

第6章 H_∞ 制御

制御器は，制御対象の数学モデル（伝達関数や状態方程式）をもとに設計される。しかし，数学モデルはなんらかの近似を行って得られ，実際の制御対象に対してモデル化誤差を持つ。モデル化誤差に対する安定性をロバスト安定性という。**ロバスト**(robust)とは，“強健な”，“がっしりした”の意味がある。本章では，ロバスト制御の代表的設計法である H_∞ （エッチ無限大）制御について述べる。 H_∞ 制御では，ロバスト安定性のみならず制御本来の目的である目標値追従性や外乱除去特性を同時に達成する。 H_∞ ノルムを設計の評価に用い，それが最小になるように制御器を設計する。得られる制御器は，オブザーバ（最悪外乱考慮）+最適制御を一般化したものと解釈できる。

6.1 H_∞ ノルムとは

H_∞ 制御器は，フィードバック制御によって，適当な入力から適当な出力までの閉ループ伝達関数 $G(s)$ の大きさがある値以下にする制御である。適当な入力とは，指令値，外乱，観測ノイズを指す。 H_∞ 制御については，1989年に Doyle, Glover, Khargonekar, Francis が発表した論文が有名で，これにより 2 つのリッカチ方程式を解いて解が得られるようになった⁽¹⁵⁾。 H_∞ の H には Hardy 空間の意味がある。 $G(s)$ がスカラーの場合には， H_∞ ノルムは絶対値の上限 sup として次式で定義されるが，厳密さを求めなければ**最大値**と考えて良い。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G(j\omega)| \tag{6-1}$$

これは，周波数特性のゲインの最大値であり，ボード線図，ナイキスト線図では，図の値である。例えば，閉ループ伝達関数が 2 次系の場合， H_∞ ノルム (M ピークゲイン(maximum value of M)と等しい) が大きいと共振現象によってステップ応答が振動的になり好ましくない。よって H_∞ ノルムがある値以下になるように設計しないとイケない。

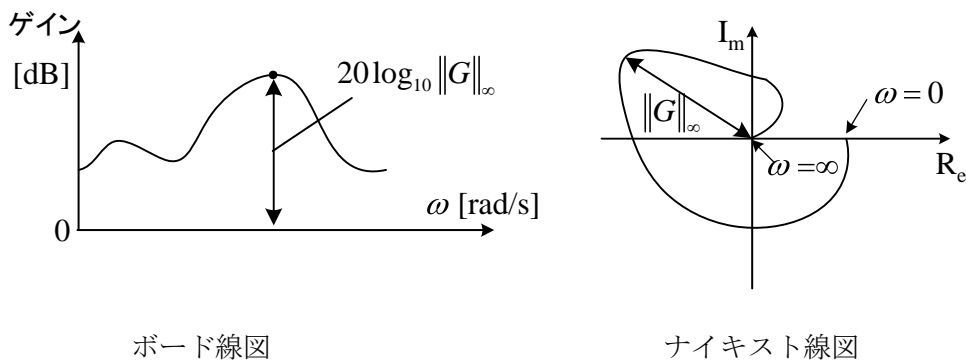


図 6-1 H_∞ ノルムの意味 (1 入力 1 出力の閉ループ伝達関数 $G(s)$ の場合)

多入力多出力で、閉ループ伝達関数が行列となる場合 ($\mathbf{G}(s)$ と書く : 図 6-2 参照), H_∞ ノルムは、次式で定義される。(上限 \sup は最大値と考えよ)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(s)\|_\infty &= \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} \left\{ \lambda_{\max}[\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} \sigma_{\max}[\mathbf{G}(j\omega)] \end{aligned} \quad (6-2)$$



要素の j を $-j$ で置き換えてから転置した行列 $\mathbf{G}^T(-j\omega) \equiv \mathbf{G}^*(j\omega)$ は共役転置行列と呼ばれる。 λ_{\max} は $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の最大固有値であり、 σ_{\max} は $\sqrt{\lambda_{\max}}$ で $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値 (maximum singular value) と呼ばれている。一般に $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の固有値は非負の実数である。すなわち

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \sigma_1^2)(\lambda - \sigma_2^2) \dots (\lambda - \sigma_n^2)$$

$\sigma_i^2 \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) が $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の固有値 λ である。これより、特異値 $\sigma_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) が求まる。 σ_{\max} は、 ω の関数で、その最大値が H_∞ ノルムである。

少し説明すると、 $(\mathbf{G}^*\mathbf{G})^* = \mathbf{G}^*\mathbf{G}$ より $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ はエルミート行列であり、 $\mathbf{x}^*\mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{x} = (\mathbf{G}\mathbf{x})^*\mathbf{G}\mathbf{x} \geq 0$ (複素数とその共役との積は絶対値の 2 乗) であるから、 $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ は準正定行列となる。このとき、 $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ の固有値は非負の実数となるのである。

図 6-2 に 2 入力, 2 出力の場合の閉ループ伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ を示す。

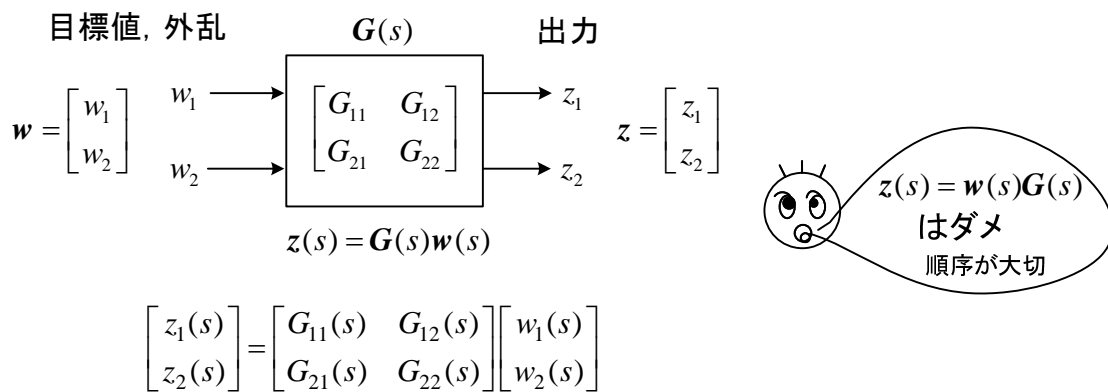


図 6-2 2 入力, 2 出力の場合の $\mathbf{G}(s)$

$G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ の極 (共通) が左半平面にあるとき安定な伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ という。

2 入力 2 出力の場合に限らず、安定な伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ に対し、入力ベクトル $\mathbf{w}(t)$ と出力ベクトル $\mathbf{z}(t)$ に対し、 $\mathbf{G}(s)$ の H_∞ ノルムは、

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_w \frac{\left\{ \int_0^{\infty} z^T(t) z(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \int_0^{\infty} w^T(t) w(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (6-3)$$

と一致することが知られている⁽²²⁾。いろいろの入力(目標値や外乱) $w(t)$ を加えたときに、出力 $z(t)$ が非常に大きくなるのは問題である。入出力の大きさの比(これが伝達関数)の最大値(最悪値)が H_{∞} ノルムに一致するので、 H_{∞} ノルムがある値以下になるように制御器を設計すればよいのである。

エルミート行列

$A^* = A$ のとき、 A をエルミート行列(Hermitian matrix) (成分が実数なら対称行列である) といい、H 行列と書く。 $*$ は共役転置行列を意味する。

性質 1. $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^* = A$

性質 2. H 行列の固有値は全て実数である。

(証明) $x^* A x = x^* \lambda x = \lambda x^* x$

$$x^* A x = x^* A^* x = (Ax)^* x = \lambda^* x^* x$$

従って、 $\lambda = \lambda^*$

性質 3. A を H 行列とすると、エルミート形式(H 形式) $x^* A x$ は常に実数となるが、 $x \neq 0$ なる任意の x 対して $x^* A x > 0$ (≥ 0) を満たすとき正定(\geq は準正定) といひ、 $A > 0$ ($A \geq 0$) と書く。なお、 x は一般に複素数の成分を持つベクトルである。正定の必要十分条件は次のいずれか一つがなりたつことである。

(1) A の固有値が全て正である。

$$(2) A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \\ & \cdot & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{とおくとき } |A_k| > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \text{が成り立つ。}$$

準正定の場合は、 A の固有値が非負、 $|A_k| \geq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) である。

例題 6-1 H 行列 $A = \begin{bmatrix} a & j & 0 \\ -j & 2a & -j \\ 0 & j & a \end{bmatrix}$ が正定であるための条件を求めよ。 a は実数とする。

$$|A_1| = a > 0, |A_2| = \begin{vmatrix} a & j \\ -j & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 1 > 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & j & 0 \\ -j & 2a & -j \\ 0 & j & a \end{vmatrix} = 2a^3 - 2a > 0 \quad \therefore a > 1$$

固有値を計算して以下のように求めることもできる。

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -j & 0 \\ j & \lambda - 2a & j \\ 0 & -j & \lambda - a \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore (\lambda - a)(\lambda^2 - 3a\lambda + 2a^2 - 2) = 0$$

$$\lambda = a, \lambda = \frac{3a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2} \quad \text{固有値が全て正である条件より}$$

$$a > 0, 3a - \sqrt{a^2 + 8} > 0 \quad \text{よって, } a > 1$$

6.2 混合感度問題

制御系を設計する場合、どんな性能に着目すればよいのであろうか？以下に示すように、いろいろなことが考えられる。

- (1) システムが安定でありオーバーシュートやアンダシュートが小さいこと（安定性, 減衰性）。
制御対象が変動しても安定性が影響されないこと（ロバスト安定性: robust stability）。
- (2) 目標値に素早く達すること（速応性 speed of response）。
- (3) 定常偏差(steady-state error)がないこと。
- (4) 外乱の影響を受けないこと（外乱抑圧特性）。
- (5) ノイズの影響を受けないこと（雑音除去特性）。
- (6) 制御対象の操作量(入力)が頻繁に制限値(リミッタ)にかからないこと。

速応性、定常偏差は目標値追従特性とよばれることもある。(1)~(6)には、同時に満足することができないものも含まれている。大雑把に言って、制御器のゲインを大きくすると、(2) (3) (4) は満足されるが、逆に(1) (5) (6) は満たされなくなる。もちろん、不安定な制御対象で制御器のゲインを大きくして安定化することもあり、あくまでも“一応”である。

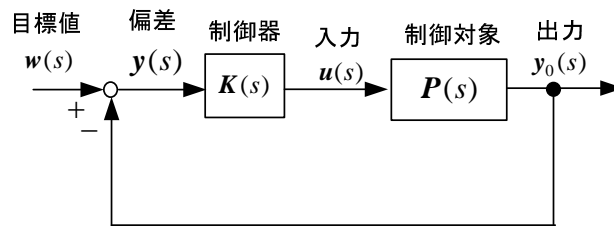


図 6-3 フィードバック制御系の構成

見慣れたフィードバック制御系の構成を図 6-3 に示す。目的は上記の各種条件を満足する制御器 $\mathbf{K}(s)$ (多入力多出力の場合は行列) の設計である。 H_∞ 制御でも目的は同じであるが、独特のブロック線図の書き方をする。図 6-4 は H_∞ 制御で扱う一般化プラント (generalized plant) $\mathbf{G}_0(s)$ と制御器 $\mathbf{K}(s)$ の構成例である。

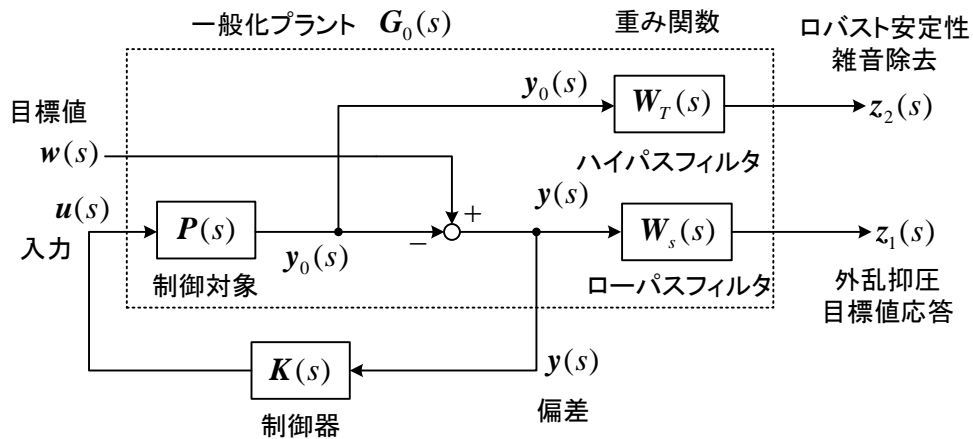


図 6-4 一般化プラント $\mathbf{G}_0(s)$ と制御器 $\mathbf{K}(s)$ の構成例 I

図 6-3 と同じように、 $\mathbf{w}(s)$ を目標値、 $\mathbf{y}(s)$ を偏差とする。 $\mathbf{P}(s)$ は制御対象の伝達関数、 $\mathbf{y}_0(s)$ は制御対象の出力である。 $\mathbf{W}_T(s), \mathbf{W}_S(s)$ は、 $\mathbf{K}(s)$ を設計するための重み関数 (weighting function) で、後で詳しく述べる。図 6-4 の小文字はベクトル、大文字は行列を意味する。これらは全てスカラの場合が多いであろうが、その場合も含め一般的に説明する。

まず、図 6-4 のシステムについて成立する関係式を導出する。ベクトルや行列は、以下の演算が行える適当なサイズとする。特に、積の順序には注意すること。

$$\mathbf{y}_0(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s) \quad (6-4)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{w}(s) - \mathbf{y}_0(s) \quad (6-5)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}(s) \quad (6-6)$$

$$\mathbf{z}_1(s) = \mathbf{W}_S(s)\mathbf{y}(s) \quad (6-7)$$

$$\mathbf{z}_2(s) = \mathbf{W}_T(s)\mathbf{y}_0(s) \quad (6-8)$$

(6-4)~(6-6)より

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)(\mathbf{w}(s) - \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s)) \quad \therefore \quad \mathbf{u}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{P}(s))^{-1} \mathbf{K}(s)\mathbf{w}(s) \quad (6-9)$$

これを(6-7), (6-8)へ代入して,

$$\mathbf{z}_1(s) = \mathbf{W}_S(s)\mathbf{w}(s) - \mathbf{W}_S(s)\mathbf{y}_0(s) = \mathbf{W}_S(s)(\mathbf{I} - \mathbf{T}(s))\mathbf{w}(s) \quad (6-10)$$

$$\mathbf{z}_2(s) = \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\mathbf{w}(s) \quad (6-11)$$

但し、 $T(s) = P(s)(I + K(s)P(s))^{-1}K(s)$

$(I + AB)A = A(I + BA)$ より、 $A(I + BA)^{-1} = (I + AB)^{-1}A$ であるから

$$T(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) \quad (6-12)$$

従って、(6-12) を用いて計算すると、 $I = (I + P(s)K(s))^{-1}(I + P(s)K(s))$ より

$$\begin{aligned} I - T(s) &= (I + P(s)K(s))^{-1}(I + P(s)K(s)) - (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) \\ &= (I + P(s)K(s))^{-1} \end{aligned} \quad (6-13)$$

が得られる。

$$S(s) \equiv (I + P(s)K(s))^{-1} \quad (6-14)$$

は、**感度関数**(sensitivity function)と呼ばれる。それに対し、 $T(s)$ は**相補感度関数**(complementary sensitivity function)と呼ばれ、(6-13)より

$$S(s) + T(s) = I \quad (6-15)$$

の関係がある。(6-10), (6-11)より、

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_s(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{bmatrix} w(s), \quad \begin{bmatrix} y(s) \\ y_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) \\ T(s) \end{bmatrix} w(s) \quad (6-16)$$

が成り立つ。

感度関数 $S(s)$ は、偏差 $y(s)$ に関係することから、制御対象や入力部に加わる外乱の抑圧や目標値応答を良くするために小さくないといけない（“大きい”や“小さい”は曖昧な言い方であるが、スカラの場合は絶対値に対し、行列なら H_∞ ノルムに対して言う）。大雑把に言えば、(6-14)より制御器 $K(s)$ のゲインを大きく選ぶ（制御を強くかける）と $S(s)$ を小さくできる。一方、 $T(s)$ はロバスト安定性を確保するため、あるいは雑音の影響を受けにくくするため小さくする必要がある。これについては、以下に詳しく述べる。

ロバスト安定性

$P(s)$ の**乗法変動**を考え、

$$\tilde{P}(s) = (I + \Delta(s))P(s) \quad (6-17)$$

とする。これは、実際の制御対象の伝達関数 $\tilde{P}(s)$ が、制御器の設計に用いる **ノミナルモデル** (nominal model) (定格モデル) の $P(s)$ に比べ、伝達関数 $\Delta(s)$ の分だけ変動があるということの意味する。制御対象の伝達関数をモデリングする際に、影響が小さいとして近似した項や一定と考えたパラメータが使用条件の変化で $P(s)$ と違ってくることが考えられるからである。変動部分に着目して、図 6-5 のブロック線図を得る。

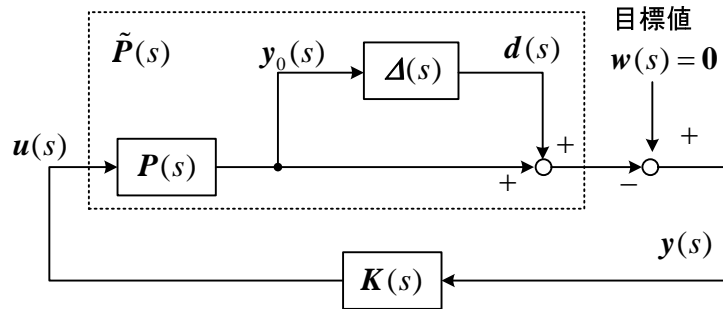


図 6-5 $P(s)$ の乗法変動を考えたときのブロック線図

目標値 $w(s) = \mathbf{0}$ として (線形システムでは目標値は安定性に関係ない), d から y_0 までの伝達関数を求める。

$$y_0 = -P(s)K(s)(d + y_0) \quad \text{より}$$

$$\therefore y_0 = -(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) d$$

従って、 $\Delta(s)$ を含む一巡伝達関数(loop transfer function) $G_l(s)$ は、

$$G_l(s) = -\Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) \quad (6-18)$$

となる。ナイキストの安定条件より考え、安定の十分条件は、 H_∞ ノルムを用いて

$$\left\| \Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) \right\|_\infty < 1 \quad \because \|G\|_\infty = \|-G\|_\infty \quad (6-19)$$

である⁽²²⁾。これは、**スモールゲインの定理**(small gain theorem)として知られている。

(6-19)は、相補感度関数 $T(s)$ を用いて、

$$\left\| \Delta(s)T(s) \right\|_\infty < 1 \quad (6-20)$$

と書ける。すなわち、 $T(s)$ を小さくすることでロバスト安定化が可能となることが判った。(6-12) より大雑把に言って、制御器 $K(s)$ のゲインを小さく選ぶ (制御を強くかけない) と、ロバスト安定性が向上する。なお、観測雑音が制御対象の出力に及ぼす影響も制御器のゲイン $K(s)$ が小さい方が良い。ゲインが大きくと制御が強すぎると、制御対象の思わぬ変化や

雑音の影響を強く受けるというイメージである。

次に、図 6-5 を基にした図 6-6 を考える。

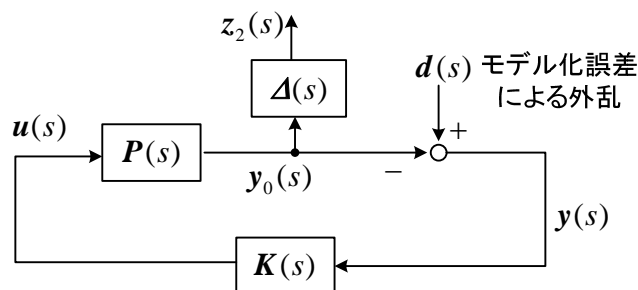


図 6-6 ロバスト安定性を評価するブロック線図

図 6-6 では図 6-5 の目標値 $w(s) = \mathbf{0}$ とし、 $d(s)$ をモデル化誤差による外乱と考えている。 $d(s)$ と $z_2(s)$ の伝達関数を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} z_2(s) &= \Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) d(s) \\ &= \Delta(s)T(s)d(s) \end{aligned} \tag{6-21}$$

よって、(6-20)のロバスト安定性は、 $d(s)$ と $z_2(s)$ の伝達関数を使って評価すればよいことが判る。後述するが、図 6-4 では、 $d(s)$ の代わりに目標値 $w(s)$ で代用している。すなわち、 $z_2(s)$ に対しては $w(s)$ を外乱と考えよう。

混合感度問題の考え方

結局、外乱抑圧や目標値応答を良くするため感度関数 $S(s)$ を小さく、ロバスト安定性の向上や雑音の影響を低減するためには相補感度関数 $T(s)$ を小さくする必要があることが判った。しかし、(6-15)が成立するので、同じ周波数帯域で同時に $S(s)$ 、 $T(s)$ を共に小さくすることには限界がある。そこで、外乱抑圧や目標値応答を良くするため、低周波領域で $S(s)$ を小さくする。これは急速に変化する目標値（高周波信号）に追従させるよりも、まずゆっくりした目標値の変化（低周波信号）に追従しないことには話にならないからである。一方、制御対象の不確かさ（一般に低周波の分は $P(s)$ にモデル化されるであろうから高周波領域で現れる）に起因する安定性の低下を防ぐため、すなわち、ロバスト安定性の点や雑音の影響を低減するため高周波領域で $T(s)$ を小さくする。このように、周波数領域で分けることにより両立を図る。このような考え方は、古典制御理論でボード線図を用いた制御系設計でも使われている⁽³³⁾。つまり、低周波領域では一巡伝達関数のゲインを大きく、高周波領域ではゲインを小さくする方法である。ただ、 H_∞ 制御では閉ループ伝達関数を考えるので、古典制御理論のように位相は考えなくてもよい。

H_∞ 制御では、 w と z の閉ループ伝達関数行列で H_∞ ノルムをできるだけ小さくし、かつ

安定になるような制御器 $\mathbf{K}(s)$ を設計する。つまり (6-16)で、なるべく小さい定数 γ に対し

$$\|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (6-22)$$

を満たす $\mathbf{K}(s)$ を求める。これを**混合感度問題**(mixed sensitivity problem)という。 $\mathbf{S}(s), \mathbf{T}(s)$ を直接小さくするのではなく、 $\mathbf{W}_s(s), \mathbf{W}_T(s)$ の重み関数を掛けた上で小さくする。

まず、(6-22)のようにまとめて最小化して問題ないか、以下に説明しよう。行列の最大特異値はその部分行列の最大特異値より大きいという定理があるから、(6-22)の H_{∞} ノルムについて、一般に次式が成り立つ。

$$\max(\|\mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s)\|_{\infty}, \|\mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\|_{\infty}) \leq \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad \max(1, 2) = 2 \quad (6-23)$$

よって、(6-22)のようにまとめて最小化すれば、それぞれがそれ以下になる。ただし、(6-22)のようにまとめると、保守的な (安全サイドの)評価になることがある。つまり、別々にもっと小さくできる可能性はある (まとめたことであまり小さくできない)。しかし、

$$\|\mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s)\|_{\infty} < \gamma_1, \|\mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\|_{\infty} < \gamma_2 \quad (6-24)$$

と、別々に設計することは(6-15)の関係があるから困難である。

最後に、重要な $\mathbf{W}_s(s)$ と $\mathbf{W}_T(s)$ の選び方の指針を説明する。低周波帯域で $\mathbf{W}_s(s)$ が大きくなるようにローパスフィルタに選ぶと、低周波帯域で $\mathbf{S}(s)$ を小さくできる。これは、(6-22)を満たす様に $\mathbf{K}(s)$ を決めるので、重み $\mathbf{W}_s(s)$ が大きい低周波帯域では、 $\mathbf{S}(s)$ が小さくならざるを得ず、逆に高周波領域では重み $\mathbf{W}_s(s)$ が小さいので、大きな $\mathbf{S}(s)$ でも条件を満足できるからである。一方、 $\mathbf{W}_T(s)$ はハイパスフィルタに選ぶと、高周波帯域で $\mathbf{W}_T(s)$ が大きく、その帯域で $\mathbf{T}(s)$ を小さくできる。低周波領域では制御対象を正しくモデル化するであろうから、低周波領域の $\mathbf{\Delta}(s) \approx \mathbf{0}$ と考えてよく、 $\mathbf{W}_T(s)$ は $\mathbf{\Delta}(s)$ に対応させて選ぶことが考えられる。

図 6-4 では、 $\mathbf{W}_T(s)$ は $\mathbf{\Delta}(s)$ に対応し、モデル化誤差による外乱 $\mathbf{d}(s)$ を目標値 $\mathbf{w}(s)$ で代用している。要は(6-22)の条件を満足するように $\mathbf{K}(s)$ を設計すればよいので、 $\mathbf{G}_{zw}(s)$ が導けるなら目標値 $\mathbf{w}(s)$ が代用できるのである。

ところで、一般化プラントは自由に構成してよい。図 6-7 もその例である。詳細は述べないが、 $\mathbf{w}_1(s)$ に対する $\mathbf{z}_2(s)$ の伝達関数を考えることにより、次式に示す制御対象の**加法変動**に対するロバスト安定性が評価できる⁽²²⁾。

$$\tilde{\mathbf{P}}(s) = \mathbf{P}(s) + \mathbf{\Delta}(s) \quad (6-25)$$

また、図に示すように制御対象に入る外乱 $\mathbf{w}_2(s)$ に対し、 $\mathbf{z}_1(s), \mathbf{z}_2(s)$ をそれぞれ評価することもできる。後述するが、最終的に一般化プラントを状態方程式に記述できればよい。

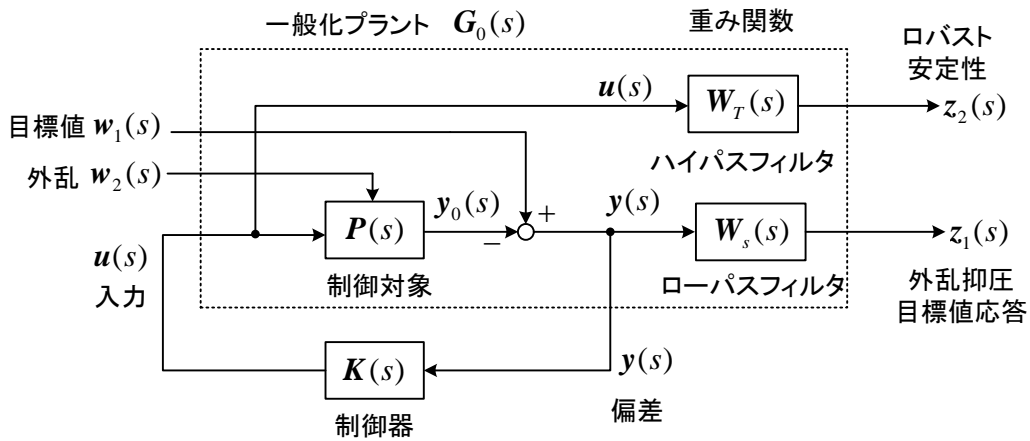


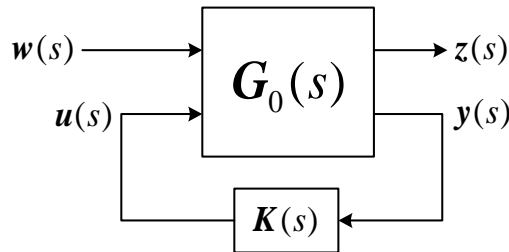
図 6-7 一般化プラント $G_0(s)$ と制御器 $K(s)$ の構成例 II

6.3 H_∞ 制御問題とその解

H_∞ 制御問題は、外部入力（目標値，外乱，観測ノイズ） $w(s)$ と制御量 $z(s)$ との間の閉ループ伝達関数行列 $G_{zw}(s)$ に対して，

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \quad (6-26)$$

とし，かつ図の制御系を安定にする制御器 $K(s)$ を求めることである。



$G_0(s)$: 一般化プラント， $K(s)$: H_∞ 補償器

図 6-8 H_∞ 制御問題

一般化プラント $G_0(s)$ は次式で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = G_0(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

このとき，図の閉ループ伝達関数行列 $G_{zw}(s)$ は次式で求められる。

$$G_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (6-28)$$

H_∞ 制御問題を解くためには、一般化プラント $G_0(s)$ を状態方程式で表現する必要がある。
これを、次式で表わす。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (6-29a)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (6-29b)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (6-29c)$$

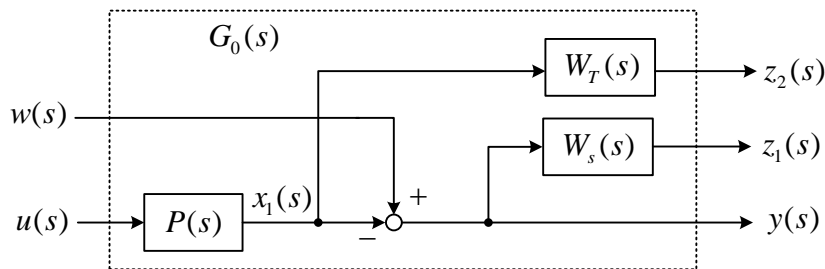
ここで、各変数ベクトルの次元は以下の通りとする。

$$\mathbf{x} : n \text{ 次元}, \quad \mathbf{w} : n_w \text{ 次元}, \quad \mathbf{u} : n_u \text{ 次元}$$

$$\mathbf{z} : n_z \text{ 次元} \quad \mathbf{y} : n_y \text{ 次元}$$

\mathbf{x} の変数には、実際の制御対象の変数だけではなく、重み関数の変数も含まれていることに注意しよう。

例題 6-2 図の一般化プラントについて、状態方程式を求めよ。



$$\text{ただし, } P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad W_s(s) = \frac{10}{s + 5}, \quad W_T(s) = \frac{(s + 10)^2}{500}$$

ローパスフィルタ ハイパスフィルタ

(解) $P(s)$ の出力を $x_1(s)$ とすると、

$$(s^2 + s + 1)x_1(s) = u(s) \quad \textcircled{1}$$

$sx_1(s) = x_2(s)$ とおいて、次の状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \textcircled{2}$$

* 3章の可制御正準系が利用できる。

$W_s(s)$ については、

$$\frac{10}{s + 5} = \frac{z_1(s)}{y(s)} \quad \therefore 10y = (s + 5)z_1$$

であるから、

$$\dot{z}_1 = -5z_1 + 10(w - x_1) \quad \textcircled{3}$$

$W_T(s)$ については,

$$\frac{(s+10)^2}{500} = \frac{z_2(s)}{x_1(s)}$$

$$\therefore (s^2 + 20s + 100)x_1 = 500z_2$$

①および $sx_1(s) = x_2(s)$ を利用して,

$$z_2 = \frac{99}{500}x_1 + \frac{19}{500}x_2 + \frac{1}{500}u \quad \text{④}$$

図より, y については

$$y = w - x_1 \quad \text{⑤}$$

②~⑤より,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{A} \qquad \mathbf{B}_1 \qquad \mathbf{B}_2$

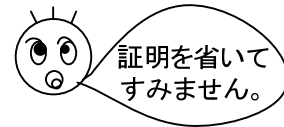
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 99/500 & 19/500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/500 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{D}_{11} \qquad \mathbf{D}_{12}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_2 \qquad \mathbf{D}_{21} \qquad \mathbf{D}_{22}$

H_∞ 制御問題は, Doyle らにより解かれた。以下に結果のみを示す。以下の仮定を設ける^{(18),(19)}。



(1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$: 可安定

(2) $\text{rank } \mathbf{D}_{12} = n_u$ (縦長の列フルランク) $\mathbf{D}_{12}(n_z \times n_u) : n_z \geq n_u$

(3) $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} = n + n_u$ (列フルランク) ω : 任意(0 含む)

(4) $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$: 可検出

(5) $\text{rank } \mathbf{D}_{21} = n_y$ (横長の行フルランク) $\mathbf{D}_{21}(n_y \times n_w) : n_w \geq n_y$

$$(6) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + n_y \quad (\text{行フルランク}) \quad \omega : \text{任意 (0 含む)}$$

$$(7) \quad D_{11} = \mathbf{0}, \quad D_{22} = \mathbf{0}$$

これらの仮定で、(1), (4)は制御系の安定化に必要なものである。(2),(3),(5),(6)については、粗く言えば実際の制御対象や重み関数行列の極や零点が虚軸上（原点を含む）に存在しなければ成立する^{(19),(29)}。(7)の仮定がないと、解は複雑となる。可安定、可検出はそれぞれ可制御、可観測の条件を弱めたものである。不可制御な部分システムが安定であれば、制御入力によって安定化しなくてもよいので**可安定(stabilizable)**と言える。また、不可観測な部分システムが安定であるならば、その出力からの情報がなくても制御できるため**可検出(detectable)**と言う。

まず、一般化制御対象について、以下の2つの**リッカチ方程式**を解く⁽²⁸⁾。

$$XA + A^T X + \frac{1}{\gamma^2} XB_1 B_1^T X - (C_1^T D_{12} + XB_2)(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X) + C_1^T C_1 = \mathbf{0} \quad (6-30)$$

$$YA^T + AY + \frac{1}{\gamma^2} YC_1^T C_1 Y - (B_1 D_{21}^T + YC_2^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1} (D_{21} B_1^T + C_2 Y) + B_1 B_1^T = \mathbf{0} \quad (6-31)$$

この解の中から、次の条件を満たすものを選択する。

$$(1) \quad X = X^T \geq \mathbf{0} \quad (\text{準正定})$$

$$(2) \quad Y = Y^T \geq \mathbf{0} \quad (\text{準正定})$$

$$(3) \quad \rho(XY) < \gamma^2 \quad \text{ここで, } \rho(A) = \max |\lambda_i(A)| : \text{固有値(絶対値)の最大値}$$

X , Y が求まると、 H_∞ 補償器は次の様に構成される。ここでは、一般に用いられている**中心解(central solution)**と呼ばれるものを示す。

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} y \quad (6-32)$$

$$u = F \hat{x} \quad (6-33)$$

ただし、

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + ZL_y (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) \quad (6-34)$$

$$\hat{B} = -ZL_y \quad (6-35)$$

$$F = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X) \quad (6-36)$$

$$L_y = -(B_1 D_{21}^T + Y C_2^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \quad (6-37)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \quad (6-38)$$

(6-28),(6-29)を用いて, (6-27)は次式の様に書くこともできる。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \{A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L_y (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X)\} \hat{x} - Z L_y y \\ &= A \hat{x} + B_1 w_0 + B_2 u + Z L_y (\hat{y} - y) \end{aligned} \quad (6-39)$$

$$\hat{y} = C_2 \hat{x} + D_{21} w_0 \quad (6-40)$$

$$\text{但し, } w_0 = \gamma^{-2} B_1^T X \hat{x}$$

これらの式は, (6-29)と比べると, w の最悪外乱 w_0 を推定し, オブザーバを構成したものと解釈できる。 $Z L_y$ はオブザーバゲイン, F がレギュレータゲインになっている。カルマンフィルタを用いたオブザーバを利用して, 最適レギュレータを構成するとき, 二つのリッカチ方程式を解くことになる。これはLQG (Linear Quadratic Gaussian)制御と呼ばれている。 H_∞ 制御も評価は異なるが, 同様に二つのリッカチ方程式を解いている。しかし, LQG 制御では, 二つのリッカチ方程式は独立で, 制御と観測の分離がなされているが, H_∞ 制御では, 分離されておらず, その点設計は難しくなる。 $\gamma \rightarrow \infty$ とすると, H_∞ 制御はLQG 制御に一致する。つまり, H_∞ 制御はLQG 制御を含むことが知られている⁽²⁰⁾⁽²³⁾。

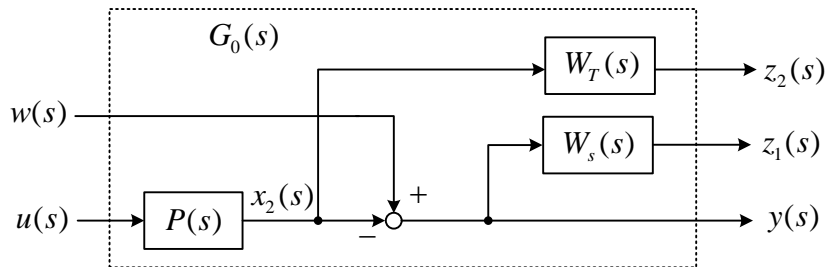
(6-32), (6-33)より, H_∞ 制御器の伝達関数行列 $K(s)$ は,

$$K(s) = F(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (6-41)$$

である。 $K(s)$ の分母の次数は一般化プラント A の次元と等しくなり, 決して小さくはない。そこで, 伝達関数のボード線図がほぼ等しくなるように低次元化することも行われる。

実際の設計では, MATLAB などの商用ソフトウェアパッケージが利用できる。制御器の状態空間表示が求まると, 最終的に双一次変換などで離散化して制御用コンピュータで実現することになる。

例題 6-3 図の一般化プラントについて, 状態方程式を求めよ。



ただし, $P(s) = \frac{2s}{s^2+1}$, $W_s(s) = \frac{10}{s+5}$, $W_T(s) = s+20$

また, H_∞ 制御問題の仮定(2),(3)が成り立つか調べよ。

(解) 制御対象より

$$s^2 x_2(s) + x_2(s) = 2s u(s) \quad \therefore s x_2(s) + \frac{x_2(s)}{s} = 2u(s) \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{x_2(s)}{s} \equiv x_1(s) \quad \textcircled{2}$$

とおき, 時間関数にラプラス逆変換して, 状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad \textcircled{3}$$

$W_s(s)$ については,

$$\frac{10}{s+5} = \frac{z_1(s)}{y(s)} \quad \therefore 10y = (s+5)z_1$$

であるから, 時間領域では

$$\dot{z}_1 = -5z_1 + 10(w - x_2) \quad \textcircled{4}$$

$W_T(s)$ については,

$$s+20 = \frac{z_2(s)}{x_2(s)}$$

$$\therefore z_2(s) = s x_2(s) + 20x_2(s)$$

①, ②を用い, 時間領域では,

$$z_2 = -x_1 + 20x_2 + 2u \quad \textcircled{5}$$

図より, y については

$$y = w - x_2 \quad \textcircled{6}$$

③~⑥より,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{A} \qquad \mathbf{B}_1 \qquad \mathbf{B}_2$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{D}_{11} \qquad \mathbf{D}_{12}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

C_2 D_{21} D_{22}

仮定(2)については, $\text{rank } D_{12} = n_u = 1$ を満足する。

仮定(3)については,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} -5 - j\omega & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3 \quad (\omega = 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

よって, 仮定を満足しない。行列によっては $\omega \neq 0$ でランクが下がることもある。

◎ 行列の基本変形

- (1) 行または列の順序を変える。
- (2) 行または列に 0 でない数を掛ける。
- (3) ある行または列にある数を掛けてそれぞれ他の行または列に加える。

◎ 行列の**階数**(rank)は, 一次独立な行ベクトルの数(=一次独立な列ベクトルの数)である。
行列の基本変形を行っても行列の階数は変わらない。

6.4 ロバストサーボ系

$K(s)$ に積分器が含まれないとステップ指令に対し定常偏差を 0 にできないが, 中心解は積分器を含むとは限らない。そこでロバストサーボ系とするための工夫がいくつか提案されている^{(18),(19)}。本稿では, 図 6-9 の重み関数による方法を紹介する。

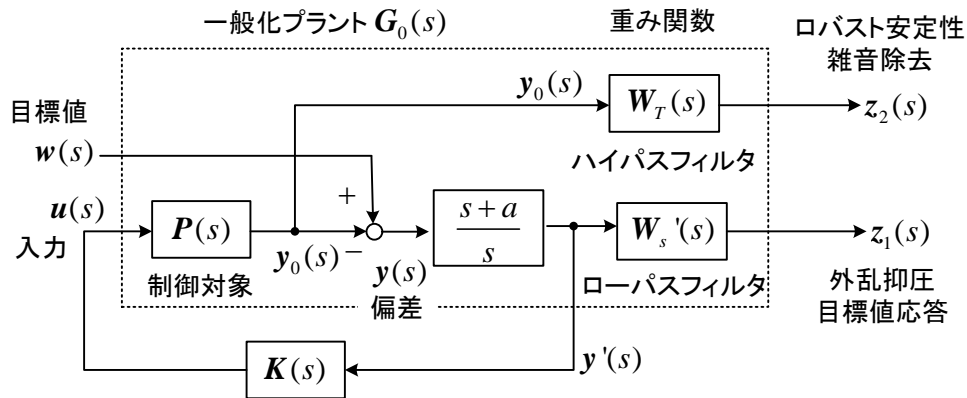


図 6-9 サーボ系の構成法

この方法は、偏差の後に、積分器を持つ $\frac{s+a}{s}$ (a は正の定数) のブロックを挿入する。

そして、 $W_s'(s)$ で $s+a$ を打ち消すようにする。例えば

$$W_s'(s) = \frac{k}{s+a} \mathbf{I} \quad (6-42)$$

と選ぶ。このようにした一般化プラントについて、 H_∞ 制御問題を解いて $\mathbf{K}(s)$ を求めれば、偏差に対する実際の制御器 $\mathbf{K}'(s)$ は、次式のように得られる。

$$\mathbf{K}'(s) = \frac{s+a}{s} \mathbf{K}(s) \quad (6-43)$$

この結果、制御器に積分器が含まれることになり、サーボ系が構成できる。

$w(s)$ と $z_1(s)$ の間の伝達関数行列を求めてみよう。(6-43)を用いて

$$z_1(s) = \frac{s+a}{s} W_s'(s) (\mathbf{I} + P(s) \mathbf{K}'(s))^{-1} w(s) \quad (6-44)$$

よって、実質的な重み関数は

$$W_s(s) = \frac{s+a}{s} W_s'(s) = \frac{k}{s} \mathbf{I} \quad (6-45)$$

となる。

なお、 $(s+a)/s$ の代わりに積分器 $1/s$ を用いることはできない。何故なら、そうすると \mathbf{D}_{21} が行フルランクの条件を満足しないためである (積分器で状態変数が増え、 \mathbf{y}' を表すとき w の項がなくなる)。制御対象に最初から積分器がある場合にも解けないので、類似の方法が適用されている⁽²⁴⁾。

H_∞ の応用として、ハードディスク⁽²²⁾、燃料噴射ポンプ、鉄鋼プロセスラインの張力制御、柔軟構造物の制御、自動車のロックアップクラッチなどへの応用⁽³⁰⁾などが報告されている。