

第7章 モデル規範適応システム

オブザーバを用いることで、直接測ることのできない状態変数を推定できることは既に述べた。このとき、制御対象の状態方程式に含まれるパラメータは既知であるとしたが、この値が運転中に変化する場合には、オブザーバで正しい状態変数の推定値が得られない。**モデル規範適応システム** (MRAS, model reference adaptive system) を利用して、これらのパラメータをオンラインで**同定** (identification) する問題を考えてみよう。

7.1 MRAS の基本構成

モデル規範適応システムには、**モデル規範形適応制御** (model reference adaptive control) と **適応同定システム** (adaptive identification system) がある。図 7-1 のモデル規範形適応制御では、望ましい動特性を持つ**規範モデル** (reference model) の出力 y_m に制御対象の出力 y が一致するようにすなわち差 $e = y_m - y$ を 0 にするように**適応機構** (adaptation mechanism) で制御パラメータを演算する。この制御パラメータを用いて制御器は入力 u を演算する。規範モデルや適応機構も広い意味では制御器の一部である。一方、図 7-2 の適応同定システムは実際の制御対象を規範モデルと考慮して、制御対象の出力 y と**可調整モデル** (adjustable model) の出力 \hat{y} の差 e が 0 になるように適応機構が働いて、制御対象の未知パラメータを同定 (推定) する。可調整モデルには制御対象を表す数学モデルを用いる。例えば、制御対象がモータ

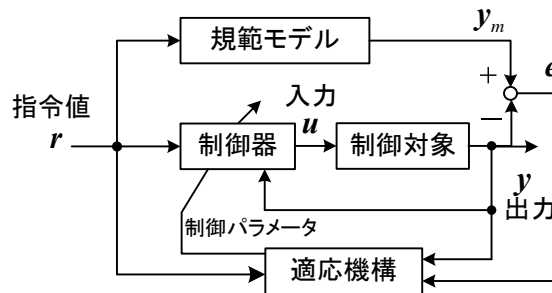


図 7-1 モデル規範形適応制御

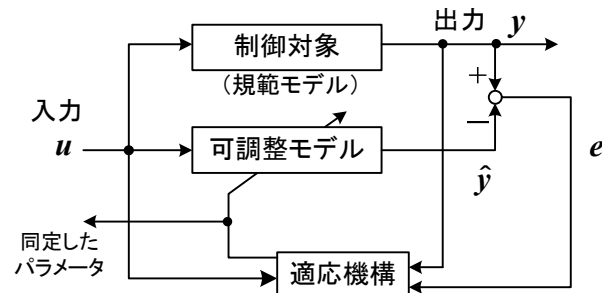


図 7-2 適応同定システム

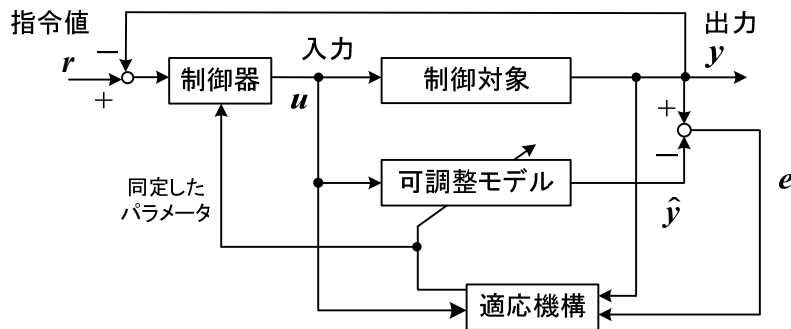


図 7-3 セルフチューニングレギュレータ

なら可調整モデルではその数学モデルを使うので、抵抗などのパラメータを用いる。それらが未知であれば、適応機構により同定できる。適応同定システムは、制御までは行っていないので、図 7-3 のように制御器が必要で、このとき同定したパラメータが利用できる。これは**セルフチューニングレギュレータ**(STR self-tuning regulator)と呼ばれる。可調整モデルや適応機構も広い意味では制御器である。適応同定器に制御対象の状態変数 x を推定する機能を付加したシステムは**適応オブザーバ** (adaptive state observer) と呼ばれる。この詳しい構成例を図 7-4 に示す。適応オブザーバにより、パラメータと状態変数が全て推定できることになり、これを制御に利用すれば高度な制御が期待できる。

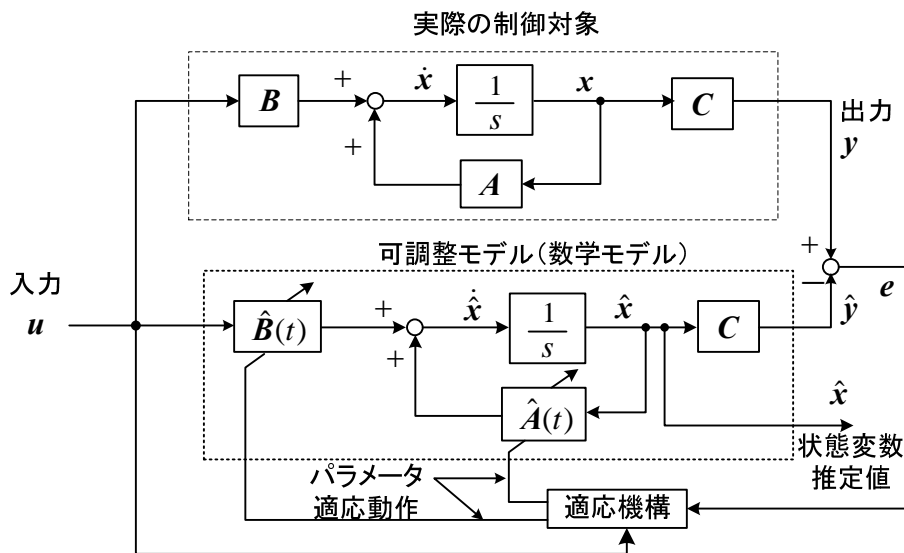


図 7-4 適応オブザーバ

7.2 非線形システムの安定判別法

MRAS の設計では、安定性を確保することが最も重要である。非線形システムの安定判

別が可能なリアプノフ法 (Lyapunov method) とポポフの超安定論 (Popov's hyperstability theory) は, MRAS を構成する場合によく用いられる。本節では, これらにつき簡単に述べる。なお, ラウスの安定判別法やナイキストの安定判別法は線形システムにしか使えない。

(1) リアプノフの安定判別法

非線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (7-1)$$

で表わされる非線形システム (nonlinear system) について, リアプノフの安定性についての定理は, 以下の様に与えられる。

リアプノフ法 : 次の条件を全て満足し, 連続な 1 階偏導関数をもつ連続な実数値スカラー関数 $V(x)$ が存在するならば, (7-1) は **大域的漸近安定** (asymptotically stable in large) である。大域的漸近安定とは非線形システムで, どんな初期値から出発しても **平衡点** (equilibrium point) に収束する場合をいう。線形では安定と言えば大域的漸近安定を意味する⁽¹⁾。

(i) $V(0) = 0$

(ii) $x \neq 0$ のとき $V(x) > 0$

(iii) $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow \infty$

(iv) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$

(v) 原点以外で, $\frac{dV(x)}{dt}$ は恒等的に 0 でない。

これらの条件を満足するとき $V(x)$ は **リアプノフ関数** と呼ばれている。リアプノフ関数を見つける一般的な方法はなく, 経験的に見つける必要がある。エネルギーは 1 つの候補になる。また, この方法は安定性に関する十分条件を与えるので, 実際の安定領域はもっと広いと考えるべきである。つまり, リアプノフ関数を探して, 上記の条件を満足する安定な制御パラメータが見つかったからといって, 上記の条件を満足しない制御パラメータの場合に不安定とは断言できないのである。しかし, 少なくとも安定な制御パラメータが求まっていることは確かなので, それで制御系を設計すれば問題ないのである。

次式の **線形システム** (linear system) について考えよう。

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (7-2)$$

リアプノフ関数として

$$V(x) = x^T P x \quad (7-3)$$

を選ぶ。ここで $\mathbf{P} > 0$ (正定行列, p.41 参照) に選ぶと, (i), (ii), (iii) を満足する。

(7-3)を時間微分して, (7-2)を用い

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (7-4)$$

と置くと,

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

であるから, $\mathbf{Q} > 0$ (正定行列) であれば, (iv), (v) を満足する。(7-4)は**リアプノフ方程式** (Lyapunov equation) と呼ばれる。 $\mathbf{Q} > 0$ となる \mathbf{Q} を1つ決めて, (7-4)より \mathbf{P} を決定すると, $\mathbf{P} > 0$ であることが, (7-2)が漸近安定であるための必要十分条件となる。

例題 7-1 単振子の接線方向の運動方程式を

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - c \frac{d\theta}{dt}$$

とする。 c は空気抵抗である。リアプノフ関数を用いて, $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ のまわりの運動の安定性を調べよ。

(解) $\theta = x_1$, $\frac{d\theta}{dt} = x_2$ とおくと, 非線形微分方程式

により系が記述できる。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{c}{ml} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1$$

(これらが, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ に対応する。)

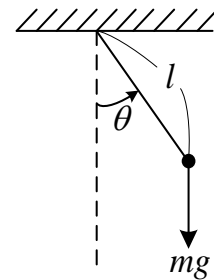
関数 V として, 全エネルギーをとると速度 $v = l x_2$ だから

$$V = mgl(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} ml^2 x_2^2$$

V は, 定理の (i), (ii), (iii) を満足している。また,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= mgl \sin x_1 \cdot x_2 + ml^2 x_2 \left(-\frac{c}{ml} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1\right) \\ &= -lc x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

$dV/dt = 0$ となるのは, $x_2 = 0$ のときだけである。常に $x_2 = 0$ となるのは, 与式より,



$(x_1, x_2) = (0, 0)$ のみであるから、(iv), (v) を満すので、平衡点は漸近安定である。

(2) ポポフの超安定論⁽¹¹⁾

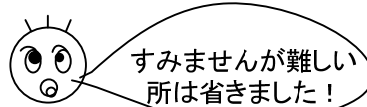


図 7-5 の線形定係数ブロックと非線形ブロックより成るシステムを考える。なお、フィードバックシステムの安定性を調べるので外部入力は零とする。

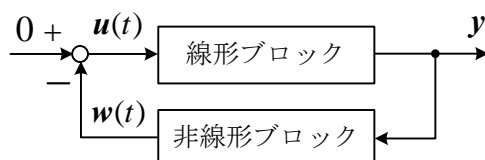


図 7-5 非線形制御システム

線形ブロック :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (7-5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7-6)$$

非線形ブロック :

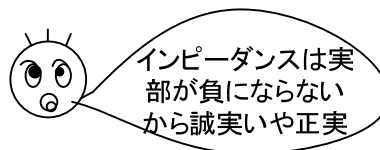
$$w(t)(= -u(t)) = f(y, t) \quad (7-7)$$

ここで、 x は n 次元の状態ベクトル、 u, y は同じ m 次元の入力、出力ベクトルである。また、 (A, B) は可制御、 (C, A) は可観測とする。いま、**非線形ブロック**(nonlinear time variant block)において、すべての $t_1 \geq 0$ に対し次の不等式 (**ポポフの積分不等式** (Popov integral inequality) と呼ばれる) が成り立っているものとする。

$$\int_0^{t_1} w^T(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-8)$$

但し、 γ_0^2 は t_1 に依存しない有限な正数である。

このとき、ポポフは、次の定理を導いた。



超安定定理 : 図 7-5 のフィードバック系が **超安定**

(あるいは**漸近超安定***(asymptotically hyperstable)) となるための必要十分条件は、線形ブロック (linear time invariant block) の伝達関数行列

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (7-9)$$

が**正実**(positive real) (あるいは**強正実***(strictly positive real)) となることである。*印が対応。

超安定 (hyperstable)とは、次式を満足する場合を言う。

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K (\|\mathbf{x}(t_0)\| + \delta) \quad (7-10)$$

ただし、 $t \geq t_0$, K, δ : 正の定数, ノルム $\|\mathbf{x}\| = \{\mathbf{x}^T \mathbf{x}\}^{1/2}$

$\mathbf{x}(t)$ がある範囲に納まっていることを意味する。漸近超安定とは超安定で、しかも

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7-11)$$

を満足する場合である。超安定より条件が厳しく、通常我々が安定と言う場合に相当しよう。以下、漸近超安定と強正実の場合について述べる。

定理 I : 1入力1出力の場合には、 $F(s)$ はスカラ関数となるので、 $F(s)$ と表わす。 $F(s)$ が強正実であるための必要十分条件は次の2つの条件を共に満足することである。

- (i) $F(s)$ は s 平面の右半平面にも虚軸上にも極を持たない。
- (ii) $s = j\omega$ なるすべての ω に対して $F(j\omega)$ の実部が正つまり $\text{Re } F(j\omega) > 0$

(i)は $F(s)$ が安定な伝達関数であることを意味している。また、(ii)は、 $F(j\omega)$ のナイキスト線図が右半平面のみに存在することを意味する。従って、 $F(s)$ が強正実関数ならば、 $F(j\omega)$ の位相角は ω のいかんにかかわらず $\pm 90^\circ$ 以内である。更に強正実関数の逆数もまた強正実関数であることが証明でき、この結果 $F(s)$ の零点は右半平面や虚軸上に存在しない。また、 $F(s)$ が実係数有理関数の場合、強正実ならば分母と分子の多項式の次数の差はたかだか1であることも証明できる。

定理 II : 多入力多出力システムで、 $F(s)$ が行列の場合、強正実であるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition)は、次の2つの条件を共に満足することである。

- (i) $F(s)$ の各要素は、右半平面にも虚軸上にも極を持たない。
- (ii) $s = j\omega$ なるすべての ω に対して

$$\mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega) > 0 \quad (\text{正定}) \quad (7-12)$$

$F(s)$ がスカラ関数のとき、定理IIの条件(ii)は定理Iの条件(ii)と一致する。また、 $\mathbf{H} = \mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega)$ はエルミート行列であり、これが正定である条件は、第6章(p.70)で述べている。

定理 III : (7-9)で与えられる $F(s)$ が強正実となるための必要十分条件は、次の関数を満足するような行列 $\mathbf{L}, \mathbf{W}, \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ が存在することである⁽¹¹⁾。

$$A^T P + PA = -LL^T - Q \quad (7-13)$$

$$B^T P + W^T L^T = C \quad (7-14)$$

$$D + D^T = W^T W \quad (7-15)$$

これは、**カルマン・ヤクボビッチの補題**(Kalman-Yacubovich's lemma)と呼ばれる。なお、上記の関係は、 $D = 0$ の場合にも満足され得る。

$D = 0$ の場合、(7-13), (7-14), (7-15)は次の様に単純化される⁽⁶⁾。

$$A^T P + PA = -Q \quad (7-16)$$

$$B^T P = C \quad (7-17)$$

(7-16), (7-17)は $D \neq 0$ の場合には、 $L = 0$ と選ぶことで得られ、強正実となるための十分条件となる⁽¹¹⁾。(7-16)は、リアプノフ方程式(Lyapunov equation)と呼ばれており、 $Q > 0$ となる Q を1つ決めて、この式より対称行列 P を決定すると、 $P > 0$ であることが、 A が安定行列(固有値が左半平面にある)であるための必要十分条件である。すなわち、ラウスの安定判別法と等価である。安定条件を求めるだけであれば、 Q は特別なものでも良いが^{(1),(5)}、(7-17)から C を決める場合に限られたものになるから^{(8),(11)}、できるだけ一般的な $Q > 0$ を選んで C を求める方が自由度があつて良いだろう。超安定論の適用にあたっては、 C は決まったものでなく、強正実になるように選ぶと考える方がよい。

1入力1出力の場合について、超安定定理を解析してみよう⁽¹¹⁾。(7-8)より

$$\int_0^t w(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2$$

で、 $y(t) = \sin \omega t$, $w(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ (ただし、 $a > 0$)と仮定すると、

$$w(t)y(t) = \frac{a}{2}(\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) \quad (7-18)$$

となるので、位相差が $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ($\cos \varphi > 0$)である限り、第2項は有限だから上記の不等式は満足される。一方、線形ブロックが強正実であれば位相角が $\pm 90^\circ$ 以内であるから、ループ全体としての位相遅れは -180° を超えないので、不安定となることはない。

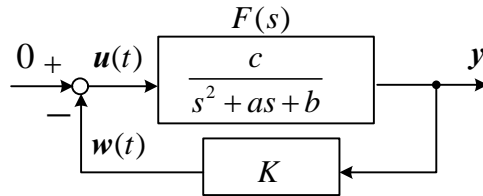
超安定定理は、あらゆる非線形ブロックを考えた場合に必要十分条件となるのであって、特定の非線形ブロックを考える場合には単に十分条件を与えるにすぎない。つまり、強正実でなくても漸近安定となることがあり得る。図にその例を示す。図の線形制御系の特性方程式は

$$s^2 + as + b + cK = 0$$

であり、 $a > 0, b + cK > 0$ なら漸近安定である。一方、 $K > 0$ なら

$$\int_0^{t_1} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = K \int_0^{t_1} y^2 dt > 0$$

で、ポポフの不等式は満足されているが、 $F(s)$ は次数の差が2で正実ではないので、ポポフの安定条件を満足しない。



例題 7-2 $F(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$ が強正実関数となる必要十分条件を求めよ。

定理 I を用いる場合：

条件 (i) より，ラウスの安定判別法より， $a_1 > 0, a_0 > 0$

条件 (ii) より

$$\operatorname{Re}(F(j\omega)) = \operatorname{Re}\left(\frac{jc_1\omega + c_0}{(j\omega)^2 + ja_1\omega + a_0}\right) = \frac{c_0 a_0 + (c_1 a_1 - c_0)\omega^2}{(a_0 - \omega^2)^2 + \omega^2 a_1^2} > 0$$

任意の ω に対して成立するためには， $c_0 a_0 > 0, c_1 a_1 - c_0 > 0$

求める条件は， $a_0 > 0, a_1 > 0, c_0 > 0, c_1 > \frac{c_0}{a_1}$

定理 III を用いる場合：

$\frac{y}{u} = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{x_1}{x_1}$ とおいて， $u = (s^2 + a_1 s + a_0)x_1, y = (c_1 s + c_0)x_1$ とする。

$\frac{d x_1}{d t} = x_2$ とおいて，以下の状態方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [c_0 \quad c_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(7-16)より， $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$ ， $q_1 > 0, q_2 > 0$ と選んで

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = \frac{q_1}{2a_0}, p_2 = \frac{q_2 + 2p_3}{2a_1} = \frac{a_0q_2 + q_1}{2a_0a_1}$$

$$p_1 = a_1p_3 + a_0p_2$$

$\mathbf{P} > \mathbf{0}$ の条件より,

$$p_1 = \frac{a_0^2q_2 + a_1^2q_1 + a_0q_1}{2a_0a_1} > 0$$

$$p_1p_2 - p_3^2 = \frac{a_0 \left\{ (q_1 + a_0q_2)^2 + q_1q_2a_1^2 \right\}}{(2a_0a_1)^2} > 0$$

従って, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ が得られる。(7-17)に代入して

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1] = [0, 1] \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = [p_3, p_2] \quad \text{だから}$$

$$c_0 = \frac{q_1}{2a_0}, c_1 = \frac{a_0q_2 + q_1}{2a_0a_1} = \frac{q_2}{2a_1} + \frac{c_0}{a_1}$$

q_1, q_2 は任意の正の値であるから, この結果は定理 I を用いた場合に一致する。

7.3 パラメータ同定(全状態変数が検出可能な場合)

MRAS 理論を応用して, 可調整モデルのパラメータを同定しよう⁽³⁾。簡単のため制御対象の状態変数 $\mathbf{x}(t)$ は全て検出できるものとする。また, 制御対象は漸近安定かつ可制御とする。

制御対象:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (7-19)$$

可調整モデル:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u}(t) \quad (7-20)$$

目的は, (7-19), (7-20)で, $\mathbf{x}(t)$ と $\hat{\mathbf{x}}(t)$ の差を小さくすることで, パラメータの推定値 $\hat{\mathbf{A}}(t)$, $\hat{\mathbf{B}}(t)$ をそれぞれ \mathbf{A} , \mathbf{B} に収束させることである。なお, \mathbf{u} は共通である。

(7-19)–(7-20)より誤差方程式を作ると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$= A(x - \hat{x}) + (A - \hat{A})\hat{x} + (B - \hat{B})u$$

ここで,

$$x - \hat{x} = e \quad (7-21)$$

$$(A - \hat{A})\hat{x} + (B - \hat{B})u = u_e \quad (7-22)$$

とおくと, 次式を得る。

$$\frac{de}{dt} = Ae + u_e \quad (7-23)$$

強正実ブロックを作るため, (7-16)を用いて**補償要素 P** (compensating element)を付加する。

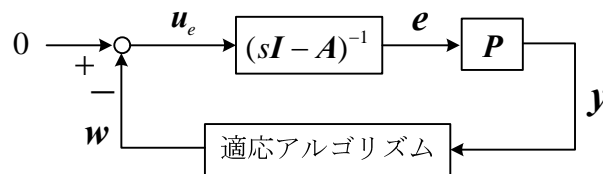
P はリアプノフ方程式の解として次式より決定できる。

$$A^T P + PA = -Q \quad (7-24)$$

Q は任意の正定対称行列であり, $Q = I$ と選ぶ。制御対象が漸近安定であれば, P は正定対称行列となる。出力を y (n 次元) とすると,

$$y = Pe \quad (7-25)$$

と表す。これで伝達関数 $F(s) = P(sI - A)^{-1}$ は $B = I, C = P$ で (7-16),(7-17)を満たし, 強正実となる。



適応アルゴリズムでパラメータ同定を行うとき, 次式のポポフの積分不等式を満たす必要がある。

$$\int_0^{t_1} w^T(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-26)$$

$u_e(t) = -w(t)$ であるから,

$$-\int_0^{t_1} u_e^T(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-27)$$

(7-22)より,

$$-u_e^T(t)y(t) = -y^T(t)u_e = y^T(\hat{A} - A)\hat{x} + y^T(\hat{B} - B)u \quad (7-28)$$

この値が正であれば, (7-27)は満足されるから, $y^T(\hat{A} - A)\hat{x}$, $y^T(\hat{B} - B)u$ の各成分が正になるように, \hat{A} , \hat{B} の各成分を同定しよう。すなわち, \hat{A} の \hat{B} の各成分をそれぞれ $y\hat{x}^T$, yu^T の各成分を PI 制御して推定しよう。

$$\hat{a}_{ij}(t) = K_{pij}y_i(t)\hat{x}_j(t) + K_{lij}\int_0^t y_i(\tau)\hat{x}_j(\tau)d\tau + \hat{a}_{ij}(0) \quad (7-29)$$

$$\hat{b}_{ij}(t) = L_{pij}y_i(t)u_j(t) + L_{lij}\int_0^t y_i(\tau)u_j(\tau)d\tau + \hat{b}_{ij}(0) \quad (7-30)$$

(7-29), (7-30)が(7-27)のポポフの不等式を満足することを証明しよう。(7-28)で,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} &= [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} - a_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} - a_{n1} & \cdots & \hat{a}_{nn} - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \\ &= y_1(\hat{a}_{11} - a_{11})\hat{x}_1 + y_1(\hat{a}_{12} - a_{12})\hat{x}_2 + \cdots + y_1(\hat{a}_{1n} - a_{1n})\hat{x}_n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + y_n(\hat{a}_{n1} - a_{n1})\hat{x}_1 + y_n(\hat{a}_{n2} - a_{n2})\hat{x}_2 + \cdots + y_n(\hat{a}_{nn} - a_{nn})\hat{x}_n \end{aligned}$$

となり, 各成分がポポフの不等式を満足することが十分条件となるから,

$$\int_0^{t_1} y_i(\hat{a}_{ij} - a_{ij})\hat{x}_j dt \geq -\gamma_{0ij}^2 \quad (7-31)$$

であればよい。(7-31)~(7-29)を代入して,

$$y_i(t)\hat{x}_j(t) = f(t), \quad \hat{a}_{ij}(0) - a_{ij} = c \quad (\text{一定})$$

とおくと, 次式が満足されればよい。

$$\int_0^{t_1} f(t) \left(c + K_{pij}f(t) + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau \right) dt \geq -\gamma_{0ij}^2 \quad (7-32)$$

$K_{pij} \geq 0$, $K_{lij} > 0$ とすれば, K_{pij} の項は正で満足する。 $F(t) = c + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau$ とし,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} f(t) \left(c + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau \right) dt &= \frac{1}{K_{lij}} \int_0^{t_1} \frac{dF(t)}{dt} F(t) dt \\ &= \frac{1}{2K_{lij}} (F^2(t_1) - F^2(0)) = \frac{1}{2K_{lij}} \left((c + K_{lij}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau)^2 - c^2 \right) \end{aligned}$$

従って, ポポフの不等式を満足する。

$\mathbf{y}^T(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\mathbf{u}$ についても, (7-30)を用いて同様に証明できるので, (7-29), (7-30)によるパラメータ同定はポポフの不等式(7-26)を十分満足することが証明できた。

例題 7-3 制御対象が次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \quad \text{①}$$

パラメータ a, b を推定する MRAS を構成せよ。但し x, u は既知とする。

(解) 可調整モデルを

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad \text{②}$$

とする。①—②より、誤差方程式を作る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) &= ax + bu - \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u \\ &= a(x - \hat{x}) + (a - \hat{a})\hat{x} + (b - \hat{b})u \end{aligned}$$

ここで、

$$e = x - \hat{x} \quad \text{③}$$

$$u_e = (a - \hat{a})\hat{x} + (b - \hat{b})u \quad \text{④}$$

とおくと、

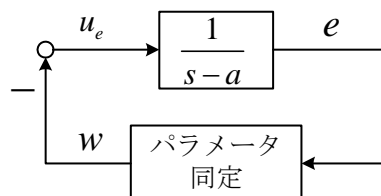
$$\frac{de}{dt} = ae + u_e \quad \text{⑤}$$

伝達関数は、 $\frac{e(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s - a} = F(s)$ となり、 $a < 0$ であれば左半平面に極をもち、 $s = j\omega$

のとき、

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{-a + j\omega} = \frac{-a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ \therefore \operatorname{Re} F(j\omega) &= \frac{-a}{a^2 + \omega^2} > 0 \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

であるから、強正実となる。従って、特に補償を行う必要もなく出力 e を用いてパラメータ同定を行う。このときの、適応ループを図に示す。



パラメータ同定は、Popov の不等式を満足する必要がある。すなわち、

$$\int_0^{t_1} w(t)e(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7)$$

$u_e(t) = -w(t)$ であるから, (7)は次式となる。

$$-\int_0^{t_1} u_e(t)e(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (8)$$

(8)に(4)を代入して,

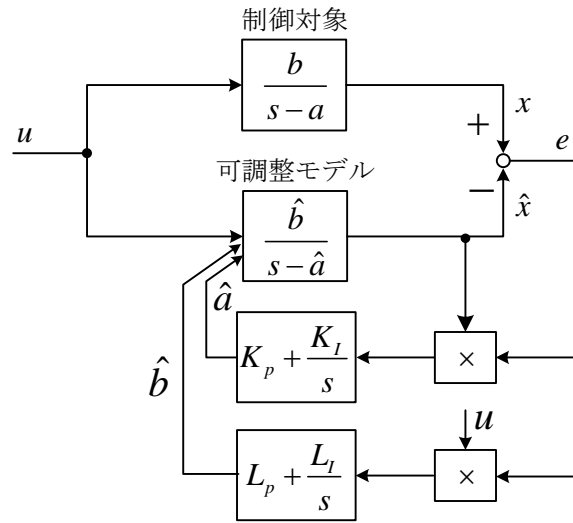
$$\int_0^{t_1} \left((\hat{a}(t) - a)\hat{x}(t)e(t) + (\hat{b} - b)u(t)e(t) \right) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (9)$$

(9)式を満足するように, 次式によりパラメータ \hat{a}, \hat{b} を同定する。

$$\hat{a}(t) = K_p e(t)\hat{x}(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\hat{x}(\tau)d\tau \quad (10)$$

$$\hat{b}(t) = L_p e(t)u(t) + L_I \int_0^t e(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11)$$

同定のブロック線図を示す。



(10), (11)がポポフの不等式を満すことを証明する。 \hat{a} について示せば, \hat{b} についても全く同様である。

$$f(t) = \hat{x}(t)e(t)$$

とおくと, (9)の左辺第1項は, (10)を代入して

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{t_1} (K_p f(t) + K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a)f(t)dt \\ &= \int_0^{t_1} K_p f^2(t)dt + \int_0^{t_1} (K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a)f(t)dt \end{aligned}$$

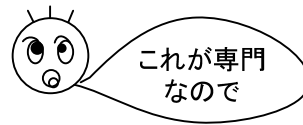
$K_p > 0$ とすると、第1項は非負である。

$$\text{公式} \quad \int_0^{t_1} g(t)\dot{g}(t)dt = \frac{1}{2}((g^2(t_1) - g^2(0)))$$

を用いると、 $g(t) = K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a$, $\dot{g}(t) = K_I f(t)$ だから

$$\text{第2項} = \frac{1}{K_I} \frac{1}{2} \left((K_I \int_0^{t_1} f(\tau)d\tau - a)^2 - a^2 \right)$$

よって、 $X \geq -\gamma_{0x}^2$ となり、 \hat{b} も同様であるから⑨が成立し、よって⑦のポポフの不等式を満足する。



例題 7-4 誘導機の状態方程式は与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \text{①}$$

二次鎖交磁束 $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ はセンサで検出でき、一次電流 $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$ は自由に制御できるとする。なお τ_r, M は正の定数である。いま、回転角速度 ω_r (一定と仮定) を推定するため、次式のシミュレータを考える。^ (ハット) は推定値を表わす。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\hat{\omega}_r \\ \hat{\omega}_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \text{②}$$

このとき、速度を次式のPI制御器で推定するとき、安定に推定できることをポポフの超安定論を用いて証明せよ⁽²¹⁾。

$$\hat{\omega}_r = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) \quad \text{③}$$

* 文献(21)は、MRASによる速度センサレスベクトル制御として良く知られている。

(証明) ①-②より

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\psi}_{r\beta} \\ \hat{\psi}_{r\alpha} \end{bmatrix} (\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad \text{④}$$

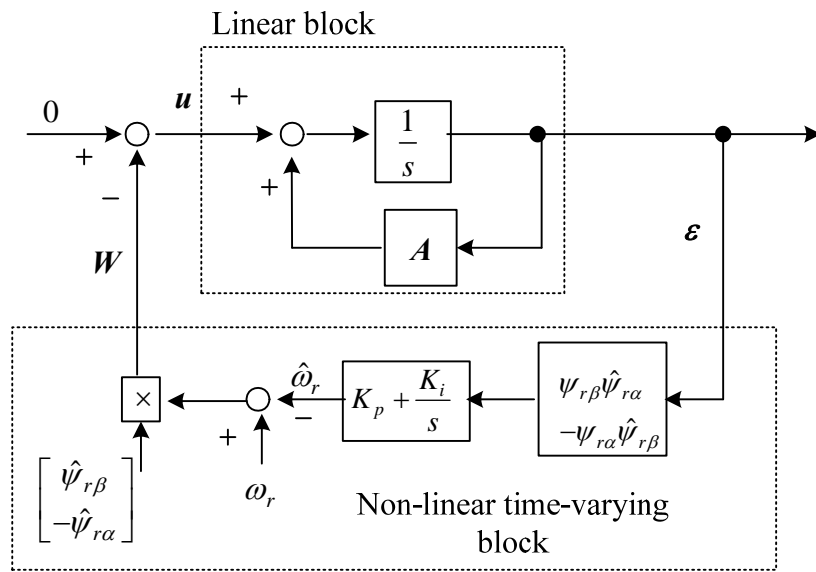
ここで, $\varepsilon_d = \psi_{r\alpha} - \hat{\psi}_{r\alpha}$, $\varepsilon_q = \psi_{r\beta} - \hat{\psi}_{r\beta}$

④を行列表示する。

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{W} \quad (5)$$

ここで,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\beta} \\ -\hat{\psi}_{r\alpha} \end{bmatrix} (\omega_r - \hat{\omega}_r) = -\mathbf{u} \quad (6)$$



MRAS representation as a non-linear feedback system

ポポフの積分不等式

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} dt = \int_0^{t_1} (\varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta} - \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha}) (\omega_r - \hat{\omega}_r) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7)$$

を満足するように速度推定をしなければならない。

$$\int_0^{t_1} \frac{d f(t)}{d t} f(t) dt = \frac{1}{2} (f^2(t_1) - f^2(0)) \geq -\frac{1}{2} f^2(0) \quad (8)$$

であるから,

$$\frac{d f}{d t} = \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta} - \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} \quad (a) \quad , \quad f(t) = \omega_r - \hat{\omega}_r \quad (b)$$

に対応させる。実速度 ω_r は定数と考え, (b)を(a)に代入して,

$$\frac{d \hat{\omega}_r}{d t} = \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}$$

よって $\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}$ を積分すれば速度が推定できる。PI 制御して

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_r &= K_p (\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}) + K_i \int_0^t (\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}) dt \\ &= K_p (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) + K_i \int_0^t (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) dt\end{aligned}\quad (9)$$

を得る。この場合、⑨を⑦に代入すると、(7-32)のように変形でき、⑨の演算はポポフの不等式を満足することが証明される。

次に、④で表わされる線形ブロックの伝達関数行列が強正実となることを証明する。

$$\mathbf{F}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix}\quad (10)$$

定理 II の (i) は極 $s = -\frac{1}{\tau_r} \pm j\omega_r$ より満足する。(ii) を証明する。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega) &= \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} j\omega + \frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & j\omega + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{(-j\omega + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} -j\omega + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & -j\omega + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} \frac{A}{\tau_r} + B\omega & jB\omega_r \\ -jB\omega_r & \frac{A}{\tau_r} + B\omega \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (11)$$

ただし、 $A = (\frac{1}{\tau_r})^2 - \omega^2 + \omega_r^2$ 、 $B = \frac{2\omega}{\tau_r}$

⑪が正定であることは、以下の式から判る。

$$\frac{A}{\tau_r} + B\omega = \frac{1}{\tau_r} \left((\frac{1}{\tau_r})^2 + \omega^2 + \omega_r^2 \right) > 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega\right)^2 - (B\omega_r)^2 &= \left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega + B\omega_r\right)\left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega - B\omega_r\right) \\ &= \left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 + (\omega + \omega_r)^2\right) \left(\left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 + (\omega - \omega_r)^2\right) > 0 \end{aligned}$$

定理Ⅲを使う場合には、④より

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$ とおくと、(7-17)の $B^T P = C$ を満足している。また

$$A^T P + P A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau_r} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\tau_r} \end{bmatrix} = -Q$$

より、 $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau_r} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\tau_r} \end{bmatrix} > 0$ を満足している。

7.4 パラメータ同定(1入力1出力の場合, 離散時間形)

計算が簡単化される離散時間形のパラメータ同定について述べる。同定を行う制御対象の**離散時間システム**(discrete-time system)が、 k を現在として次式で与えられるとする。

$$y_k = \theta^T z_k \quad (k \geq n) \quad (7-33)$$

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} \cdots - a_n y_{k-n} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \cdots + b_n u_{k-n} \quad (\text{成分表示})$$

ここで、 y_i : 出力(スカラ) $i = 0, 1, 2, \dots$

u_i : 入力(スカラ) $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad (2n \times 1) \quad (7-34)$$

$$z_k = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T \quad (2n \times 1) \quad (7-35)$$

(7-33)は、連続システムを離散化することによって得られる。 $k \geq n$ は、(7-35)の成分の係数が負にならない条件である。 y にマイナスを付けた方が伝達関数が綺麗である(後述)。考える問題は、(7-33)で表わされる制御対象の y_i, u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$)を測定して、パラメータ θ を同定することである。(7-33)の推定値を

$$\hat{y}_k = \hat{\theta}^T \mathbf{z}_k \quad (7-36)$$

と書く。誤差 $y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i$ に重みを付けて2乗し、 $i=n$ から $i=k$ まで加え、それらの和を最小にするように、パラメータ $\hat{\theta}$ を決定する。 $i=k$ が現在で、このとき(7-33) , (7-36) が成り立っている。 $i < n$ は \mathbf{z}_i の成分の係数が負になるから除外する。

評価関数として、

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i)^2 \quad \text{但し, } 0 < \lambda \leq 1 \quad (7-37)$$

を考えると、 $\partial J / \partial \hat{\theta} = \mathbf{0}$ より、次のアルゴリズムが得られる^{(14),(16)}。

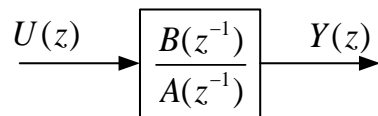
$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \mathbf{z}_k) \quad (7-38)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (2n \times 2n) \quad (7-39)$$

このアルゴリズムは、古いデータに小さな重みをかけて $\hat{\theta}$ を求めようとするもので、**重みつき最小2乗法**と呼ばれる。**重み係数 λ は忘却係数 (forgetting factor)** とも呼ばれる。 $\lambda = 1$ とすると通常の最小2乗法(least-squares method)のアルゴリズムである。これらは、**逐次最小2乗法(recursive least-squares method)**とも呼ばれる。 λ は0.97~0.995位にとられることが多い。重みつき最小2乗法は、同定すべきパラメータが時変の場合にも有効で、収束も早い。このアルゴリズムは本来、 y_i, u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) までのデータが得られて、 $k = n$ から適用すべきものである。しかし、実際には、 $\mathbf{P}_{-1} = \gamma \mathbf{I}$ ($\gamma \gg 1$) , $\hat{\theta}_{-1} = \mathbf{0}$ として $k = 0$ の場合から計算を進めてよいと言われている⁽¹⁶⁾。

ところで、(7-33), (7-34), (7-35)より、 z 変換して初期値を $\mathbf{0}$ とおくと次式が得られる。

$$\begin{aligned} Y(z) &= -(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) \\ &\quad + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}) U(z) \\ \therefore \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \equiv \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \end{aligned} \quad (7-40)$$



これを用いて、(7-33)を

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k \quad (7-41)$$

と書くことがある。この場合、 z^{-1} は遅延演算子を表す。(7-41)を **ARMA モデル**と呼ぶこともあるが、厳密には入力 u_k が雑音の場合に **ARMA モデル**と定義されている⁽²⁵⁾。

雑音 e_k を考えると

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k + e_k \quad (7-42)$$

すなわち、

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} \cdots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \cdots + b_n u_{k-n} + e_k$$

と書ける。 e_k は式誤差と言われる。よって、

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u_k + \frac{1}{A(z^{-1})} e_k \quad (7-43)$$

である。(7-43)は、外部入力をもつ自己回帰モデル(**ARX モデル**)(autoregressive exogenous model)と呼ばれている⁽²⁵⁾。

ランダウ(Landau)によって体系づけられたモデル規範法の考え方に基づく **適応同定器** (Adaptive identifier) より、以下のアルゴリズムが得られている^{(6),(14)}。

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{1 + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \mathbf{z}_k) \quad (7-44)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\lambda_2(k) \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda_1(k) + \lambda_2(k) \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (7-45)$$

ここで、 $0 < \lambda_1(k) \leq 1$, $0 \leq \lambda_2(k) < 2$

$\lambda_1(k) = 1$, $\lambda_2(k) = 0$ の固定ゲイン則はパラメータが頻繁に変化する場合に適すると言われている。適応ゲイン行列 \mathbf{P} の対角要素が小さいほど測定ノイズの影響は小さくなると同時に推定パラメータの収束速度は遅くなる。 $\lambda_1(k) = 1$, $0 < \lambda_2(k) < 2$ はパラメータが未知であるが一定の場合に適すると言われている。 $\lambda_2(k)$ が大きいほど適応ゲインは時間とともに速く減少する。 $\lambda_1(k) = 1$, $\lambda_2(k) = 1$ は漸減ゲイン則と呼ばれる。漸減ゲイン則は、通常
の最小2乗法(least-squares method)と全く一致する。 $\lambda_2(k)$ を1よりも小さくすると測定ノイズが大きい場合に有効となることがある。パラメータがゆっくり変化する場合には、 $0.95 \leq \lambda_1(k) \leq 0.99$, $0 < \lambda_2(k) < 2$ が良いと言われている。

これまで述べたアルゴリズムは、**式誤差法** (方程式誤差法、直並列法とも呼ばれる) によるもので、広く用いられている^{(6),(14)}。この他に、

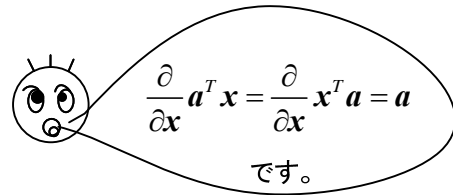
$$\mathbf{z}_k = [-\hat{y}_{k-1}, -\hat{y}_{k-2}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T$$

を用いた出力誤差法のアルゴリズムもある。出力誤差法は式誤差法に比べ複雑であるが、出力へ雑音が入っても同定結果にバイアスが生じない利点があると言われている。

適応同定器によりパラメータが真値に収束するためには、信号 \mathbf{z}_k の各成分が持続的に互いに独立であることが必要である。この条件は、 n 次の制御対象に対して、入力信号 $u(t)$ が n 個以上の周波数成分を含むなら満足される。このような信号は **Persistently Exciting (PE)** とされる。しかし、ただ含めば良いというだけでなく、各成分が十分な振幅をもった適当な低周波域内に存在することが必要である。このために、合成正弦波信号や M 系列信号 (擬似不規則信号) が用いられている⁽¹⁷⁾。

重みつき最小 2 乗法の導出⁽¹⁶⁾

$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i)^2$ の極値を求めるため、



$$\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 2 \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i) \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \text{注} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right]^T \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i \mathbf{z}_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T) = \mathbf{0} \quad \therefore \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right]^{-1} \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i \quad \textcircled{2}$$

ここで、 $\mathbf{P}_k = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right]^{-1}$ 、 $\mathbf{p}_k = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i$ と定義し、②より。

$$\hat{\theta}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{p}_k \quad \textcircled{3}$$

と書く。逆行列を使わない方法を考えていく。 定義より

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \sum_{i=n}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T + \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T = \lambda \mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \quad \textcircled{4}$$

$$\mathbf{p}_k = \sum_{i=n}^{k-1} \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i + y_k \mathbf{z}_k = \lambda \mathbf{p}_{k-1} + y_k \mathbf{z}_k \quad \textcircled{5}$$

④の左から \mathbf{P}_k 、右から \mathbf{P}_{k-1} を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} = \lambda \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}$$

右から \mathbf{z}_k を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k = \lambda \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k$$

$$\therefore \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \quad (6)$$

④の左から \mathbf{P}_{k-1} , 右から \mathbf{P}_k を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} = \lambda \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_k^T = \left(\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right)^T = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T)^T \right]^{-1} = \mathbf{P}_k \quad \text{だから, ⑥を用いて}$$

$$\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k = \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}$$

よって⑦より

$$\lambda \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}$$

$$\therefore \mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (8)$$

③より, (7-38)が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} &= \mathbf{P}_k \mathbf{p}_k - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] (\lambda \mathbf{p}_{k-1} + y_k \mathbf{z}_k) - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k (\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k) y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \\ &= \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \quad (9) \end{aligned}$$

最後に, カルマンフィルタから逐次最小二乗法を導出しよう⁽²⁵⁾。パラメータ $\boldsymbol{\theta}_k$ を状態変数として,

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k \quad (1)$$

を用いる。考える問題は, 次式の出力方程式 ((5-28)に対応) で表わされる y_k, \mathbf{z}_k を測定して, $\boldsymbol{\theta}$ を同定することである。 v_k はノイズである。

$$y_k = \mathbf{z}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k \quad (2)$$

ここで,

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{z}_k = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T \quad (4)$$

$A_k = I, B_k = \mathbf{0}, Q_k = \mathbf{0}, C_k = \mathbf{z}_k^T$ に対応するから, カルマンフィルタのアルゴリズムは

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{r + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{r + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \quad (6)$$

ここで, $R_k = r$

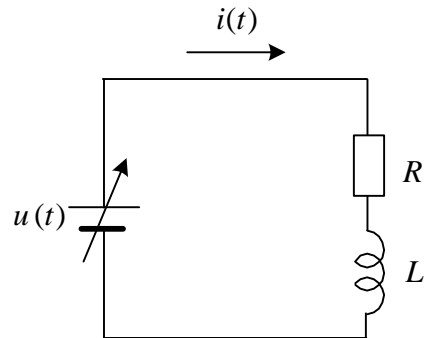
いま, \mathbf{P}_k を新たに $r\mathbf{P}_k$ と置くと, 次式の逐次最小二乗法と一致する。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{1 + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{1 + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \quad (8)$$

カルマンフィルタによりパラメータを推定するために, ①を状態方程式と考える点が面白い。

例題 7-5 図の制御対象で, 入力電圧 $u(t)$ と電流 $i(t)$ は既知である。抵抗 R , インダクタンス L を逐次最小二乗法で求める演算式を示せ。



(解) 状態方程式は, 次式で与えられる。

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \quad (1)$$

サンプリング周期を T として, オイラー法を使うと次の差分方程式が得られる。

$$\frac{i_k - i_{k-1}}{T} = -\frac{R}{L}i_{k-1} + \frac{1}{L}u_{k-1} \quad (2)$$

$$\therefore i_k = \left(1 - \frac{TR}{L}\right)i_{k-1} + \frac{T}{L}u_{k-1} \quad (3)$$

$$\text{これを, } i_k = ai_{k-1} + bu_{k-1} \quad k=1,2,\dots \quad \textcircled{4}$$

とおく。ただし, $a=1-\frac{TR}{L}$, $b=\frac{T}{L}$ であり, 抵抗とインダクタンスの値が逐次更新される。 a , b が計算できれば, R , L はすぐに計算できるので, 以下 a , b を求める。

④は,

$$i_k = ai_{k-1} + bu_{k-1} \equiv \theta^T z_k \quad (k \geq n=1) \quad \textcircled{5}$$

ここで, $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $z_k = \begin{bmatrix} i_{k-1} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$ であり, (7-33)に対応する。

$$P_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \gamma_k \end{bmatrix}$$

とおくと (7-38)は次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda + z^T(k)P(k-1)z(k)} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1}i_{k-1} + \beta_{k-1}u_{k-1} \\ \beta_{k-1}i_{k-1} + \gamma_{k-1}u_{k-1} \end{bmatrix} (i_k - a_{k-1}i_{k-1} - b_{k-1}u_{k-1})$$

(7-39)も同様に書き下せる。

この例は, (7-33), (7-34), (7-35)で最も簡単な $n=1$ の場合に相当する。

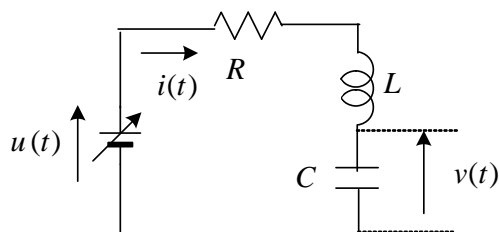
$$y_k = -a_1 y_{k-1} + b_1 u_{k-1} + v_k$$

が⑤と対応する。ここではノイズ v_k も入れて考えてみよう。問題は, ノイズ v_k のある中で, 既知の y_k, y_{k-1}, u_{k-1} を用い, a_1, b_1 を推定することにある。サンプリング周期毎にデータは入ってくるから, ノイズを無視すると, 3 回分のデータより連立方程式を解いて a_1, b_1 が計算できそうである。しかし, これだとノイズなどのため誤差が大きくなろう。最小 2 乗法では, 得られる多くのデータを有効に活用する。ただ, a_1, b_1 も変化する可能性があるから (温度で抵抗が変化する場合など), 忘却係数を用いて古いデータの影響を小さくする。もう一つ考えておかなければいけないことは, 例えば直流の定常状態では電流は一定で, この状態のデータだけでインダクタンスの値を知ることは不可能である。従って, 入力電圧が変化するような場合のデータがどうしても必要である。つまり入力電圧が PE (Persistently Exciting) でないといけないのである。入力電圧は制御によって一定になることもあるので, この問題を解決するため, 本来必要な入力電圧に振幅が比較的小さな合成正弦波信号や M 系列信号を重畳させて加えることが考えられている。

例題 7-6 図の制御対象で，入力電圧 $u(t)$ と電流 $i(t)$ は既知である。逐次最小二乗法を適用するための離散時間モデル

$$y_k = \theta^T z_k \quad (k \geq n)$$

を導出せよ。



(解) 成り立つ微分方程式は

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + v \quad \text{①}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad \text{②}$$

サンプリング周期を T として，オイラー法を用いて離散化すると，次式が得られる。

$$u_{k-1} = Ri_{k-1} + L \frac{i_k - i_{k-1}}{T} + v_{k-1} \quad \text{③}$$

$$i_{k-1} = C \frac{v_k - v_{k-1}}{T} \quad \text{④}$$

v_k, v_{k-1} の項を消去する必要がある。③，④を 1 サンプル前の関係式にすると

$$u_{k-2} = Ri_{k-2} + L \frac{i_{k-1} - i_{k-2}}{T} + v_{k-2} \quad \text{⑤}$$

$$i_{k-2} = C \frac{v_{k-1} - v_{k-2}}{T} \quad \text{⑥}$$

⑤より v_{k-2} を求め，⑥に代入すると v_{k-1} が電流と入力電圧だけで表せる。これを③へ代入することにより次式が得られる。

$$i_k = \left(2 - \frac{TR}{L}\right) i_{k-1} + \left(\frac{TR}{L} - 1 - \frac{T^2}{LC}\right) i_{k-2} + \frac{T}{L} u_{k-1} - \frac{T}{L} u_{k-2} \quad \text{⑦}$$

これは，

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} \quad (k \geq 2) \quad \text{⑧}$$

に対応する。