot{u} = -\mathbf{K}_1 \dot{x} - \mathbf{K}_2 (y - r) \quad (4-33)$$

と表される。この式を積分すると、

$$u(t) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2 \int_0^t (r - y) dt \quad (4-34)$$

この場合の制御システムを図 4-6 に示す。 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ は一般に行列であることに注意せよ。

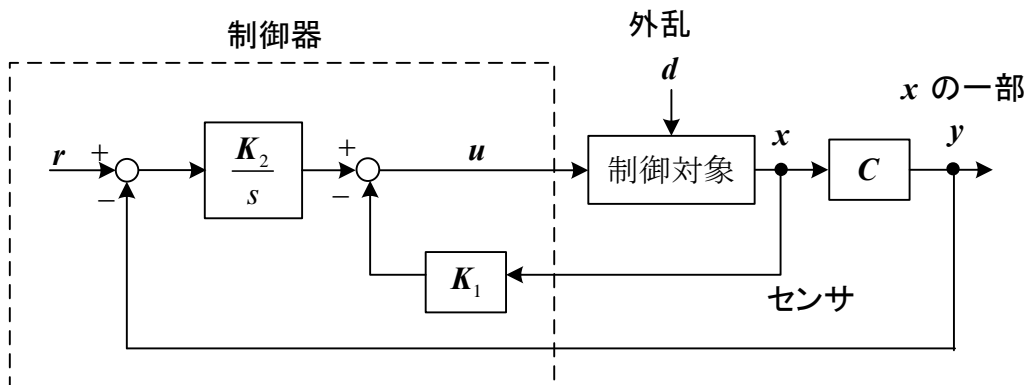


図 4-6 最適サーボシステム

なお、応答を計算する場合には、

$$z = \int_0^t (r - y) dt \quad (4-35)$$

とにおいて、次式の系全体の状態方程式より計算すればよい。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}d \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

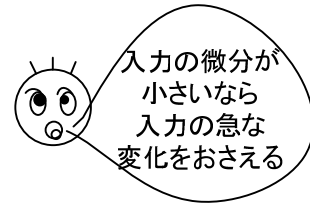
最適サーボシステムでは、評価関数を設定すれば機械的に最適な $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ が求まる。よって PI 制御や I-P 制御に比べて高性能化できる。状態変数が全て検出できることが前提であるが、それができない場合には次章で述べるオブザーバが利用できる。

例題 4-4 制御対象が 1 次の系

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bu \quad \textcircled{1}$$

であるとき ($a > 0, b > 0$)、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ q(x^* - x)^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\} dt \quad \textcircled{2}$$



を最小にするような最適サーボシステムを設計せよ ($q > 0$)。 x^* は指令値である。入力 u は理論上、その微分の 2 乗を評価する。それが小さいなら、穏やかに入力 u が変化する。

(解) $e = x - x^*$ (x^* : 一定) とおき、 $\textcircled{1}$ を微分して拡大系が以下の様に得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}$$

よって、

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

対称正定行列 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおいて、リッカチ方程式より、

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b, 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(1,2), (2,1)の成分は等しく, 3個の独立な式が得られる。

$$-2a p_{11} + 2p_{12} - p_{11}^2 b^2 = 0 \quad (3)$$

$$-a p_{12} + p_{22} - p_{11} p_{12} b^2 = 0 \quad (4)$$

$$q - p_{12}^2 b^2 = 0 \quad (5)$$

\mathbf{P} は正定行列だから, $p_{11} > 0$, $|\mathbf{P}| = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad \therefore p_{22} > 0$

$p_{12} > 0$ だから, ⑤より $p_{12} = \frac{\sqrt{q}}{b}$

③ に代入して, $p_{11} > 0$ なので $p_{11} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b^2}$

④ より $p_{22} = \frac{\sqrt{q}\sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b}$

$$\mathbf{F} = [K_1, K_2] = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = [b, 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = [bp_{11}, bp_{12}]$$

よって

$$K_1 = (-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}) / b$$

$$K_2 = \sqrt{q}$$

このときのブロック線図を図 4-7 に示す。 K_1, K_2 がスカラーなので **I-P 制御系** と呼ばれる制御系になる。 q を大きく選ぶと, K_1, K_2 はいずれも大きくなり, 偏差を速く 0 にする制御系となる。一方, q を小さく選ぶと, K_1, K_2 はいずれも小さくなり, 入力の急な変化が抑えられる。図 4-6 の最適サーボシステムは, K_1, K_2 が行列である点に注意されたい。

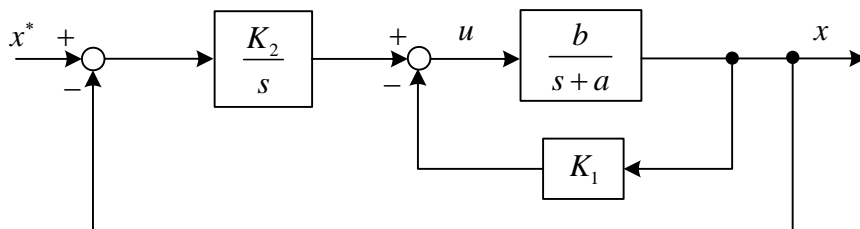


図 4-7 1 次の制御対象の最適サーボシステム