

## 第5章 オブザーバとカルマンフィルタ

実際の制御対象では、状態値の全てが測定できることはまれであり、制御対象の状態方程式や直接測定できる出力から  $\mathbf{x}(t)$  を推定することが行われる。そのための推定機構の一つがルーエンバーガ(Luenberger)により提案された**オブザーバ(状態観測器)**(observer)である。オブザーバは、最適フィードバック制御を始め、いろいろな制御に利用できる。

### 5.1 単純な状態推定器 (シミュレータ)

まず、簡単な図の制御対象で考える。入力電圧  $u(t)$ 、抵抗  $R$ 、インダクタンス  $L$  は既知であるとして、センサを用いなくて電流  $i(t)$  を推定できないだろうか？

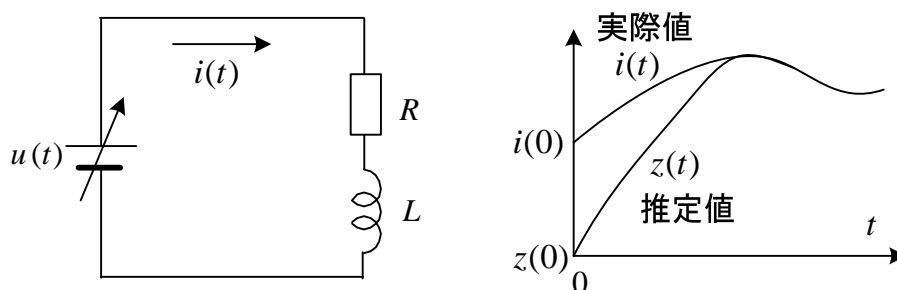


図 5-1  $RL$  回路と状態推定

状態方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \quad (1)$$

従って、

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R}{L}z + \frac{1}{L}u \quad (2)$$

を用いて  $z$  を演算し、実際値  $i$  の代わりに使うことが考えられる。②-①より、次式が得られる。これを**誤差方程式**という。

$$\frac{d(z-i)}{dt} = -\frac{R}{L}(z-i) \quad (3)$$

この式を解くと、

$$z(t) - i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} (z(0) - i(0)) \quad (4)$$

初期値  $i(0)$  は判らないので、例えば  $z(0) = 0$  として計算すると、しばらくすると

$$z(t) = i(t) \quad (5)$$

となり、推定値  $z(t)$  を実際値  $i(t)$  の代わりに使うことができるようになる。これが**状態推定**(state estimation)であり、センサを使わないで状態値が得られる。②の  $z(t)$  の演算は、一般に  $u(t)$  が時間によって変化するので制御用のコンピュータを用いてオンラインで求める。

例えばオイラー法を使うと ( $T$  : サンプルング周期), 次式で演算できる。

$$z_{k+1} = z_k + \left(-\frac{R}{L}z_k + \frac{1}{L}u_k\right)T \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \textcircled{6}$$

この結果, センサを省くことができるようになる。以上の考え方を一般の場合に拡張する。

制御対象は  $m$  入力,  $l$  出力で次式の可制御, 可観測システムとする。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (5-2)$$

ここに,  $\mathbf{A}(n \times n)$ ,  $\mathbf{B}(n \times m)$ ,  $\mathbf{C}(l \times n)$

$$\mathbf{x}(n \times 1), \quad \mathbf{y}(l \times 1), \quad \mathbf{u}(m \times 1)$$

行列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  と入力  $\mathbf{u}(t)$  は既知として, (5-1)より  $\mathbf{x}(t)$  の推定値  $\mathbf{z}(t)$  を

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (5-3)$$

により求める。この方法は最も簡単で, **シミュレータ**と呼ばれる。ここで初期値  $\mathbf{x}_0$  は判らないので, 適当な値  $\mathbf{z}_0$  にする。(5-3)で演算する場合の問題点を述べよう。実際の値  $\mathbf{x}(t)$  と推定値  $\mathbf{z}(t)$  の差を考え, (5-3)から(5-1)を引いて**誤差方程式**が以下の様に得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)) &= \mathbf{A}(\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)) \\ \therefore \mathbf{z}(t) &= \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)) \end{aligned} \quad (5-4)$$

一般に  $\mathbf{z}(0) \neq \mathbf{x}(0)$  であるから,  $\mathbf{A}$  の固有値で  $\mathbf{z}(t)$  が  $\mathbf{x}(t)$  に近づく様子が変わる。 $\mathbf{A}$  の固有値に実部が正のものがあれば不安定で推定できず, 固有値の実部が全て負の場合でも実部の絶対値が小さいと収束に長い時間を要することが考えられる。しかし,  $\mathbf{A}$  の固有値が十分安定であれば, (5-3)は利用可能で, 最も簡単に状態推定が可能となる。

誘導電動機(IM)のベクトル制御について例を示す<sup>(34)</sup>。誘導電動機のベクトル制御は広く用いられているが, これは磁束のシミュレータを利用した制御と考えられる。シミュレータを用いて誘導モータの**二次鎖交磁束(回転子鎖交磁束)**  $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$  は次式で演算できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

ここで,  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$  : 固定子  $\alpha, \beta$  軸電流,  $\omega_r$  : 回転角速度

$\tau_r$  : 回転子回路の時定数,  $M$  : 相互インダクタンス

① を制御用のコンピュータでオイラー法や台形公式を用いて解くと  $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$  が計算できる。このとき,  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}, \omega_r$  はセンサで検出した値を用いる。電流を入力と考えると,

固有値は、次式となり、実部が負だから安定な制御対象である。

$$\begin{vmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{vmatrix} = (s + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2 = 0 \quad \text{より,} \quad s = -\frac{1}{\tau_r} \pm j\omega_r \quad \text{②}$$

$\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$  より、**磁束の向き**  $\theta$  は次式で計算する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\psi_{r\beta}}{\psi_{r\alpha}} \quad \text{③}$$

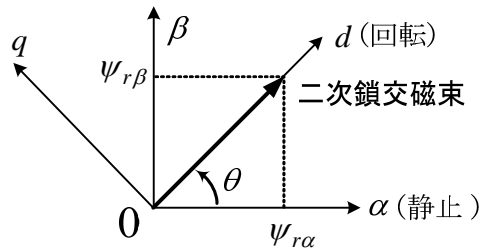


図 5-2 誘導機のモデリングに使用する座標系

①の二次鎖交磁束演算，③の磁束の向きの演算によるベクトル制御系の構成を図 5-3 に示す。3相/2相変換では、3相電流を静止座標系の2相電流に置き換える。2相/3相変換では、 $d$ - $q$ 回転座標系での電流指令から、3相電流指令を計算し、電流制御器でモータに指令通りの電流を流す（ここでインバータが使われる）。この結果、 $i_{sq}^*$  に比例してモータのトルクが発生する。検出が難しい二次鎖交磁束を計算で求め利用している。誘導機をベクトル制御で始動するとき、まず励磁電流指令  $i_{sd}^*$  を流して一度定常状態に達してから、 $i_{sq}^*$  を与える。これは二次鎖交磁束の初期値の影響をなくすためである。

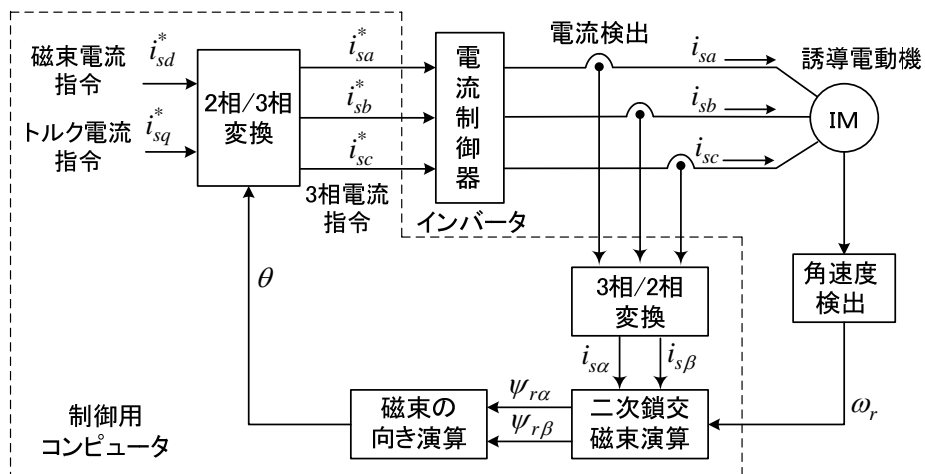


図 5-3 誘導電動機のベクトル制御<sup>(34)</sup>

## 5.2 同次元オブザーバ

同次元オブザーバ(identity observer, full order observer)について述べる<sup>(5)</sup>。(5-1), (5-2)で与えられる可観測な制御対象に対し, 同次元 ( $n$  次元) オブザーバを次式で構成する。

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= Az(t) + Bu(t) + K(y(t) - Cz(t)) \\ &= (A - KC)z(t) + Ky(t) + Bu(t)\end{aligned}\tag{5-5}$$

但し,  $K : (n \times l)$  ゲイン行列(gain matrix)

(5-3)の方法と違うのは, 実際出力  $y(t)$  とオブザーバから求めた出力  $Cz(t)$  の差に**オブザーバゲイン(observer gain)  $K$**  を掛けて補正している点である。 $K = \mathbf{0}$  とするとシミュレータになる。図 5-4 に同次元オブザーバのブロック線図を示す。

さて,  $x(t)$  と  $z(t)$  の誤差ベクトルを

$$e(t) = z(t) - x(t)\tag{5-6}$$

とおくと, (5-1), (5-2), (5-5)より, **誤差方程式(error equation)**は次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} \\ &= (A - KC)(z - x) \\ &= (A - KC)e\end{aligned}\tag{5-7}$$

よって, (5-7)の解は

$$e(t) = e^{(A-KC)t} e(0)\tag{5-8}$$

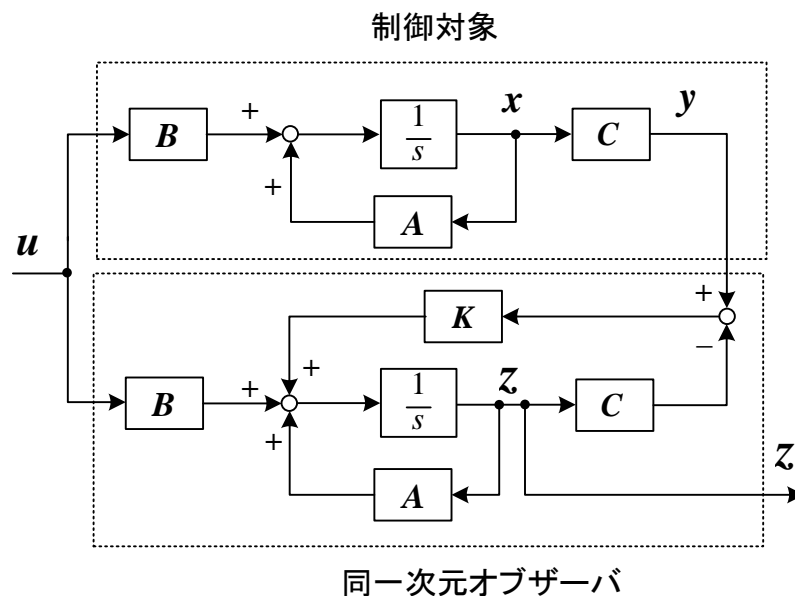


図 5-4 実際の制御対象と同次元オブザーバによる状態推定

となる。 $A-KC$  を安定行列にできれば、どんな初期推定誤差  $e(0)$  に対しても、 $t \rightarrow \infty$  で  $e(t) \rightarrow 0$  すなわち、 $z(t) \rightarrow x(t)$  となり、 $z(t)$  を  $x(t)$  の推定値として使えるようになる。また、 $A-KC$  の固有値を**同一次元オブザーバの極**という。オブザーバの極を複素平面のより左側に設定すれば、より速く  $z(t) \rightarrow x(t)$  とできるが、オブザーバゲインが大きくなってノイズの影響を受けやすくなる。従って適切なオブザーバゲインの選定が重要である。

さて、 $A-KC$  の固有値と  $K$  の関係については次の定理が知られている<sup>(5)</sup>。

『定理』  $(C, A)$  が可観測であることと、 $A-KC$  の固有値を任意の値に設定する  $K$  が存在することは等価である。

極配置は、レギュレータの場合と同様に行える。 $K$  の位置をそろえるため、 $A-KC$  の転置をとり、 $(A-KC)^T = A^T - C^T K^T$  を得る。 $A-KC$  と  $A^T - C^T K^T$  の固有値は等しいので、 $A^T - C^T K^T$  の極配置より  $K^T$  を求める。なお、 $(C, A)$  が可観測であるとき、 $(A^T, C^T)$  が可制御であることも成り立つ。極配置では可制御正準形式を使用している。次元が低いときには、変換しないで直接極配置が可能である。

#### 例題 5-1 2 入力 1 出力の制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対し、オブザーバの極を  $-5$  (重根) とする同一次元オブザーバを求めよ。

(解)  $x_1, x_2$  の推定値をそれぞれ  $z_1, z_2$  とすると同一次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} (y - [1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}) \\ &= (A - KC)z + Bu + Ky \\ &= \begin{bmatrix} -1-k_1 & -1 \\ 1-k_2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} y \\ &= (A - KC)z + Bu + Ky \end{aligned}$$

$A-KC$  の固有値を  $r = -5$  (重根) にすればよい。

$$\begin{aligned} |sI - A + KC| &= \begin{vmatrix} s+1+k_1 & 1 \\ -1+k_2 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + (k_1+3)s + 2k_1 - k_2 + 3 \\ &= (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25 \end{aligned}$$

係数比較により,  $k_1 = 7, k_2 = -8$  となり, 同次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

### 5.3 最小次元オブザーバ

$l$  個の状態変数が直接測定できた場合, オブザーバで直接測定できない  $n-l$  個の状態変数だけを再現した方が簡単になる。このようにして, 次元が下げられたオブザーバを**最小次元オブザーバ**(minimal order observer)という。最小次元オブザーバについてはゴピナス (Gopinath) の構成法が良く知られている<sup>(5)</sup>。出力変数そのまま状態変数の一部と一致する場合には, 変数変換は不要で手順も簡単になる。この場合について説明する。制御対象が次式で表せるとする。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5-9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \quad (5-10)$$

ここで,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}: l \times 1, \mathbf{x}_2: (n-l) \times 1, \mathbf{u}: m \times 1$

$\mathbf{x}_1$  は測定できるから,  $\mathbf{x}_2$  だけを推定すればよい。(5-9)を2つに分け, (5-10)を用いると次式が得られる。

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (5-11)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (5-12)$$

$\mathbf{x}_2$  の推定値を  $\mathbf{z}$  とし, (5-12)を出力方程式と考えて同次元オブザーバを構成すると次式を得る。

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}_{22}\mathbf{z} + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{K} \left( \frac{d\mathbf{y}}{dt} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{z} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y} - \mathbf{B}_1\mathbf{u} \right) \quad (5-13)$$

$\mathbf{K}((n-l) \times l)$  : ゲイン行列

(5-13)で, 右辺の  $\mathbf{y}$  の微分を除くため

$$\mathbf{z} - \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{z}' \quad (5-14)$$

とおくと

$$\frac{d\mathbf{z}'}{dt} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12})\mathbf{z}' + (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{11})\mathbf{y} + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \quad (5-15)$$

が得られる。(5-15)で $\mathbf{z}'$ を求め、(5-14)より $\mathbf{z}$ を計算すれば $\mathbf{y}$ の微分は必要ない。デジタル制御する場合には、(5-15)より差分方程式を求め、(5-14)より $\mathbf{z}$ を求めることになる。(5-13)より直接差分方程式を作り、 $\mathbf{y}$ の差分を用いると、 $\mathbf{y}$ に含まれるノイズの影響を大きく受ける。ただし、(5-13)を用いて差分方程式を作り、変形して(5-15)と同じ差分方程式を得ることはできる。

次に、**誤差方程式**を求める。(5-13)から(5-11)を引いて、(5-12)を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}_{22}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) + \mathbf{K}(\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12})(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (5-16)$$

( $\mathbf{C}, \mathbf{A}$ )が可観測であれば、( $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22}$ )が可観測となることが知られており、 $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}$ の固有値(オブザーバの極)は任意の値に設定できる。従って、 $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{x}_2(t)$  ( $t \rightarrow \infty$ )とできる。

最小次元オブザーバでも、同一次元オブザーバと同様に制御対象の状態方程式は全て計算に利用しており、式が極端に単純化された訳ではない。同一次元オブザーバでは、センサで検出している変数も推定するので無駄なことをしているようであるが、その演算値と実際のセンサ出力の差から $\mathbf{A}$ に含まれる変動するパラメータを推定することなどに利用が可能で、場合によっては役立つことがある。なお、最小次元のシミュレータなら随分と式は簡単になる。図5-3に示したベクトル制御については、実際は電流も状態変数であるから、最小次元のシミュレータを用いたと考えられる。

#### 例題 5-2 2入力1出力の制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対し、オブザーバの極を $-5$ とする最小次元オブザーバを求めよ。

(解)  $x_2$ の推定値を $z_2$ とすると $x_1$ は出力として測定されるので、最小次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\frac{d z_2}{d t} = x_1 - 2 z_2 + 2 u_2 + K \left( \frac{d x_1}{d t} + x_1 + z_2 - u_1 \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{d}{d t} (z_2 - K x_1) = (1 + K) x_1 + (K - 2) z_2 + 2 u_2 - K u_1$$

$z_2 - Kx_1 = z_2'$  とおくと

$$\frac{d}{dt} z_2' = (1 - K + K^2)x_1 + (K - 2)z_2' + 2u_2 - Ku_1 \quad (3)$$

③より  $z_2'$  を演算し、

$$z_2 = z_2' + Kx_1 \quad (4)$$

より  $z_2$  が求まる。

誤差方程式を求めるため、②に①の  $dx_1/dt$  を代入すると

$$\frac{dz_2}{dt} = x_1 - 2z_2 + 2u_2 + K(-x_2 + z_2) \quad (5)$$

⑤から①の  $dx_2/dt$  を引いて

$$\frac{d}{dt}(z_2 - x_2) = -2(z_2 - x_2) + K(z_2 - x_2) = (K - 2)(z_2 - x_2)$$

オブザーバの極は  $(K - 2)$  で、これを  $-5$  とするのでオブザーバゲインは  $K = -3$  となる。

$K = -3$  とした③、④が最小次元オブザーバである。

### 例題 5-3 制御対象がモータで

$$J \frac{d\omega}{dt} = k i - T_L \quad (1), \quad \frac{dT_L}{dt} = 0 \quad (2)$$

$J$  : 慣性モーメント,  $k$  : トルク定数,  $\omega$  : 回転角速度,  $T_L$  : 負荷トルク  
 $i$  : トルク電流

で与えられる。簡単のためトルク電流を入力と考える。負荷トルク  $T_L$  以外は全て既知とするとき、 $T_L$  を推定する最小次元オブザーバ (**負荷トルクオブザーバ**, **外乱オブザーバ disturbance observer** と呼ばれる<sup>(12)</sup>) を求めよ。オブザーバの極は  $-r$  に設定する。

(解) 最小次元オブザーバは、②を状態方程式、①を出力方程式と考えて同次元オブザーバを作ればよいから((5-13)より)、 $T_L$  の推定値を  $T_L'$  として

$$\frac{dT_L'}{dt} = K \left( \frac{d\omega}{dt} + \frac{T_L'}{J} - \frac{ki}{J} \right) \quad (3)$$

となる。(5-13) の右辺第 1,2,3 項が 0 で、オブザーバゲインがついた項だけが残っている。

①を代入して③-②より誤差方程式を求めると次式が得られる。

$$\frac{d(T_L' - T_L)}{dt} = K \left( \frac{d\omega}{dt} + \frac{T_L'}{J} - \frac{ki}{J} \right) = \frac{K}{J} (T_L' - T_L) \quad (4)$$

④よりオブザーバの極は、 $K/J$  だから題意より

$$K/J = -r \quad \therefore K = -rJ \quad (5)$$

で与えられる。③が求める負荷トルクオブザーバで、オブザーバゲインは⑤で与えられる。

以下に、ブロック線図を導き、負荷トルクオブザーバの理解を深める。③、⑤よりラプ



ラプラス変換して

$$T_L'(s) = \frac{k i(s) - J s \omega(s)}{1 + (s/r)} \quad (6)$$

となり、図 5-5 のブロック線図が得られる。しかし、ブロック線図通り  $\omega$  の微分を直接計算するのは、ノイズの影響が大きいので避けるべきである。そこで、⑥を

$$\begin{aligned} T_L'(s) &= \frac{r k i(s)}{r+s} - \frac{r J s \omega(s)}{r+s} = \frac{r k i(s)}{r+s} - r J \left(1 - \frac{r}{r+s}\right) \omega(s) \\ &= -r J \omega(s) + \frac{r k i(s) + r^2 J \omega(s)}{r+s} \end{aligned} \quad (7)$$

と変形する。⑦式の演算には微分は含まれない。デジタル制御<sup>(35)</sup>を行う場合まず、

$$x(s) = \frac{r k i(s) + r^2 J \omega(s)}{r+s} \quad (8)$$

とにおいて、 $x$  の微分方程式から差分方程式を作り（これは 1 次のローパスフィルタ）、

$$T_L'(t) = -r J \omega(t) + x(t) \quad (9)$$

として演算すればよい。差分方程式は、③から(5-14),(5-15)の考え方を使っても得られる。(5-14)の  $z'$  が、⑧の  $x$  に相当する。

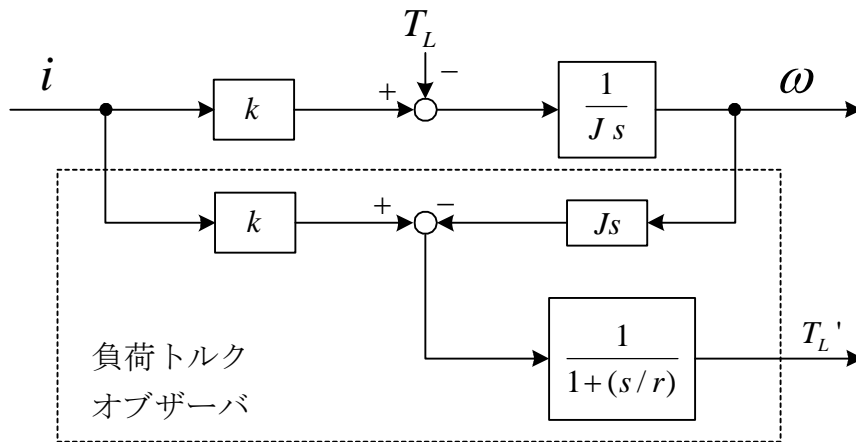
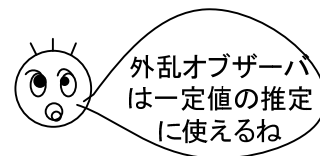


図 5-5 負荷トルクオブザーバ (外乱オブザーバ)

負荷トルクオブザーバの極は、ローパスフィルタの極に相当するため、 $r$  を大きく選ぶことで遅れのない負荷トルクの推定値を得ることができる。しかし、大きすぎると観測ノイズや制御対象のモデル化誤差の影響を受ける。 $r = \infty$  は、⑥より  $\omega$  の微分を演算して  $T_L$  を求めることに相当する。



## 5.4 カルマンフィルタ

### 連続系のカルマンフィルタ

同次元オブザーバではオブザーバゲイン  $\mathbf{K}$  の設計が重要である。測定出力や制御対象に入る不規則性の雑音を考えて、 $\mathbf{K}$  を求める同次元オブザーバが**カルマンフィルタ** (Kalman filter) である。以下これについて述べる。

制御対象を

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (5-17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (5-18)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(n \times n), \quad \mathbf{B}(n \times m), \quad \mathbf{C}(l \times n), \quad \mathbf{x}(n \times 1), \\ \mathbf{y}(l \times 1), \quad \mathbf{u}(m \times 1), \quad \mathbf{w}(n \times 1), \quad \mathbf{v}(l \times 1)$$

とする。 $\mathbf{w}(t)$  は**システム雑音** (system noise),  $\mathbf{v}(t)$  は**測定雑音** (measurement noise) と呼ばれる。以下、 $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  は可観測と仮定する。

このシステムに対する、同次元オブザーバを

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}z(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})z(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5-19)$$

とし、 $\mathbf{z}(t)$  と  $\mathbf{x}(t)$  の誤差を次式で定義する。

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \quad (5-20)$$

$\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  は**正規分布**した**白色雑音** (white noise) で、以下の式が成り立つとする<sup>(5)</sup>。

(1)  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  の期待値は零である。 $E[\cdot]$  は**期待値** (後述) を求める演算である。

$$E[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(t)] = \mathbf{0} \quad (5-21)$$

(2)  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  は時間が少しでも違えば**無相関** (uncorrelated) 雑音で、それらの**共分散行列** (後述) が次式で与えられる。

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(\tau)^T] = \mathbf{Q}\delta(t - \tau), \quad E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = \mathbf{R}\delta(t - \tau) \quad (5-22)$$

但し、 $\mathbf{Q}(n \times n)$  : 半正定行列,  $\mathbf{R}(l \times l)$  : 正定行列

(3)  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  は無相関である。

$$E[\mathbf{w}(\tau)\mathbf{v}(t)^T] = \mathbf{0} \quad (5-23)$$

(4)  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)$  は、適当な平均値と分散行列をもつ確率ベクトルで、 $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  とは無相関である。

これらの仮定のもとで、時刻  $t$  での 2 乗平均誤差

$$J = E[\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)] \quad (5-24)$$

を最小にするゲイン行列  $\mathbf{K}$  を求める。この  $\mathbf{K}$  を用いた(5-19)を**カルマンフィルタ** (Kalman filter) という。とくに、 $t \rightarrow \infty$  となるときに最適となるカルマンフィルタについては、最適ゲイン行列は、一定行列

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (5-25)$$

で与えられる。但し、 $\mathbf{P}(n \times n)$  は**リッカチ方程式** (Riccati equation)

$$\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5-26)$$

を満たす正定の唯一解である。

またこのとき、カルマンフィルタは安定となる。

### 離散値系のカルマンフィルタ

次に実際の応用が多い差分方程式で記述された線形確率システムについて述べる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-27)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-28)$$

ここで、 $\mathbf{A}_k (n \times n)$ ,  $\mathbf{B}_k (n \times m)$ ,  $\mathbf{C}_k (l \times n)$ ,  $\mathbf{x}_k (n \times 1)$ ,  
 $\mathbf{y}_k (l \times 1)$ ,  $\mathbf{u}_k (m \times 1)$ ,  $\mathbf{w}_k (n \times 1)$ ,  $\mathbf{v}_k (l \times 1)$

$\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  は平均が零で共分散行列がそれぞれ  $\mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{R}_k$  の**正規分布した白色雑音** (正規性白色雑音 (Gaussian white noise)) とする。すなわち、

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \equiv \mathbf{Q}_k, \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \equiv \mathbf{R}_k \quad (5-29)$$

連続系では  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  は定数行列としたが、ここでの  $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$  は可変でも構わない。

カルマンフィルタでは、以下のアルゴリズムを繰り返して状態推定を行う<sup>(10),(13),(31)</sup>。 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ を1つ前の**状態推定値**、 $\mathbf{P}_{k-1}$ を1つ前の**共分散推定値**とする。

$$(1) \quad \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (\text{事前状態推定}) \quad (5-30)$$

$$(2) \quad \bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (\text{事前共分散推定}) \quad (5-31)$$

$$(3) \quad \mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (\text{最適カルマンゲイン計算}) \quad (5-32)$$

$$(4) \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \quad (\text{事後状態推定}) \quad (5-33)$$

$$(5) \quad \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{P}}_k \quad (\text{事後共分散推定}) \quad (5-34)$$

事前状態推定では前のサンプリング時刻の状態推定値から、(5-27)を用い現在のサンプリング時刻の状態推定を行う(もちろん雑音 $\mathbf{w}_k$ は式から除く)。事前共分散推定で $\bar{\mathbf{P}}_k$ を求め、次に**最適カルマンゲイン**(Kalman gain) $\mathbf{K}_k$ を計算する。事後状態推定では、現在の観測値を用いて、事前状態推定値を補正してより正確なものにする。(5-30)と(5-33)が同次元オブザーバの構成に対応している。事後共分散推定は、次回の事前共分散推定に用いる。これらは、カルマンゲインを計算するためにのみ使われる。なお、 $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ は一定と限らず、カルマンゲインはリッカチ方程式を解かなくても逐次求まる点が連続系の場合と異なる。

計算の手順は、初期値 $\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{P}}_0$ を与え、まず $k=0$ とおいて、 $\mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0$ を計算する。次に、 $k=1$ として、上から順番に計算していく。以下繰り返す。

$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ が一定で、 $t \rightarrow \infty$ の場合には、 $\mathbf{K}_k$ は一定値 $\mathbf{K}$ になる。この場合を定常カルマンフィルタという。(5-31), (5-32), (5-34)より $\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}, \mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{P}_k$ などと置いて得られる**離散形リッカチ方程式**(discrete Riccati equation)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P})\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (5-35)$$

を解いて、次式よりカルマンゲイン $\mathbf{K}$ が求まる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (5-36)$$

### 最適カルマンゲインの導出

カルマンフィルタは、次式に示す平均2乗誤差を最小にする推定値を与えるものである。

$$J(k) = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)] \quad (5-37)$$

いくつかの証明があるが、本稿では、**直交射影の原理**(principle of orthogonal projection)を使ってカルマンゲインを求めよう<sup>(10),(31)</sup>。導出に当り、まず(5-27)の入力 $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ の場合を考え

る。直交射影の原理より、最適な推定誤差とそれまでの観測値  $\mathbf{y}_i$  は直交し、次式が成立する<sup>(2),(10)</sup>。[ ]の中は行列になっていることに注意しよう。

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{y}_i^T] = \mathbf{0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (5-38)$$

(5-37)より次式が成り立つ<sup>(10),(31)</sup>。(5-29)の  $\bar{\mathbf{x}}_k$  は観測値  $\mathbf{y}_i$  の線形結合(linear combination)として求められるので(入力は零と仮定)、このように考えてよいであろう。

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k)^T] = \mathbf{0} \quad (5-39)$$

(5-32), (5-28)を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k - \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (5-40)$$

一方,

$$\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}_k(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{v}_k \quad (5-41)$$

これらを(5-39)に代入する。 $\mathbf{v}_k$  は  $\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{x}}_k$  ( $\mathbf{y}_k$  は使っていない) と無相関であり、その期待値は  $\mathbf{0}$  となるので、次式が得られる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T]\mathbf{C}_k^T - \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{0} \quad (5-42)$$

$$\text{ここで, } E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \equiv \bar{\mathbf{P}}_k \quad (5-43)$$

とおくと

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{0} \quad (5-44)$$

これから、(5-32)が得られる。

次に、共分散行列の関係を求める。

$$\mathbf{P}_k \equiv E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (5-45)$$

と定義すると(5-40)を代入して、 $\mathbf{v}_k$  は  $\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{x}}_k$  と無相関より

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]\{(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k\}^T\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]\mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (5-44)\text{適用} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \end{aligned} \quad (5-46)$$

これで、(5-34)が得られた。

(5-43)の $\bar{\mathbf{P}}_k$  を考える。(5-27), (5-30)を用いると,  $\mathbf{w}_{k-1}$ は $\mathbf{x}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ と無相関より

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}_k &\equiv E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ &= E[(\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1})(\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1})^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1}E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T]\mathbf{A}_{k-1}^T + E[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}\end{aligned}\quad (5-47)$$

これで, (5-31)が得られた。

最後に,  $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$  の場合を述べておく。(5-27)を以下のように雑音と入力の2つの式に分けて考える<sup>(10)</sup>。

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5-48)$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (5-49)$$

ここで,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{z}_k + \mathbf{s}_k \quad (5-50)$$

出力として,  $\mathbf{y}_k$  の代わりに

$$\boldsymbol{\eta}_k \equiv \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k \quad (5-51)$$

を考え, (5-28)を代入すると次式を得る。

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (5-52)$$

(5-48), (5-52)に対してカルマンフィルタを構成する。この結果, カルマンゲインに関する式(5-31), (5-32), (5-34)は,  $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$  の場合と同じで, 以下の式が異なる。

$$\text{事前状態推定} \quad \bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \quad (5-53)$$

$$\text{事後状態推定} \quad \hat{\mathbf{z}}_k = \bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{K}_k(\boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) \quad (5-54)$$

これを用いて,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &\equiv \hat{\mathbf{z}}_k + \mathbf{s}_k \\ &= \bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{K}_k(\boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) + \mathbf{s}_k \\ &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) \\ &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{x}}_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &\equiv \mathbf{s}_k + \bar{\mathbf{z}}_k \\ &= \mathbf{s}_k + \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}\end{aligned}$$

となり,  $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$  の場合の(5-30), (5-33)が得られる。



本テキストでは、(5-33)については同一次元オブザーバと同じ構成と述べ、証明をしていないが、(5-33)も直交射影の原理より、線形推定予測器に対して導かれる<sup>(31)</sup>。

カルマンフィルタには、上述の様に連続時間フィルタと離散時間フィルタがあり、一般にカルマンフィルタと言えは後者を指す。カルマンフィルタは、レーダー、カーナビ、天気予報、経済学など広い分野で応用されている。

### 期待値, 分散

離散型の確率分布の場合、確率変数  $x_i$  が起こる確率を  $p(x_i)$  とすると、**期待値**(expectation value)  $E[x]$  は次式で定義される。

$$E[x] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad \text{ここで,} \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \quad (5-55)$$

例えば、サイコロを振って出た目の数値のお金がもらえるとしたら、期待値は

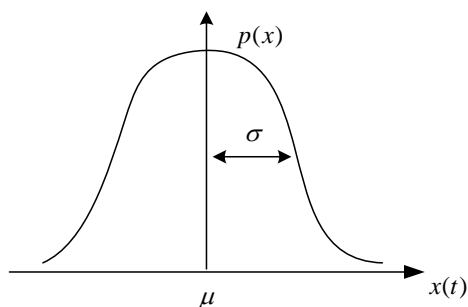
$$E = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5 \quad \text{円}$$

である。期待値は平均値とも呼ばれる。以上のことを頭において、以下の連続的な確率分布を考えよう。

時刻  $t$  での確率変数  $x(t)$  の**期待値**は、確率密度を  $p(x)$  として

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \mu \quad \text{ここで,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (5-56)$$

で与えられる。例えば、時刻  $t$  で電圧ノイズの値を  $x(t)$  とすると、 $x(t)$  の値はいろいろ考えられて、それぞれが存在する確率密度が  $p(x)$  である。つまり  $p(x)$  が大きいところの、電圧ノイズが生じる可能性が高い。



また、一般に次式のエルゴート仮定がなされる。これが成立するための必要条件は時間のランダム変数  $x(t)$  の性質が時間と共に変化しない定常ランダム性をもつことである。

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \mu \quad (5-57)$$

(集団平均)      (時間平均)

例えば、ある瞬間で考え、電圧ノイズの期待値が  $\mu = 0\text{V}$  なら、長い時間で見るとその間の時間平均が  $0\text{V}$  になる。以下  $x(t)$  を単に  $x$  と記す。

確率分布の特徴を示すために、平均値の他に分散がよく用いられる。まず、 $x - \mu$  の期待値を考えれば、

$$\begin{aligned} E[x - \mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= E[x] - \mu = 0 \end{aligned} \quad (5-58)$$

となるが、 $(x - \mu)^2$  の期待値を考えると、

$$\begin{aligned} E[(x - \mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] \\ &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 \\ &= E[x^2] - \mu^2 \end{aligned} \quad (5-59)$$

となり、必ずしも 0 にならない。これを  $x$  の**分散**(variance)と言い、 $V(x)$  で表す。分散はデータの散らばり具合を表わす。 $\sqrt{V(x)}$  を**標準偏差**(standard deviation)  $\sigma$  という。すなわち、

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 \quad (5-60)$$

**正規分布**(normal distribution) (別名**ガウス分布**(Gaussian distribution)) の場合には、 $\mu \pm \sigma$  の中に全体の約 2/3、 $\mu \pm 2\sigma$  の中に全体の約 19/20 が入る。

確率変数  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  も確率変数で、その期待値は、次式で与えられる。

$$E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy \quad (5-61)$$

$$\text{ここで、} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$p(x, y)$  は 2 次元同時確率密度関数と呼ばれる。 $x, y$  の値によって確率密度が異なる。 $p(x, y) dx dy$  が  $x \sim x + dx, y \sim y + dy$  の面にある確率である。その重みが  $f(x, y)$  でそれを全空間で集めると期待値となる。

期待値は線形演算である。すなわち、 $a, b$  を実数として

$$\begin{aligned} E[af(x, y) + bg(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x, y) + bg(x, y)) p(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy \\ &= a E[f(x, y)] + b E[g(x, y)] \end{aligned}$$



特に、 $f(x, y) = x$ ,  $g(x, y) = y$  のとき、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E[ax + by] &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy \\ &= a E[x] + b E[y] \end{aligned} \tag{5-62}$$

ここで、

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy, \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

は**周辺確率分布**と呼ばれている<sup>(36)</sup>。

(5-62)に関しては、例えば、離散型の場合であるが、2つのサイコロを振って出た目の数値  $x, y$  の和だけお金がもらえるとしたら、期待値は

$$E(x + y) = E(x) + E(y) = 3.5 + 3.5 = 7 \text{ 円}$$

としてよい。定義から直接求めると、 $\Sigma$ 目の和 $\times$ 確率より

$$\begin{aligned} E(x + y) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ &\quad + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7 \text{ 円} \end{aligned}$$

となり、上記の結果と一致する。

$n$ 次元ベクトルの**期待値**は、各成分の期待値として以下のように定義される。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t)] &= [E[x_1(t)], \dots, E[x_n(t)]]^T \\ &= [\mu_1, \dots, \mu_n]^T \end{aligned} \tag{5-63}$$

また、**共分散行列**(covariance matrix)は、一般的に違う時間  $t, \tau$  を考えて

$$\begin{aligned} &E[(\mathbf{x}(t) - E[\mathbf{x}(t)])(\mathbf{x}(\tau) - E[\mathbf{x}(\tau)])^T] \\ &\equiv \begin{bmatrix} E[(x_1(t) - \mu_1)(x_1(\tau) - \mu_1)] & \cdots & E[(x_1(t) - \mu_1)(x_n(\tau) - \mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_n(t) - \mu_n)(x_1(\tau) - \mu_1)] & \cdots & E[(x_n(t) - \mu_n)(x_n(\tau) - \mu_n)] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-64}$$

で定義される。(5-22)は、上式で期待値  $\mu_i = 0$  の場合に相当する。