

現代制御理論ノート

Introduction to Modern Control Theory

平成 29 年

長崎大学大学院工学研究科

辻 峰男

まえがき

制御理論は年代順に古典制御理論、現代制御理論、ポスト現代制御理論に分類されることがある。ところが、ポスト現代制御理論の代表である H_∞ 制御やロバスト制御という名前の本は出版されてはいるが、ポスト現代制御理論という教科書はなく、名称として定着していないように思う。現代制御理論は、名前だけ聞くと、いつになっても最近の制御理論という印象を与える。ということで、従来の現代制御理論とポスト現代制御理論をまとめて現代制御理論と呼ぶ方が判りやすく、ネーミングとして適しているように思う。以上の観点から本ノートは、現代制御理論というタイトルではあるが、 H_∞ 制御やこれまでの現代制御理論の教科書ではあまり取り上げられていないモデル規範適応システム(適応制御)まで含めている。

現在実用化されている制御の基本は何と言っても、PID 制御と古典制御理論による設計であるが、性能向上を図るためには、現代制御理論にチャレンジする必要がある。本ノートは、現代制御理論を応用する立場から眺めて、その特徴や意義を伝えるために書いた入門書である。各章の概要は以下の通りである。

第1章では、まず制御対象で成り立つ微分方程式を整理して、状態方程式を導く方法を説明する。状態方程式は現代制御理論の出発点となる。古典制御理論と違い行列を用いるのでやや抵抗を覚えるかもしれないが、慣れると大変便利である。次に、状態方程式の解(過渡応答)、さらに制御対象の安定判別について述べる。制御対象だけの場合、自由に設定できる量は入力(操作量)である。

第2章では、制御対象を PID 制御する場合について、システム全体の状態方程式の導き方を説明する。PID 制御は古典制御の代表であるが、実用的にもまた状態方程式の導き方の練習を行う上でも適している。フィードバック制御システム全体では、自由に設定できる量が指令値に替わることに気が付けば、過渡応答や安定判別には第1章の考え方がそのまま利用できることが判る。

第3章では、まず可制御性と可観測性という制御の根本について述べる。つまり、制御対象に何らかの制御を加えてうまく制御が行えるのかどうか、またセンサから検出した情報が役に立つものかどうかを考える。次に、状態変数をうまく選ぶと制御器を設計する場合などに便利な状態方程式が得られることを示す。このとき、可制御性と可観測性を判定する行列が役に立つのである。

第4章は、これまでの現代制御理論の中心である最適フィードバック制御を述べている。状態変数と入力の変動分をそれぞれ2乗し、それらの時間積分値を評価関数として定め、それが最小となるように制御器を設計する。全ての状態変数をセンサで検出し、それぞれに制御ゲインを掛けて入力(操作量)を得る制御系となる。リッカチ方程式を解けば機械的に最適な制御ゲインが求まる。なお評価関数を使わないで、系全体の極を望ましい値に設定することで制御ゲインを決める方法もある(極配置という)。ステップ状の指令値に追従するサーボ系にするためには積分器が必要で、理論を少し拡張すれば対応できる。

第5章では、まずオブザーバ(状態観測器)について述べる。最適フィードバック制御では

全ての状態変数をセンサで検出する必要があるが、これは実現が困難な場合も多い。そこで、制御用のコンピュータで状態方程式をオンライン(制御と同時進行)で解いて、状態変数を演算で求めることが考えられる。これがオブザーバである。十分に安定な制御対象であれば、単純に状態方程式を解けばよいが、不安定あるいは不安定に近い制御対象では、演算が適度に収束するようにオブザーバゲインを設計する。オブザーバは最適フィードバック制御に限らず種々の応用が可能である。次に、オブザーバと類似したカルマンフィルタについて述べる。カルマンフィルタは、ノイズを考慮した推定誤差の2乗平均値が最小になるように、リッカチ方程式を解いて最適ゲインを求めた同次元オブザーバである。離散時間系(パラメータの時間変化可能)として表されたカルマンフィルタが種々の分野で応用されている。この場合、最適ゲインはリッカチ方程式を解くことなく、逐次計算される。

第6章では、 H_{∞} 制御について述べている。第4章の最適フィードバック制御や第5章のオブザーバは、制御対象をモデリングして求めた状態方程式を用いる。モデリングでは、制御対象のパラメータは一定と仮定され、また物理的に影響が小さいとして近似が行われることも多い。従って、実際にはこれらの仮定が成立しないことも当然起こり得る。そこで、使用する状態方程式(ノミナルモデル)と実際のシステムのモデル化誤差を考え、システムに変動があっても安定に動作する制御器の設計法が考案された。これはロバスト制御と呼ばれる。 H_{∞} 制御では周波数領域で考えることにより、簡単に言えば目標値への高速応答とロバスト安定性をできるだけ両立させる(混合感度問題という)。 H_{∞} 制御は2本のリッカチ方程式を解いて設計されるが、得られる制御器は最悪外乱を考慮したオブザーバと最適フィードバック制御器の組み合わせと解釈できる。なお積分器をもつサーボ系とするには多少の工夫が必要である。古典制御理論でも、周波数領域でゲイン余裕や位相余裕を考えて制御器の設計を行うが、これも目標値への高速応答とロバスト安定性を確保しようとしている。これと比べると、 H_{∞} 制御器は、制御対象より少し大きな次元を有する高性能な制御器になっている。

第7章では、モデル規範適応システムについて述べている。モデル規範適応システムには、モデル規範形適応制御と適応同定システムがある。本テキストでは、適応同定(簡単に言えばパラメータ推定)を中心に述べる。パラメータ推定は制御と言うより制御対象の正確なモデルをオンラインで演算することにある。パラメータ推定が正確なら、ロバスト制御に頼らなくても良いケースもあろう。パラメータ推定において重要なことは、安定に推定が行えるかどうかということである。モデル規範適応システム理論を適用してパラメータ推定を行う方法が良く知られている。このとき安定な収束を保証するには、非線形システムとしての解析が必要で、リアプノフの安定判別法やポポフの超安定論などが用いられる。逐次最小2乗法は、離散時間系として表わされ、パラメータ推定として応用されている。パラメータ推定で得られた値を利用し、例えばPID制御器のゲインをオンラインで自動的に調整するといったオートチューニングが可能となる。本稿では特に連続系の適応同定の応用例として、モータの速度推定(速度をパラメータと見なす)を示す。

現代制御理論ノート

目次

第1章	状態方程式	1
第2章	PID制御系の状態方程式	19
第3章	可制御性, 可観測性と変数変換	27
第4章	最適フィードバック制御	35
第5章	オブザーバとカルマンフィルタ	51
第6章	H_∞ 制御	68
第7章	モデル規範適応システム	85
	参考文献	109
付録	最適レギュレータ	111
	索引	117

このノートを父辻光男，母初江と妻葉子，息子創介，娘百衣璃に捧げる。

2017年夏 辻 峰男

第1章 状態方程式

現代制御理論では、制御対象や制御器を状態方程式で表して解析や設計を行う。本章では、制御対象の状態方程式の導き方と応答の計算法や安定解析を述べる。

1.1 状態方程式

制御対象やフィードバック制御システムを連立微分方程式で記述してシステムの解析や設計を行うことがある。これは応答の計算や現代制御理論などで用いられる。

図 1-1 の制御対象で説明しよう。入力（操作量）は電源電圧 $e(t)$ であるが、出力をコンデンサの電圧 $v(t)$ としよう。電源電圧 $e(t)$ は直流電源の記号を用いているが、自由に電圧が変えられるものとする（以下同様）。微分方程式は、

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + v \quad (1-1)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1-2)$$

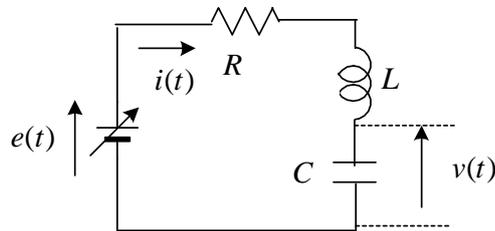


図 1-1 制御対象の例 (RLC 回路)

となる。**状態方程式**(state equation)は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \quad (1-3)$$

連立微分方程式で、微分を左辺におき、右辺は左辺の変数と入力だけを使って表す。

入力は自由に変えることができる量で、電気回路では電源である。一方、出力は、目的で異なるが、通常センサで検出する量である。電圧 v を出力とする場合、**出力方程式**(output equation)は次式で与えられる。

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

出力は状態方程式の変数を使って表すもので、それ以外の変数を使ってはいけない。

次に DC モータの状態方程式を導く。図は DC モータの等価回路である。

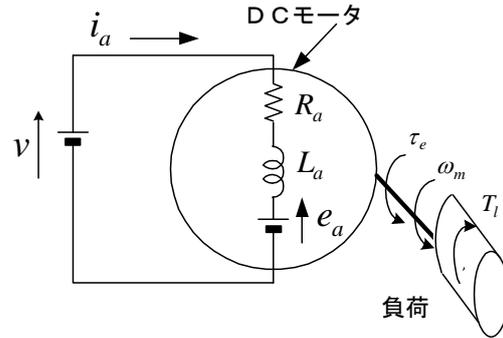


図 1-2 制御対象の例(DC モータ)

回路の式は、

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\Phi\omega_m \quad (1-5)$$

ここで、 v : 電源電圧[V], i_a : 電機子電流[A], $e_a = K\Phi\omega_m$: 誘導起電力[V]

K : 定数, Φ : 界磁磁束[Wb] (一定)

R_a : 電機子巻線の抵抗[Ω], L_a : 電機子巻線のインダクタンス[H]

$\omega_m = 2\pi \frac{N}{60}$: 回転角速度[rad/s], N : 1 分間の回転数[min^{-1}]

モータの負荷としてはいろいろあるが、モータと負荷が一体となって回転すると考えることが多い。この場合、運動方程式が以下の様に表される。

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = K\Phi i_a - R_m \omega_m - T_l \quad (1-6)$$

ここで、 $\tau_e = K\Phi i_a$: 発生トルク[Nm], J : 慣性モーメント[kgm^2] (DC モータ+負荷)

R_m : 制動係数[Nms], T_l : 負荷トルク[Nm]

入力電源電圧 $v(t)$ であり、状態方程式を求めると、以下の様になる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K\Phi/L_a \\ K\Phi/J & -R_m/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J \end{bmatrix} T_l \quad (1-7)$$

ここで、負荷トルク T_l の項は、制御には利用できない外乱である。外乱は入力と同じように考えて定式化する。

出力を回転角速度とすると出力方程式は、次式となる。

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

この様に、一般に m 入力、 l 出力の制御対象は、**状態方程式**(state equation) :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-9)$$

成分表示 :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

出力方程式(output equation) :

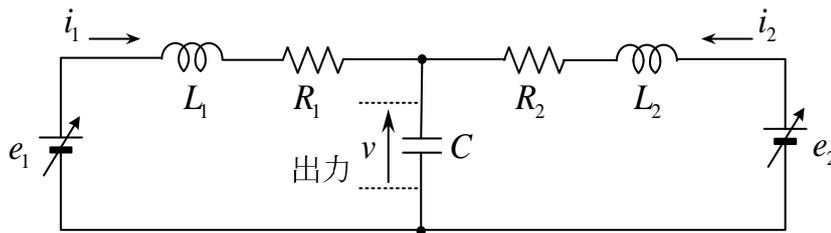
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-10)$$

成分表示 :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \cdots & d_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

により記述できる。 \mathbf{x} は**状態変数ベクトル**(state variable vector)と呼ばれ、成分を**状態変数**(state variable)という。 \mathbf{u} は入力ベクトル、 \mathbf{y} は出力ベクトルである。状態変数は(1-9)の様に整理できるなら、何を選んで良い。電気回路のシステムでは、コイルの電流とコンデンサの電圧（または電荷）を選ぶと良い。状態変数の選び方やその順序は自由で、状態方程式の書き方は人により異なる。入力 \mathbf{u} は、我々が直接自由に変えることができる量であるが、状態変数は入力を変えることで間接的に変化する量である。以下、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ が定数（時不変）の場合だけを考える。なお、先の例にもあるように $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ の場合が多い。1入力の1出力の場合は、 \mathbf{B}, \mathbf{C} はベクトル、 \mathbf{D} はスカラとなる。

問題 1-1 図の制御対象の状態方程式と出力方程式を求めよ。 e_1, e_2 が入力、 v を出力とする。



$$(解) \quad e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + v \quad , \quad e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_1 + i_2$$

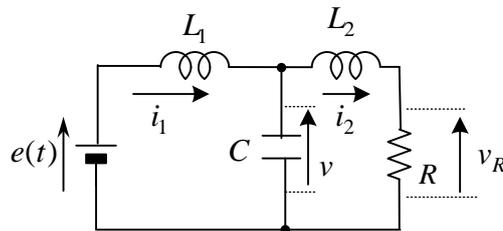
状態方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

出力方程式

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

問題 1-2 図の制御対象の状態方程式，出力方程式を求めよ。ただし，出力は， v_R とする。



(解) 状態方程式

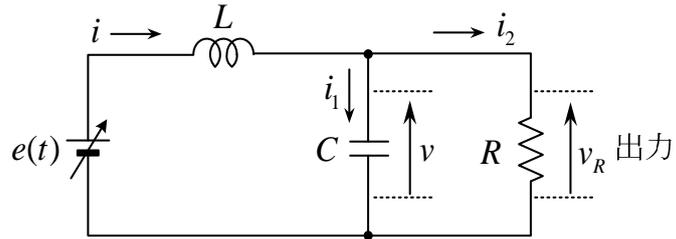
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

出力方程式

$$v_R = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

* $v_R = R i_2$ なので， i_2 の代わりに v_R を状態変数に選ぶことも可能である。つまり， i_1, v_R, v を選んでも良い。第3章で詳しく述べるが，微分や積分を含まないで表せるなら，どちらを状態変数に選んでも良い。

問題 1-3 状態方程式と出力方程式を求めよ。



(解)

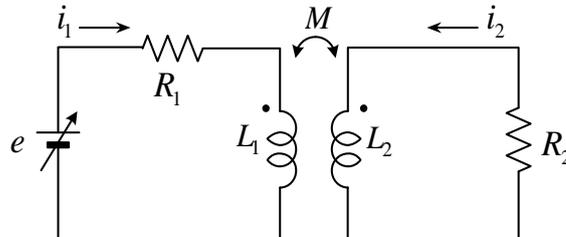
$$\text{状態方程式: } \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/(RC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$\text{出力方程式: } v_R = \begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

- * $v = Ri_2$ なので, v の代わりに i_2 を状態変数に選ぶことも可能である。
 $i_2 = i - i_1$ なので, i_2 の代わりに i_1 を状態変数に選ぶことも可能である。
 つまり, i, i_1 と e だけで状態方程式を作ることが可能である。

$$\text{そのとき出力方程式は } v_R = \begin{bmatrix} R, & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_1 \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

問題 1-4 状態方程式を求めよ。



$$\text{(解) } e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

状態方程式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_2 R_1}{\Delta} & \frac{MR_2}{\Delta} \\ \frac{MR_1}{\Delta} & -\frac{L_1 R_2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta} \\ -\frac{M}{\Delta} \end{bmatrix} e$$

$$\text{ただし, } \Delta = L_1 L_2 - M^2$$

1.2 時間応答の計算

状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

を解く方法を述べよう。これは、初期値に対し応答を求めることを意味する。ラプラス変換して(ベクトルのラプラス変換は各成分のラプラス変換),

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (1-11)$$

$$\therefore \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (1-12)$$

但し、 \mathbf{I} : **単位行列**(identity matrix) (対角成分が 1, 他は 0)
逆ラプラス変換し, 第 2 項には **畳み込み積分**(convolution integral)を適用して,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (1-13)$$

ここで, $e^{\mathbf{A}t}$ は, **状態推移行列**(state transition matrix)と呼ばれ, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \end{aligned} \quad (1-14)$$

$e^{\mathbf{A}t}$ には, 以下の性質がある。

$$(1) \quad \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \quad (1-15)$$

$$(2) \quad e^0 = \mathbf{I} \quad (1-16)$$

$$(3) \quad e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} \quad \text{一般に, } e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad (1-17)$$

$$(4) \quad (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (1-18)$$

$$(5) \quad L[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (1-19)$$

$$L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = e^{\mathbf{A}t} \quad (1-20)$$

ここで, L : **ラプラス変換**(Laplace transform), L^{-1} : **ラプラス逆変換**(inverse Laplace transform)

(5)の証明 まず, $(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$ ① を証明する。

左辺に $sI - A$ を掛けると, 単位行列になる。右辺について,

$$\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots\right)(sI - A) = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s^2} - \dots = I$$

であるから, ①が成立する。①を逆ラプラス変換すると, (1-14)となる。

(1-14)は, 以下の式と対応する。

テイラー展開(Taylor expansion)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots$$

マクローリン展開(Maclaurin expansion) ($a=0$, $h=x$ とおく)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

e^{At} の計算法について述べる。

(1) **ラプラス逆変換による方法**

(1-20) を用いる方法。逆行列を計算する必要があるから, 手計算向き。

A が 3×3 (3行3列) 位までしかできないだろう。

(2) **級数展開による方法**

(1-14) を用いる方法で, 項は段々小さくなり, $k=10$ 程度でもかなり良い近似が得られるだろう。コンピュータによる数値計算向きである。

(3) **行列の対角化による方法**

制御理論を考える場合に便利である。

以下に, **行列の対角化**による方法を述べる。

A を $n \times n$ 行列として, 述べよう。 A の **固有値**(eigenvalue) s_1, s_2, \dots, s_n (一般に複素数) が全て異なるとき, A は次式で表される。

$$A = P Q P^{-1} \tag{1-21}$$

$$\text{ここで, } Q = \begin{bmatrix} s_1 & & & \mathbf{0} \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix}, P = [u_1, u_2, \dots, u_n] \tag{1-22}$$

P, Q はいずれも, $n \times n$ 行列である。固有値 s_i に対する一つの固有ベクトル(eigenvector)を

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix} \text{ とすると, (1-21)は, 固有値の定義}$$

$$A \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-23)$$

より導ける。すなわち, 以下の式より出る。行列と成分の掛け算はサイズが合えば可能。

$$A P = A [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] = [A \mathbf{u}_1 \ A \mathbf{u}_2 \ \dots \ A \mathbf{u}_n] = [s_1 \mathbf{u}_1 \ s_2 \mathbf{u}_2 \ \dots \ s_n \mathbf{u}_n] = P Q \quad \therefore A = P Q P^{-1}$$

$P Q$ になる部分を $n = 3$ のとき証明する。

$$P Q = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 u_1^1 & s_2 u_2^1 & s_3 u_3^1 \\ s_1 u_1^2 & s_2 u_2^2 & s_3 u_3^2 \\ s_1 u_1^3 & s_2 u_2^3 & s_3 u_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{bmatrix} & s_2 \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{bmatrix} & s_3 \begin{bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

行列の対角化を用いることで, 次式により A^k が計算できる。対角化のすごいところである。

$$A^k = P Q P^{-1} P Q P^{-1} P Q P^{-1} \dots P Q P^{-1} \\ = P Q^k P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} s_1^k & & & \mathbf{0} \\ & s_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad (1-24)$$

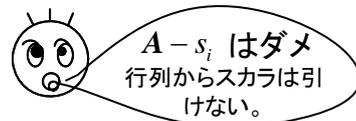
A の固有値の計算 (1-23)より

$$(A - s_i I) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

$A - s_i I$ の逆行列が存在すると, $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ となり, つまらない。固有値は, この逆行列が存在しない条件,

$$|A - sI| = 0 \quad \text{または,} \quad |sI - A| = 0 \quad (1-25)$$

より計算できる。[] 行列, | | 行列式をしっかりと区別すること。行列式はスカラーである。



$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \text{ 単位行列 } n \times n$$

(1-21)を用いると,

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}^2 t^2)/2! + (\mathbf{A}^3 t^3)/3! + \dots \\
 &= \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}t + (\mathbf{Q}^2 t^2)/2! + (\mathbf{Q}^3 t^3)/3! + \dots)\mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 + s_1 t + \frac{s_1^2 t^2}{2} + \dots & & & 0 \\ & 1 + s_2 t + \frac{s_2^2 t^2}{2} + \dots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + s_n t + \frac{s_n^2 t^2}{2} + \dots \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \tag{1-26}
 \end{aligned}$$

これは、安定性を検討する場合に制御理論で用いられる。

例題 1-1 次の状態方程式の解を求めよ。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

(ラプラス変換による方法)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

とおく。成分ごとにラプラス逆変換して求める。

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= L^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= L^{-1} \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \\
 &= L^{-1} \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{s+3} & -\frac{1}{s+4} \\ \frac{2}{s+3} & -\frac{2}{s+4} \end{array} + \begin{array}{cc} \frac{-1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{-1}{s+3} & \frac{2}{s+4} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) + 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

故に,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{At} \mathbf{x}(0) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

(行列の対角化による方法)

\mathbf{A} の固有値を求め, 固有ベクトルによる対角化を行う。

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4) = 0$$

よって, \mathbf{A} の固有値は $s = -3, -4$ である。

$$s_1 = -3 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に, $x_1 = x_2$ よって, s_1 に対する固有ベクトルは, 簡単な場合を選んで

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 1]^T$$

とする。(両方 0 以外なら自由に選んでよい)

$$s_2 = -4 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に, $2x_1 = x_2$ よって, s_2 に対する固有ベクトルは, 簡単な場合を選んで

$$\mathbf{u}_2 = [1 \ 2]^T$$

とする。

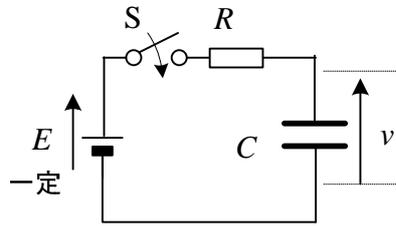
$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ とすると, } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ と確かになる。}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(-3t) & 0 \\ 0 & \exp(-4t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) + 2\exp(-4t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。以下, 同様に。

例題 1-2 状態方程式の解の公式を利用して、 $v(t)$ を求めよ。 $v(0) = v_0$ とする。



(解) $E = RC \frac{dv}{dt} + v$ より状態方程式は、 $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC}v + \frac{1}{RC}E$

公式 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ より

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{t}{RC}}v_0 + \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \frac{E}{RC} d\tau = e^{-\frac{t}{RC}}v_0 + e^{-\frac{t}{RC}} \frac{E}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau \\ &= E + (v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

問題 1-5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ のとき、 e^{At} を

(1) ラプラス変換, (2) 行列の対角化
により求めよ。

(解) $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-3t})/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

ヒント (2) の場合 固有値 0, -3 となる。0 に対する固有ベクトルは $x_2 = 0$ より、例えば x_1 を 1 に選ぶ。 $e^{0t} = 1$ であることに注意。

応答を計算するには、(1-13)を用いることもできるが、簡単な場合 (状態変数が 2 個程度) を除いて、コンピュータにより状態方程式(1-9)を直接数値積分することが簡単である。数値積分による方法は、入力のいろいろの変化や非線形の状態方程式に対しても適用できる。この際に、制御用の市販ソフトウェアであるマトラブ(MATLAB)も良く用いられている。

以下に数値積分による時間応答の計算法を示す。

前進オイラー法(forward Euler's method)は簡単だが精度が悪いので一般には使われないが、最も基本的な方法である。次に示す2次の非線形システムを例にとり、説明する。

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad (1-27)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad (1-28)$$

前進オイラー法では、この微分方程式を、きざみ h (微小量) で次のように差分近似する。

$$\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} \approx f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} \approx f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

これから、以下の式を用いて t の値から、 $t+h$ の値が求まる。

$$k_1 = h f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_1 \text{ の } t \text{ での増分 } f_1 \text{ は傾き}$$

$$k_2 = h f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_2 \text{ の } t \text{ での増分 } f_2 \text{ は傾き}$$

$$x_1(t+h) = x_1(t) + k_1 \quad ; \text{増分の加算}$$

$$x_2(t+h) = x_2(t) + k_2 \quad ; \text{増分の加算}$$

$t+h$ の値が求まると、同様にして $t+2h$ の値が計算でき、以下次々に x_1, x_2 が計算できる。一般の非線形システム (線形システムを含む)

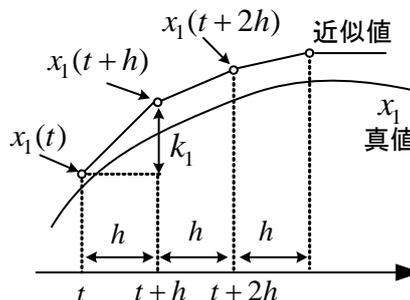
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (1-29)$$

の場合、前進オイラー法による数値積分は次式で与えられる(単に行列表示しただけ)。

$$K = h f(x(t), u(t)) \quad (1-30)$$

$$x(t+h) = x(t) + K \quad (1-31)$$

次に、2次の**ルンゲ・クッタ法**(Runge-Kutta method)を紹介する。まず(1-27), (1-28)の2次の非線形システムを例に説明する。2次のルンゲ・クッタ法では、次のように差分近似することにより求める。



$$k_{11} = h f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_1 \text{ の } t \text{ での増分}$$

$$k_{21} = h f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; x_2 \text{ の } t \text{ での増分}$$

$$k_{12} = h f_1(x_1(t) + k_{11}, x_2(t) + k_{21}, u(t+h)) \quad ; x_1 \text{ の } t+h \text{ での増分}$$

$$k_{22} = h f_2(x_1(t) + k_{11}, x_2(t) + k_{21}, u(t+h)) \quad ; x_2 \text{ の } t+h \text{ での増分}$$

$$x_1(t+h) = x_1(t) + (k_{11} + k_{12})/2 \quad ; \text{増分の平均値加算}$$

$$x_2(t+h) = x_2(t) + (k_{21} + k_{22})/2 \quad ; \text{増分の平均値加算}$$

$t+h$ での微分値を使いたい、そこでの x_1, x_2 の値はこれから求めようとしているので未知であり、仕方なく前進オイラー法で求めた x_1, x_2 値を使う。それでも前進オイラー法より同じ刻みに対する精度は良くなる。一般の場合に行列表示すると次式で表せる。

$$\mathbf{K}_1 = h \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1-32)$$

$$\mathbf{K}_2 = h \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1, \mathbf{u}(t+h)) \quad (1-33)$$

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)/2 \quad (1-34)$$

例題 1-3 次の非線形微分方程式を前進オイラー法，2次のルンゲクッタ法で解くFORTRANのプログラムを作れ。

$$\frac{dx}{dt} = x \sin(2t) + 1$$

$t=0$ から、きざみ $h=0.001$ で、 $t=0.1$ まで計算する。 $x(0)=1.0$ とする。

(解) オイラー法

```

X = 1.0
T = 0.0
H = 0.001
DO 200 I=1,100
    X=X+H*(X*SIN(2.0*T)+1.0)
    T=T+H
    WRITE(*,*) T,X
200 CONTINUE
STOP
END
```

DO文は文番号200までを
I=1,2,...100と変化して
ぐるぐる回る。
データ出力

2次のルンゲクッタ法

```
X=1.0
T=0.0
H=0.001
DO 100 I=1,100
    K1=H*(X*SIN(2.0*T)+1.0)
    K2=H*((X+K1)*SIN(2.0*(T+H))+1.0)
    X=X+(K1+K2)*0.5
    T=T+H
    WRITE(*,*)T,X
100 CONTINUE
STOP
END
```

例題 1-4 初期値 $x_1(0) = 1.0$, $x_2(0) = 0.0$ の非線形微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = (1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

をきざみ $h = 0.2$ で $0 \sim 4$ 秒間, 前進オイラー法で求めるプログラムを作れ。

(解) $X_1=1.0$
 $X_2=0.0$
 $T=0.0$
 $H=0.2$

DO 10 I=1, 20

DX1=X2

DX2=(1.0-X1**2)*X2-X1

X1=X1+DX1*H

X2=X2+DX2*H

T=T+H

WRITE(*,*)T,X1,X2

10 CONTINUE

STOP

END



*以下のプログラムはなぜいけないか？

省く

省く

X1=X1+X2*H

X2=X2+((1.0-X1**2)*X2-X1)*H

* X2 の計算のとき, 新しい X1 が入るから。

1.3 安定判別

安定にもいろいろの定義があるが、ここでは、状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

において、 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、時間 t が十分たつと、 \mathbf{x} がある値に落ち着いて変化しなくなる場合を安定であると呼ぶことにしよう。このときの \mathbf{x} の値は、定常値と呼ばれ、 $d/dt = 0$ とおくことにより、次式で求まる。

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-35)$$

状態方程式の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

であるから、 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-36)$$

となる。 \mathbf{A} の固有値がすべて異なるとき、(1-26)より、

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

と書ける。 \mathbf{P} は定数だから、 $e^{\mathbf{A}t}$ は $\exp(s_k t)$: $k=1 \sim n$ により時間的变化が支配される。

一方、積分については、

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau &= \int_0^t \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{A}\tau + (\mathbf{A}^2\tau^2)/2! + (\mathbf{A}^3\tau^3)/3! + \dots \right\} d\tau \\ &= \left[\mathbf{I}\tau + \mathbf{A}\tau^2/2! + (\mathbf{A}^2\tau^3)/3! + (\mathbf{A}^3\tau^4)/4! + \dots \right]_0^t \\ &= \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (1-37)$$

である。やはり、 $e^{\mathbf{A}t}$ で支配される。

そこで、 $e^{\mathbf{A}t}$ について考えると、 $s = \alpha + j\beta$ のとき、

$$e^{st} = e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t)$$

であるから、 $\alpha < 0$ であれば、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $\exp(st) \rightarrow 0$ となる。従って、 A のすべての固有値 s_k の実部が負であれば、

$$e^{A\infty} = \mathbf{0} \quad (1-38)$$

となる。よって、(1-36), (1-37)より

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

となり、定常値に落ち着く。従って、次の重要な定理を知る。



『線形時不変システム $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ で、入力 $\mathbf{u}(t)$ が一定のとき、 $\mathbf{x}(\infty)$ が一定の値に落ち着くときシステムは安定（漸近安定）であると言われ、この必要十分条件は、 A の全ての固有値の実部が負（左半平面にあるとき）となることである。』

なお、 $\mathbf{u}(t)$ が一定でない場合にも、 $\mathbf{u}(t)$ を $\mathbf{x}(t)$ に関係なく与えるならば、上記の定理は成り立つ。つまり安定条件は $\mathbf{u}(t)$ に関係ない。さらに、 A の固有値に重根がある場合にも上記の定理は成り立つことが判っている。

次に、伝達関数の求め方につき述べる。1入力1出力の場合を考える。

$$\text{状態方程式} \quad : \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\text{出力方程式} \quad : \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

につき考える。上式をラプラス変換して、

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$$

を得る。初期値 $\mathbf{x}(0)$ を 0 とおいて、

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad \therefore \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

制御対象の**伝達関数**(transfer function) $G(s)$ は、

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (1-39)$$

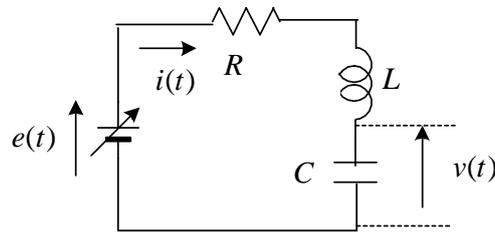
となる。ここで、 adj は、**余因子行列**を示す。伝達関数の分母を 0 とおいたものが**特性方程式**(characteristic equation)だから、特性方程式は、

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1-40)$$

となる。**特性方程式の根(特性根)**(characteristic root)は、 A の固有値と等しいことが判る。古典制御理論で、特性根が左半平面にあればシステムは安定であることが判っているが、これは、上述の定理と全く一致する。



例題 1-5 図の制御対象の伝達関数を求めよ。ただし、出力は $v(t)$ とする。



[解 1] 微分方程式を立てると、

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v(t), \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

ラプラス変換して、初期値を 0 とおくと

$$E(s) = RI(s) + LsI(s) + V(s), \quad I(s) = CsV(s)$$

よって、
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

[解 2] 状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e$$

出力方程式：

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} &= [1, 0] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \\ &= [1, 0] \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} = \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

よって、
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

◎ 行列式, 逆行列の公式

$n \times n$ 行列 A の第 i 行と第 j 列を省いてできた $(n-1) \times (n-1)$ の行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを M_{ij} とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき, 例えば, } M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \text{行列式 (determinant): } |A| &= \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} M_{ij} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{adj}(A) \\ \swarrow \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{逆行列 (inverse matrix): } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

逆行列が存在するには, $|A| \neq 0$ でないといけない。

$$\text{余因子行列 (adjoint matrix): } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}^T$$

T は, 転置行列 (transpose of matrix) を意味する。

◎ 逆行列, 転置行列の基本公式

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{注 } (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} \quad (\text{成立しない})$$

$$(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \text{注 } AB \neq BA \quad (\text{成立しない})$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T, (ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^T)^T = A, (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (I: \text{単位行列})$$

$$AI = IA = A$$

(注) 転置行列は正方行列でなくてもよいが, 逆行列は正方行列でないと定義できない。

第2章 PID 制御系の状態方程式

比例制御(proportional control), 積分制御(integral control), 微分制御(derivative control)を組み合わせた PID 制御は, 古典制御に属するが実際に良く用いられている。本章では PID 制御系の状態方程式による表現と安定解析を考える。状態方程式に慣れるのが目的である。

2.1 P 制御系

1 入力 1 出力の制御対象が, 状態方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-1)$$

と, 出力方程式

$$y(t) = Cx(t) \quad (2-2)$$

で記述されるとき, y をセンサで検出し, 入力 $u(t)$ を次式で P 制御する。

$$u(t) = K_p(y^* - y) \quad (2-3)$$

y^* は目標値 (指令値) である。この閉ループ制御系を図 2-1 に示す。(2-2)とブロックの書き方に注意せよ。 $y = xC$ ではなく, 入力の左からブロックの行列を掛ける。

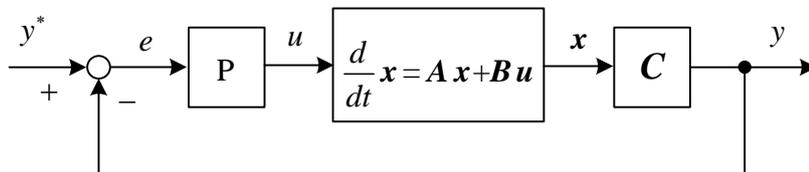


図 2-1 P 制御系

(2-2)を(2-3)に代入して, それを(2-1)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BK_p C)x(t) + BK_p y^* \quad (2-4)$$

これを, 次式で表す。この場合はスカラなので順序は関係ない。

$$\frac{dx(t)}{dt} = A'x(t) + B'y^* \quad (2-5)$$

ただし, $A' = A - BK_p C$, $B' = BK_p$

(2-1)の制御対象だけを考える場合, A の固有値で安定判別ができた。その場合, 我々は入力 $u(t)$ を自由に与えることができた。しかし, 図 2-1 では, $u(t)$ は自動的に変化する。そ

の代り、今度は目標値（指令値） y^* を自由に与えることができる。従って、(2-5)より図 2-1 の閉ループ制御系の安定判別は \mathbf{A}' の固有値により可能となる。すなわち、 \mathbf{A}' の全ての固有値の実部が負であれば安定である。

2.2 PI 制御系

y を検出し、入力 $u(t)$ を次式で PI 制御する図 2-2 のシステムを考える。

$$u(t) = K_p(y^* - y) + K_I \int_0^t (y^* - y) dt \quad (2-6)$$

ここで、 K_p を比例ゲイン、 K_I を積分ゲインと言う。

比例制御は、現在の偏差が大きい程、入力を大きくして偏差をなくそうとするもので、最も自然な制御法と考えられる。ここで、制御対象は入力 $u(t)$ を大きくすれば、出力 $y(t)$ も大きくなるであろうとの前提がある。ところが、比例制御だけの場合には、指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致する場合、入力 $u(t) = 0$ となってしまう。一般に、入力が 0 であれば、出力も 0 となることが多いから、比例制御だけでは指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致することはあり得ないことになる。すなわち、**定常偏差**(steady-state error)が残り、望ましくない。

そこで、積分制御を加えてステップ応答（指令値 $r(t)$ が一定）の定常偏差を 0 にする。積分制御を加えるとステップ応答の定常偏差が 0 となる理由は以下のように考えるとよい。もし、指令値 r （一定）と出力 $y(t)$ が一致しない場合、その差の積分値は増加または減少し $u(t)$ が一定になることはない。これは定常状態と言えない。従って、指令値が一定であるならば、定常状態では $u(t)$ が一定になるので、そのとき指令値 r と出力 $y(t)$ は一致する必要がある。なお、定常状態で r と $y(t)$ が一致しても、積分器の出力は 0 ではなく、それまでの積分値が残ったままである。この積分値は制御対象との関係で決る。積分制御は、指令値のステップ変化に対する定常偏差を 0 にするという利点があるが、過去から現在までの情報を現在の入力に反映する結果、タイミング（位相）が遅れて不安定にする危険性も持っている。従って、積分制御だけを用いることはまれである。

図 2-2 の PI 制御系で、最終的には、(2-5)のように状態方程式を作りたいが、(2-6)には積分があり工夫しないとイケない。

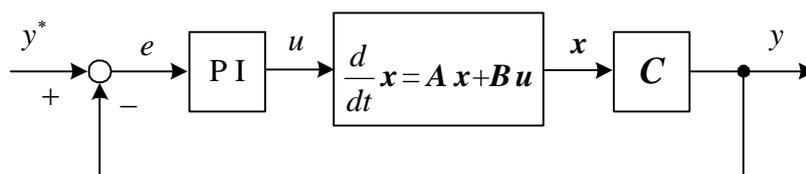


図 2-2 PI 制御系

コイルは電圧でなくその積分値の電流を，コンデンサでは電流でなくその積分値の電圧を状態変数に選ぶ。そこで，積分値

$$\int_0^t (y^* - y) dt = z \quad (2-7)$$

とおき， z を新しい状態変数として加えることにする。(2-7)より

$$\frac{dz}{dt} = y^* - y \quad (2-8)$$

が得られる。 z を用いると，(2-6) より次式が得られる。

$$u = K_p (y^* - y) + K_I z \quad (2-9)$$

(2-1)，(2-2)，(2-8)及び(2-9)より次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} y^* \quad (2-10)$$

上式は，次式のように書け，図 2-2 の状態方程式となっている。

$$\frac{dx'}{dt} = A' x' + B' y^* \quad (2-11)$$

従って，系全体の安定性は，

$$A' = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

の固有値によって決定できる。例えば， K_p をパラメータとして変化させ， A' の固有値を計算しプロットすると，古典制御理論の根軌跡と同じものが得られる。

例題 2-1 次の微分方程式で記述される制御対象がある。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = u(t) \quad (1)$$

$x(t)$ を検出し，目標値 $x^*(t)$ との偏差をとり， $u(t)$ を次式のように PI 制御する。

$$u(t) = K_p (x^* - x) + \frac{K_p}{T_I} \int_0^t (x^* - x) dt \quad (2)$$

このとき，系全体の状態方程式及び安定条件を求めよ。但し， $T_I = 0.1$ とする。

(解) まず，制御対象の状態方程式を導く。

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = x_2$$

とおくと，①より，



$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 2x_1 + u$$

よって、制御対象の状態方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

PI 制御器については、

$$\int_0^t (x^* - x) dt = z$$

とおくと、

$$\frac{dz}{dt} = x^* - x$$

入力 $u(t)$ は、

$$u = K_p(x^* - x) + 10K_p z$$

入力 u を消去して、系全体の状態方程式は、次式のように求まる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 - K_p & -2 & 10K_p \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \\ 1 \end{bmatrix} x^*$$

||
 A'

A' の固有値を求める特性方程式は、

$$|sI - A'| = s^3 + 2s^2 + (K_p + 2)s + 10K_p = 0 \quad \text{③}$$

となる。

ラウス(Routh)の表を作ると、

$$\begin{array}{l} s^3 \quad 1 \quad K_p + 2 \\ s^2 \quad 2 \quad 10K_p \\ s^1 \quad \frac{2(K_p + 2) - 10K_p}{2} > 0 \quad \therefore K_p < \frac{1}{2} \\ s^0 \quad 10K_p > 0 \end{array}$$

安定条件は 1 列目が全て同符号であることだから、 $0 < K_p < \frac{1}{2}$

古典制御理論では、ラプラス変換してブロック線図を作り、特性方程式を求めた。この例題について特性方程式を求めてみよう。

PI 制御の②をラプラス変換して、初期値を 0 とすると次式を得る。

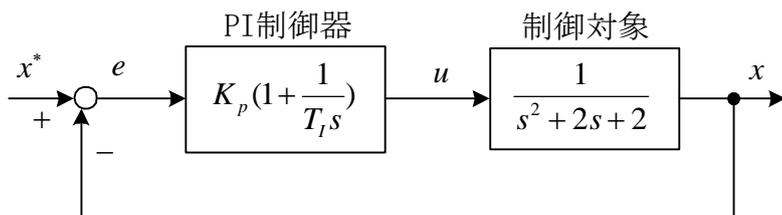


$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_p}{sT_I}\right)(X^*(s) - X(s))$$

従って、PI制御器の伝達関数 $C(s)$ は、次式で与えられる。

$$C(s) = K_p + \frac{K_p}{sT_I}$$

① の制御対象もラプラス変換して初期値を0とおくことにより、ブロック線図が得られる。



特性方程式は、

$$1 + \frac{K_p(1 + \frac{1}{T_I s})}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

$$\therefore s^3 + 2s^2 + (K_p + 2)s + 10K_p = 0 \quad (T_I = 0.1)$$

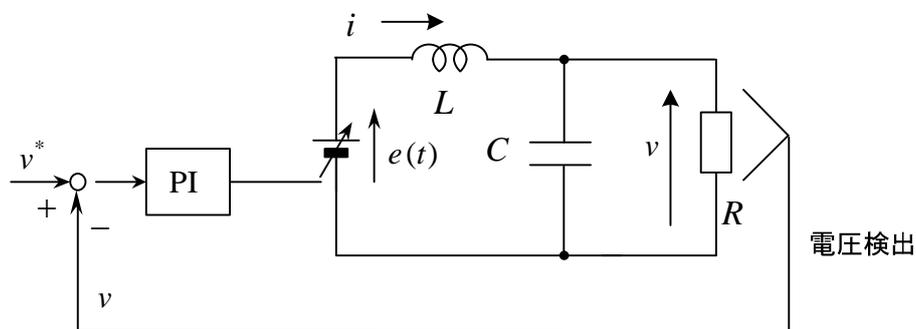
これは、③に一致する。

問題 2-1 (1) 系全体のブロック線図、閉ループ伝達関数 $V(s)/V^*(s)$ を求めよ。ただし、

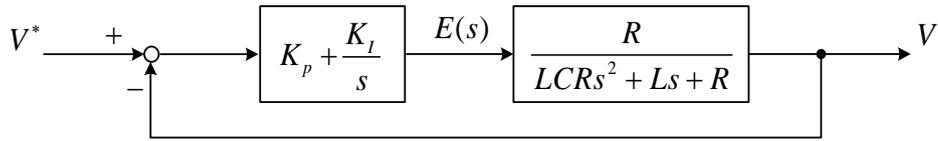
PI制御器は次式で与えられる。

$$e(t) = K_p(v^* - v) + K_I \int_0^t (v^* - v) dt$$

(2) 系全体の状態方程式、特性方程式を求めよ。



(解) (1)
$$\frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{(K_p s + K_I)R}{LCRs^3 + Ls^2 + (R + K_p R)s + K_I R}$$



(2) $\int_0^t (v^* - v) dt = z$ とおくと系全体の状態方程式は,

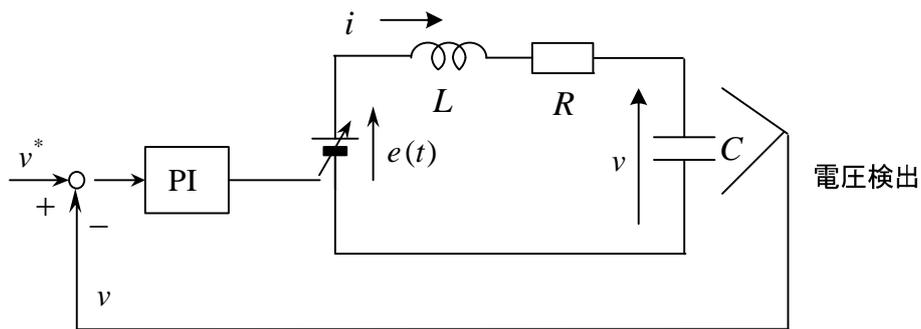
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+K_p}{L} & \frac{K_I}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{L} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v^*$$

$$|sI - A| = 0 \quad \text{より} \quad \therefore LCRs^3 + Ls^2 + R(1+K_p)s + RK_I = 0$$

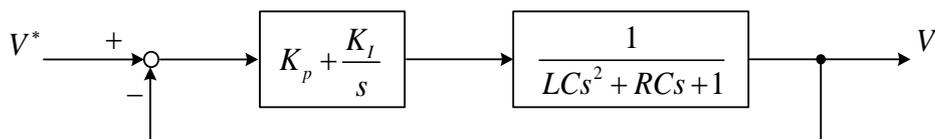
問題 2-2 (1) 系全体のブロック図, 閉ループ伝達関数 $V(s)/V^*(s)$ を求めよ。ただし, PI 制御器は次式で与えられる。

$$e(t) = K_p(v^* - v) + K_I \int_0^t (v^* - v) dt$$

(2) 系全体の状態方程式, 特性方程式を求めよ。また, 安定となる条件を求めよ。



(解) (1) ブロック線図



$$\frac{V}{V^*} = \frac{K_p s + K_I}{LCs^3 + RCs^2 + (1 + K_p)s + K_I}$$

(2) $\int_0^t (v^* - v) dt = z$ において系全体の状態方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1+K_p}{L} & \frac{K_I}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{L} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v^*$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad \text{より,} \quad \text{特性方程式は} \quad \therefore LCs^3 + CRs^2 + (1 + K_p)s + K_I = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{ラウスの表} \quad s^3 \quad LC \quad 1 + K_p \\ \\ s^2 \quad CR \quad K_I \\ \\ s^1 \quad \frac{CR(1 + K_p) - LCK_I}{CR} \\ \\ s^0 \quad K_I \end{array}$$

安定条件は1列目が全て同符号であることから,

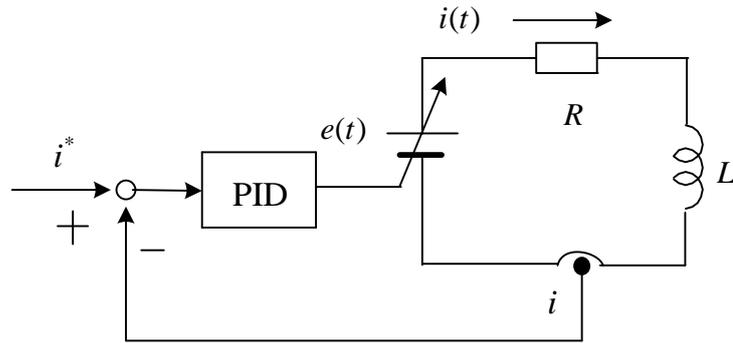
$$K_I > 0, \quad R(1 + K_p) > LK_I$$

2.3 PID 制御系

図の RL 回路の電流を次式で PID 制御する場合を考える。

$$E(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + sT_D} \right) (I^*(s) - I(s)) \quad (2-13)$$

純粋な微分制御はノイズの影響が大きいので、ローパスフィルタを通して微分するのが一般的である。この場合の系全体の状態方程式を導く。問題は微分制御の部分をもどくようにして状態変数と関係付けるかであるが、ローパスフィルタも新しい状態変数を定義する必要がある。



制御対象の状態方程式は,

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e \quad \text{①}$$

積分器については, $\frac{1}{s}(I^*(s) - I(s)) = Z_1(s)$ とおくと, ラプラス逆変換して,

$$\frac{dz_1}{dt} = i^* - i \quad \text{②}$$

$\frac{s}{1+sT_D} = \frac{1}{T_D} - \frac{1}{T_D(1+sT_D)}$ なので,

$$\frac{1}{1+sT_D}(I^*(s) - I(s)) = Z_2(s)$$



とおくと, $(1+sT_D)Z_2(s) = I^*(s) - I(s)$, ラプラス逆変換して

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{T_D}z_2 + \frac{1}{T_D}(i^* - i) \quad \text{③}$$

$E(s)$ を逆ラプラス変換して, $e = K_p(i^* - i) + K_I z_1 + \frac{K_D}{T_D}(i^* - i) - \frac{K_D}{T_D}z_2$ ④

①～④より制御系全体の状態方程式は, 次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{T_D} & -\frac{1}{T_D} \\ \frac{K_I}{L} & -\frac{K_D}{LT_D} & -\frac{R}{L} - \frac{K_p}{L} - \frac{K_D}{LT_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{T_D} \\ \frac{K_p}{L} + \frac{K_D}{LT_D} \end{bmatrix} i^*$$

第3章 可制御性, 可観測性と変数変換

3.1 可制御性と可観測性

次式で与えられる m 入力, l 出力の線形時不変システムを考える。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad : \mathbf{A}(n \times n), \mathbf{B}(n \times m), \mathbf{x}(n \times 1), \mathbf{u}(m \times 1) \quad (3-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad : \mathbf{C}(l \times n), \mathbf{D}(l \times m), \mathbf{y}(l \times 1) \quad (3-2)$$

『定義』 $\mathbf{u}(t)$ を制御して, 任意の初期値 $\mathbf{x}(0)$ から任意の \mathbf{x}_z に, 任意の有限な時間で移すことができるならば, システム(3-1)を**可制御(controllable)**といい, そうでないとき**不可制御(uncontrollable)**という。

可制御でないなら, 制御を努力しても無駄になる(制御できない部分が安定ならよいが)。

『定理』 可制御であるための必要十分条件は, **可制御性行列(controllability matrix)**

$$\mathbf{U}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad n \times (nm) \quad (3-3)$$

の**階数(rank)**が n となることである。特に, 1 入力の場合, \mathbf{U}_c は正方行列となり, この条件は $|\mathbf{U}_c| \neq 0$ と等価となる。

(必要条件⁽⁵⁾) $t = z$ において,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(z) &= e^{Az}\mathbf{x}(0) + \int_0^z e^{A(z-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{Az} \left\{ \mathbf{x}(0) + \int_0^z e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3-4)$$

左から, e^{-Az} を掛けて

$$e^{-Az}\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}(0) = \int_0^z e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-5)$$

ケーリー・ハミルトンの定理を繰り返し用いることで, \mathbf{A} の n 次以上のべき項を消去し,

$$e^{At} = a_1(t)\mathbf{I} + a_2(t)\mathbf{A} + \dots + a_n(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (3-6)$$

とおける。 $a_1(t), \dots, a_n(t)$ はスカラーの時間関数。

(3-6)を(3-5)の右辺に代入し,

$$\mathbf{h}_k = \int_0^z a_k(-\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (m \times 1) \quad (3-7)$$



とおくと、

$$(3-5)の右辺 = \mathbf{B}h_1 + \mathbf{A}h_2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}h_n$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \mathbf{U}_c \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$(n \times nm)$ $(nm \times 1)$

を得る。(3-5)の左辺は、 $\mathbf{x}(z)$ と $\mathbf{x}(0)$ を任意に与えると、 n 次元の任意なベクトルとなる。よって、この任意ベクトルを作る h_1, h_2, \dots, h_n （それぞれに \mathbf{u} が入っている）が有効となるためには、少なくとも \mathbf{U}_c の nm 本の列ベクトルの中に n 本の線形独立なものがなくてはならない。よって、 $\text{rank}(\mathbf{U}_c) = n$ が必要条件となる。入力がたくさんある時は余裕がある。入力が1つで $m=1$ のとき \mathbf{U}_c の逆行列が存在する条件と同じである。十分条件は文献(5)を参照のこと。

例 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}$ ランクが2なら、 \mathbf{u} で任意の x_1, x_2 が作れる。

《ケーリー・ハミルトンの定理》

$\mathbf{A}(n \times n)$ の特性多項式を

$$\Delta(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1$$

とすると、次式が成り立つ。

$$\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_n \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_2 \mathbf{A} + a_1 \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

よって、 $\mathbf{A}^n = -a_n \mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_2 \mathbf{A} - a_1 \mathbf{I}$ なので、この式を何度も使うと \mathbf{A}^k ($k \geq n$)の項を消去できる。



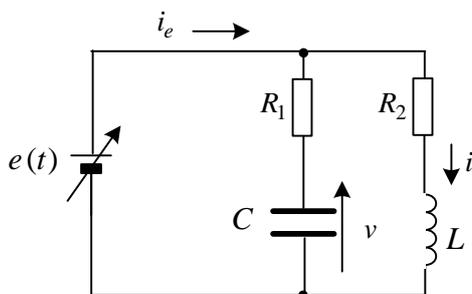
[定義] 任意の有限な時間 $0 \leq t \leq z$ の間に $\mathbf{y}(t)$ と $\mathbf{u}(t)$ の測定から初期値 $\mathbf{x}(0)$ が唯一に決定できるとき、システムを**可観測**(observable)といい、そうでないとき**不可観測**(unobservable)という。

[定理] 可観測であるための必要十分条件は、次の**可観測性行列**(observability matrix)

$$\mathbf{U}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (ln \times n) \quad (3-9)$$

の階数(rank)が n であることである。特に、1出力のとき U_o は正方行列となり、この条件は $|U_o| \neq 0$ と等価となる。

例題 3-1 図の回路で、可制御でなくなる条件を求めよ。また、 v を出力とするとき、可観測でない条件を求めよ。



(解) 状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e$$

可制御性行列は $U_c = [B, AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C^2 R_1^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L^2} \end{bmatrix}$

$$|U_c| = \begin{vmatrix} \frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C^2 R_1^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L^2} \end{vmatrix} = -\frac{R_2}{CL^2 R_1} + \frac{1}{C^2 R_1^2 L} = 0 \quad \text{とおくと}$$

$R_1 C = L/R_2$ だから、このとき不可制御である。

(注) つまり RC, RL 回路の時定数が等しい時不可制御である。これは、このときにコンデンサ電圧とコイルの電流が同様に变化するためと考えられよう。

$R_1 C \neq L/R_2$ の時は、 v, i は同じ電源でも区別して制御できるのは面白い。

出力方程式： $y = [1, 0] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$ より

可観測性行列は $U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{CR_1} & 0 \end{bmatrix} \therefore |U_o| = 0$ よって常に不可観測である。

(注) コンデンサの電圧と電源電圧が既知でも、コイルの電流の初期値は決らない。
 i_e を検出するなら、 $R_1 C = L/R_2$ 以外では可観測である。

3.2 状態変数の変換

状態方程式を作るとき、ある人は \mathbf{x} を状態変数に選んだが別の人は \mathbf{z} を選んだとする。この時、例えば安定性が同じシステムでありながら違ってくるといった問題は生じないだろうか？これについて考える。

次式で与えられる m 入力, l 出力の線形時不変システム

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad : \mathbf{A}(n \times n), \mathbf{B}(n \times m) \quad (3-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad : \mathbf{C}(l \times n) \quad (3-2)'$$

において,

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad \mathbf{T} : (n \times n) \quad |\mathbf{T}| \neq 0 \quad (3-10)$$

とする。(3-10)を(3-1)に代入して,

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

左から \mathbf{T}^{-1} を掛けて,

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-11)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{A}' \quad , \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}' \quad (3-12)$$

とおくと, (3-11)より, 次式が得られる。

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{B}'\mathbf{u} \quad (3-13)$$

(3-2)'も同様にして

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}'\mathbf{z} \quad \text{但し, } \mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{T} \quad (3-14)$$

(1) 安定性は変化していないか？ \mathbf{A} と \mathbf{A}' の固有値を調べる。

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}'| &= |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{T}| \quad \because |\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \quad , \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} : \text{正方向行列} \\ &= |\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned} \quad (3-15)$$

よって, \mathbf{A} と \mathbf{A}' の固有値は等しく, 安定性に変化はない。

(2) 伝達関数は変化していないか？

(3-1)をラプラス変換して,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3-16)$$

(3-2)'をラプラス変換して,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) \quad (3-17)$$

初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ において,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \quad (3-18)$$

ここで,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (3-19)$$

を, **伝達関数行列**(transfer function matrix)と言う。(3-13), (3-14)より,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' &= \mathbf{C} \mathbf{T} (s\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{T} \left[\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \quad \because (\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3-20)$$

よって, 伝達関数行列は不変である。

この他, 可制御性, 可観測性についても不変であることが証明できる。以上より状態変数の選び方にはいろいろあるが, どれによっても同じ結果が得られるので心配いらないことが判る。なお, (3-10)の変換行列 \mathbf{T} をうまく選ぶと, いろいろ面白い (使うのに便利な) $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ が作れる。これは, **正準形式**(canonical form)と呼ばれ次節で述べる。

3.3 1入力1出力の正準形式⁽⁵⁾

(1) 対角正準形式

\mathbf{A} の固有値が全て異なる時, 固有値を s_1, s_2, \dots, s_n , それに対する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ とする。このとき,

$$\mathbf{T} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \quad (3-21)$$

の変換行列により, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{z}(t)$ の変換をすると, \mathbf{A}' が対角正準形式 (対角行列)

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} s_1 & & \mathbf{0} \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \quad (3-22)$$

となる。これは, (1-21), (1-22)で述べた。 $\mathbf{B}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \mathbf{T}$ を

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}' = [c_1', c_2', \dots, c_n'] \quad (3-23)$$

とおくと, (3-13), (3-14)は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & \mathbf{0} \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix} u \quad (3-24)$$

$$y = [c_1', c_2', \dots, c_n'] [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \quad (3-25)$$

すなわち, n 個の並列システムとなる。図 3-1 は, この場合の**対角正準系**のブロック線図である。この変換は, 安定性の検討に役立つ。伝達関数は次式で与えられる。

$$G(s) = \mathbf{C}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{B}'$$

$$= \mathbf{C}' \begin{bmatrix} \frac{1}{s-s_1} & & 0 \\ & \frac{1}{s-s_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{s-s_n} \end{bmatrix} \mathbf{B}'$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{c_k' b_k'}{s-s_k} \quad (3-26)$$

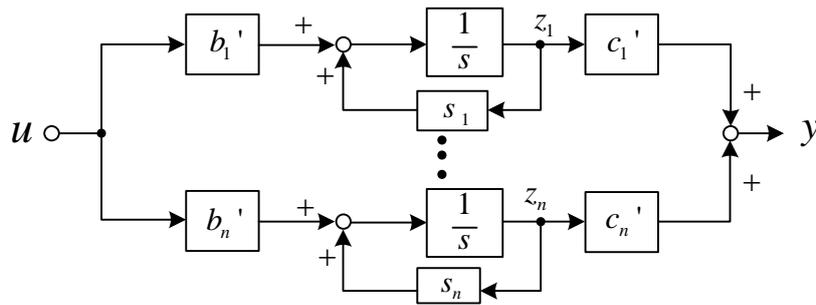


図 3-1 対角正準系のブロック線図

(2) 可制御正準形式

可制御な 1 入力システムにおいて, \mathbf{A} の特性多項式が

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (3-27)$$

であるとき

$$T = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & & & a_n & 1 \\ a_4 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_n & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

の変換行列を作る。すると

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

が得られる。このとき状態方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_3 \\ &\vdots \\ \frac{dz_n}{dt} &= -a_1 z_1 - a_2 z_2 - \dots - a_n z_n + u \end{aligned}$$



この場合の**可制御正準系**を図 3-2 に示す。伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G(s) &= C'(sI - A')^{-1}B' \\ &= \frac{c_n' s^{n-1} + c_{n-1}' s^{n-2} + \dots + c_2' s + c_1'}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \end{aligned} \quad (3-30)$$

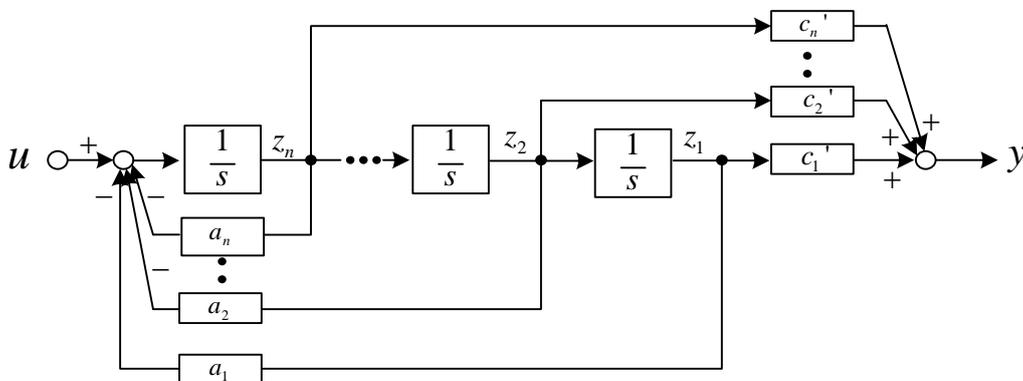


図 3-2 可制御正準系のブロック線図

(3) 可観測正準形式

可観測な 1 出力システムにおいて

$$R = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & & & a_n & 1 \\ a_4 & & \cdot & \cdot & & \\ \vdots & \cdot & \cdot & & & \\ a_n & 1 & & & \mathbf{0} & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

とにおいて、 $z(t) = R x(t)$ と変換すると、 C' 、 A' が可観測正準形式と呼ばれる形式になる。

$$A' = R A R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \cdot & & \vdots & -a_2 \\ 0 & 1 & \cdot & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

$$C' = C R^{-1} = [0, \cdots, 0, 1] \quad (3-33)$$

$$B' = R B \quad (3-34)$$

可観測正準系を図 3-3 に示す。伝達関数は

$$G(s) = C'(sI - A')^{-1} B' = \frac{b_n' s^{n-1} + b_{n-1}' s^{n-2} + \cdots + b_2' s + b_1'}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \quad (3-35)$$

となる。

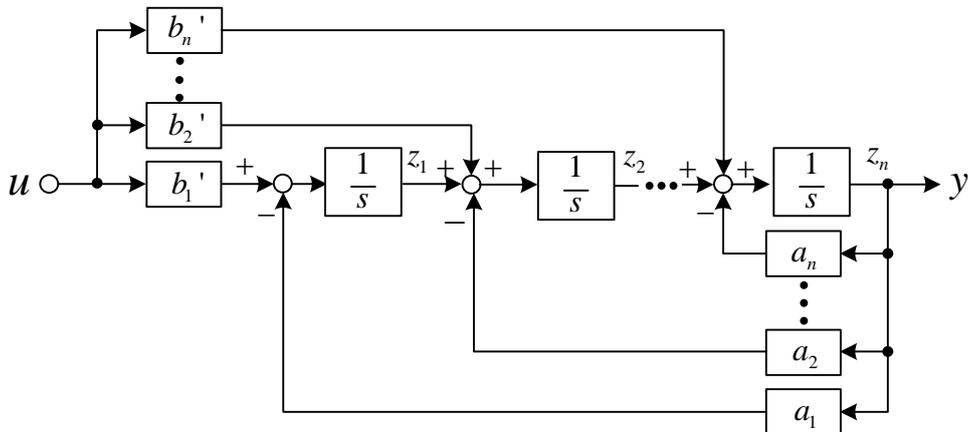


図 3-3 可観測正準系のブロック線図

第4章 最適フィードバック制御

一般に言う現代制御理論の中心となる制御法が最適フィードバック制御である。過渡応答の評価関数を設定して、それが最小になるように制御ゲインを決定する。まず目標値を零とする場合を、次にそれを利用して一般の目標値に対する最適サーボシステムを示す。

4.1 レギュレータ

(A, B) が可制御である m 入力 of 制御対象

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad : A(n \times n), B(n \times m), x(n \times 1), u(m \times 1) \quad (4-1)$$

において、初期値 $x(0)$ が $\mathbf{0}$ でないとする。入力 $u(t)$ を制御して $x(t)$ をうまく $\mathbf{0}$ (原点) に収束させたい。入力 $u(t)$ をどの様に制御したらよいだろうか。

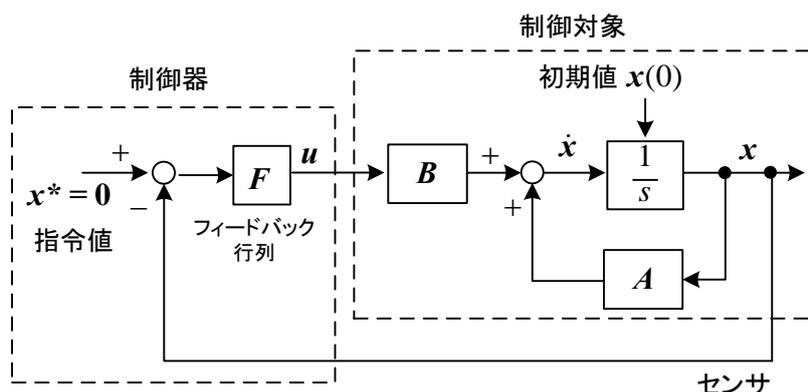


図 4-1 レギュレータ

最終的な定常状態 ($t = \infty$) では、 $d/dt = 0$ とすると、 $x(\infty) = -A^{-1}Bu(\infty)$ だから、 $x(\infty)$ が $\mathbf{0}$ なら $u(\infty)$ も $\mathbf{0}$ となる必要がある。いま、

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (4-2)$$

の変数が全て測定可能とする。このとき、

$$u(t) = -Fx(t) \quad (4-3)$$

ただし、

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

ベクトル x 行列 A ベクトル y

$$y = Ax$$

$y = xA$ はダメ

として制御したらどうだろうか。 \mathbf{x} が $\mathbf{0}$ になると、 \mathbf{u} も $\mathbf{0}$ になるので定常状態の条件は満足されている。(4-3)を**状態フィードバック制御**といい、 \mathbf{F} を**フィードバック係数行列**と言う。

(4-3)を(4-1)に代入して、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{x}(t) \quad (4-5)$$

(4-5)を閉ループシステムという。上式の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BF})t}\mathbf{x}(0) \quad (4-6)$$

となる。 \mathbf{F} をうまく選んで、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ を安定行列にできれば、任意の $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ に対して、 $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ となり、状態変数を原点に帰すことができる。このときの、目標値 $\mathbf{0}$ の閉ループシステムを**レギュレータ**という。 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を**レギュレータの極**といい、これが複素平面のより左側に設定できれば、より速く $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ となり、速応性の点では望ましい応答になると考えられる。

『定理』 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) が可制御であることと、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を任意の値に設定する行列 \mathbf{F} が存在することとは等価である。ただし、複素極を設定するときには、それと共役な極も同時に設定するものとする。

上記の定理は、 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) が可制御であれば行列 \mathbf{F} の選定により自由に応答が変えられることを意味する。注意すべき点は、 \mathbf{x} の全ての状態変数が検出できなければいけないこと、それに速く $\mathbf{0}$ に近づけようとすると入力 \mathbf{u} が非常に大きな値となり現実的でなくなることがある。よって複素平面のより左側に極を設定することには限界がある。

\mathbf{F} をどの様に決定するかが、制御系の設計の問題である。次のような方法が考えられる。

- (1) \mathbf{F} を適当に選び、応答を調べる。応答が満足できるものであればその時の \mathbf{F} を採用する。簡単だが **trial and error**(試行錯誤)で効率的でない。
- (2) 望ましい $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値を与えて、そのときの \mathbf{F} を計算する(**極配置**)。しかし、望ましい応答になっているかは応答を計算しないと判らない。だから、いくらか試行錯誤的となる。
- (3) ある評価関数を設定して、それが最小となるような \mathbf{F} を決定する(**最適レギュレータ**)。
 \mathbf{F} の最終的な決定は、やはり応答を計算して判断することになるので、評価関数の設定をやり直すこともある。

ここでは、1入力システムについて、(2)の極配置を述べる（最適レギュレータは次節で述べる）。

$A-BF$ の固有値の設定手順を以下に示す⁽⁵⁾。

手順1. A の特性方程式

$$|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (4-7)$$

と可制御性行列 $U_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ ($n \times n$)

を求め、可制御正準形式への変換行列 T をつくる。

$$T = U_c \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & \\ a_4 & & & & & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ a_n & 1 & & & 0 & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

手順2. 与えられた極 s_1, s_2, \dots, s_n に対し、 $A-BF$ が満たすべき特性多項式

$$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \dots + d_2 s + d_1 \quad (4-9)$$

の係数 d_1, d_2, \dots, d_n を求める。

手順3. F は次式により唯一に定まる。

$$F = [d_1 - a_1, d_2 - a_2, \dots, d_n - a_n] T^{-1} \quad (4-10)$$

(証明)

$$F' = FT = [f_1', f_2', \dots, f_n'] \quad (4-11)$$

とおくと、(3-12)より、 $A' = T^{-1}AT$, $B'F' = T^{-1}BFT$ であるから

$$\begin{aligned} |sI - A + BF| &= |T^{-1}T| |sI - A + BF| \\ &= |T^{-1}(sI - A + BF)T| \\ &= |sI - A' + B'F'| \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $A-BF$ と $A'-B'F'$ の固有値は一致する。右辺に(3-29)と(4-11)を代入して

$$\begin{aligned}
|sI - A' + B'F'| &= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1', \dots, f_n'] \right| \\
&= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_1 - f_1' & -a_2 - f_2' & \cdots & \cdots & -a_n - f_n' \end{bmatrix} \right| \\
&= s^n + (a_n + f_n')s^{n-1} + \cdots + (a_2 + f_2')s + (a_1 + f_1') \tag{4-12}
\end{aligned}$$

となる。

$n = 4$ の場合に説明しよう。

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad : M_{ij} \text{ は } i \text{ 行 } j \text{ 列を除いた小行列の行列式}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} s \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ b_2 & b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} b_1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{vmatrix} \\
&= s \left(s \begin{vmatrix} s & -1 \\ b_3 & s+b_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} \right) + b_1 (-1)^{2n} \\
&= s^4 + b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1 \quad b_1 \text{ から決まる。}
\end{aligned}$$

(4-12) が, (4-9) と一致しなくてはならないから,

$$f_k' = d_k - a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{4-13}$$

(4-10) より, F が求まる。

例題 4-1 DC モータの位置制御の問題を考える。制御対象が

$$J \frac{d\omega}{dt} = K\Phi i - R_m \omega, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{但し, } J, K, \Phi, R_m \text{ は定数}$$

で与えられる。ここでは簡単のため回路の式は無視し、電流 i を自由に変えられる入力と考える。位置 θ の目標値を 0 として、状態フィードバック

$$i = -[f_1, f_2][\theta, \omega]^T$$

により、レギュレータの極を s_1, s_2 (いずれも負の実数) に配置するような f_1, f_2 を求めよ。

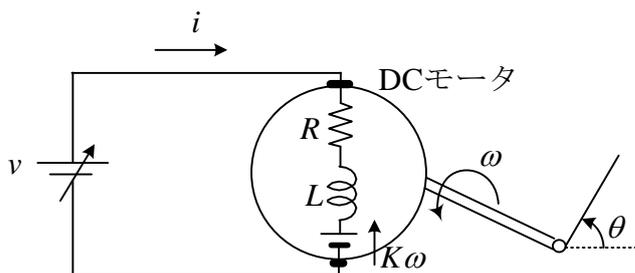


図 4-2 DC モータの位置制御

(解) 状態方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} i \quad \text{①}$$

$\mathbf{x} \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{B}$

$$\text{ただし, } a = \frac{R_m}{J}, \quad b = \frac{K\Phi}{J}$$

$$\text{手順 1. } |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{vmatrix} = s^2 + as \quad \therefore a_2 = a, \quad a_1 = 0$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b\mathbf{I}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{b}\mathbf{I}$$

$$\text{手順 2. } (s-s_1)(s-s_2) = s^2 - (s_1+s_2)s + s_1s_2 \quad \therefore d_1 = s_1s_2, \quad d_2 = -(s_1+s_2)$$

$$\text{手順 3. } \mathbf{F} = [f_1, f_2] = [d_1 - a_1, d_2 - a_2]\mathbf{T}^{-1}$$

$$= [s_1s_2/b, -(s_1+s_2+a)/b]$$

$$i = -\mathbf{F}\mathbf{x} = -[f_1, f_2]\mathbf{x} \quad \text{②}$$

(チェック) ②を①に代入して、 $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ の固有値が s_1, s_2 になっていることを確かめる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bf_1 & -a-bf_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$x \quad A-BF$

$$|sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ bf_1 & s + a + bf_2 \end{vmatrix} = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = (s - s_1)(s - s_2) = 0$$

よって $A - BF$ の固有値が s_1, s_2 であることが確認できた。

(注意) 実際のモータの位置制御では、任意の位置に静止させる必要がある。練習問題の1つのもとして取り上げた。

4.2 最適レギュレータ

図 4-1 のレギュレータで、 (A, B) が可制御である m 入力 of 制御対象

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad : A(n \times n), B(n \times m), \mathbf{x}(n \times 1), \mathbf{u}(m \times 1) \quad (4-14)$$

において、**評価関数**(performance index)

$$J = \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}(t)^T Q \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t) \} dt \quad (4-15)$$

を最小にする制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を求める。ここで、 $Q(n \times n)$ は**準正定対称行列**、 $R(m \times m)$ は**正定対称行列**であり、設計仕様として与えられる重み行列である。(4-15)を最小にする最適制御入力は次式で与えられる。証明は付録にある。

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1} B^T P \mathbf{x}(t) \equiv -F \mathbf{x}(t) \quad (4-16)$$

ここで、 F : **最適フィードバック行列**(optimal feedback coefficient matrix)。 $P(n \times n)$: 正定対称行列



P は次式に示す**リッカチ方程式** (Riccati equation) より求まる。

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4-17)$$

このとき評価関数の最小値は次式で与えられる。

$$J_{\min} = \mathbf{x}(0)^T P \mathbf{x}(0) \quad (4-18)$$

(4-16)を(4-14)に代入して、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(t) \quad (4-19)$$

となる。(4-19)の閉ループシステムを**最適レギュレータ**という。

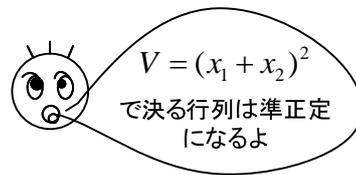
◎ **正定行列 \mathbf{A}** ($\mathbf{A} > 0$ と書く)

対称行列 \mathbf{A} についての二次形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が $\mathbf{0}$ でない \mathbf{x} に対し正のとき、行列 \mathbf{A} を正定行列という。必要十分条件は、 \mathbf{A} の先頭主座小行列がすべて正となることである。

(例) $V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$



$$|2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 19 > 0$$

従って、 $V(\mathbf{x}) > 0$ が成立する。

◎ **準正定行列 \mathbf{A}** ($\mathbf{A} \geq 0$ と書く)

対称行列 \mathbf{A} についての二次形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が $\mathbf{0}$ でない \mathbf{x} に対し非負 (≥ 0) のとき、行列 \mathbf{A} を準正定行列という。必要十分条件は、 \mathbf{A} の先頭主座小行列がすべて非負となることである。

(例) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ が非負となる a の条件は?

$$V(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|1| \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(2a+1) \geq 0$$

以上により、 $-1/2 \leq a \leq 1$

評価関数の選び方と意味

評価関数は、次式のように \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} を対角行列に選ぶのが簡単である。

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots + q_n x_n^2 + r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots + r_m u_m^2) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left([x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + [u_1, u_2, \dots, u_m] \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \right) dt \tag{4-20}
 \end{aligned}$$

ここで、 $q_i \geq 0$ ($i=1 \sim n$) 準正定、 $r_i > 0$ ($i=1 \sim m$) 正定

各変数の 2 乗を積分するのは、次の様に振動する場合に 2 乗しないで積分すると、正負が打ち消して積分値が小さくなってしまい、評価として適さないからである。各変数に q_i 、 r_i の重みをつけるのは、変数の単位は種々あるのでその調整と、特に小さくしたい変数に大きな重みをつけるためである。

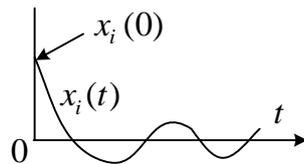


図 4-3 評価関数で変数を 2 乗する理由

(4-15)を最小化することから、最終的には $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ となる。つまり、この制御は、 $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ をすみやかに原点にもどす制御である。(4-15)の 1 項目が小さくできるほど、より速く \mathbf{x} は原点に戻る。しかし、このような制御を行うためには入力が非常に大きくなり、例えば容量の大きな電源を必要とし、望ましいことではない。そこで、(4-15)の第 2 項目を追加し、入力も評価する。 \mathbf{Q} の要素を \mathbf{R} の要素に対して、大きく選ぶと \mathbf{u} の大きな変化が許されるから、 \mathbf{x} の応答は良くなる。逆に、 \mathbf{R} の要素を \mathbf{Q} の要素に対して大きく選ぶと \mathbf{u} の大きな変化が許されないから、 \mathbf{x} の応答は悪くなる。例題 4-2 で確認できる。

リッカチ方程式が成立するとき(4-16)となる説明⁽⁵⁾

(4-15)の積分が有限な値をもつには、 $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ でなければならない。よって、

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \} dt = -\mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

$$\text{一方, } \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)$$

$$= (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

$$= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = 0$$

(4-15)の J に上式を加えて、

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

$$+ \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

$$= \int_0^{\infty} \{ (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})$$

$$+ \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{x} \} dt + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (4-21)$$

もし、 \mathbf{P} がリッカチ方程式を満足するなら、最適入力(4-16)で与えられる。積分項は0が最小で、そうなるように \mathbf{u} が変化するのである。

例題 4-2 図の制御系で、電流の初期値を $i(0)$ としたとき、制御により電流を0にしたい。

次式の評価関数 J を最小にする k の値とそのときの評価関数の最小値を求めよ。

$$J = \int_0^{\infty} (qi^2 + v^2) dt \quad \text{ただし, } q > 0$$

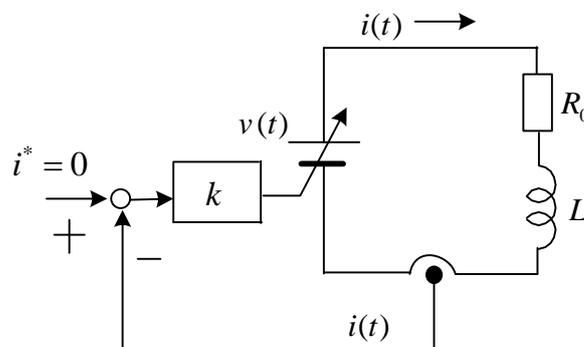


図 4-4 RL 回路の電流制御

(解) 制御対象の状態方程式は,

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_0}{L}i + \frac{1}{L}v$$

よって, (4-14), (4-15)と比べて

$$A = -\frac{R}{L}, B = \frac{1}{L}, Q = q, R = 1$$

リッカチ方程式は, (4-17)より

$$P\left(\frac{-R_0}{L}\right) + \left(\frac{-R_0}{L}\right)P - P\frac{1}{L}\frac{1}{L}P + q = 0$$

$$\therefore P^2 + 2LR_0P - L^2q = 0$$

$P > 0$ (正定) だから, $P = -LR_0 + L\sqrt{R_0^2 + q}$ なので

$$v = -ki \quad \text{ただし, } k = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -R_0 + \sqrt{R_0^2 + q}$$

このとき, (4-18)より

$$J_{\min} = P i^2(0) = L(\sqrt{R_0^2 + q} - R_0)i^2(0)$$

図 4-5 は評価関数の重み q を変えた場合の過渡応答を示す。 q が小さい時, 電流 i の変動は許され, 相対的に大きくなった入力 v の重みのため入力の変動が抑えられる。 q が大きい時, 電流 i の変動は許されず, 相対的に小さくなった入力 v の重みのため入力の変動が大きくなる。 q は両者のバランスを考えて選ぶ必要がある。

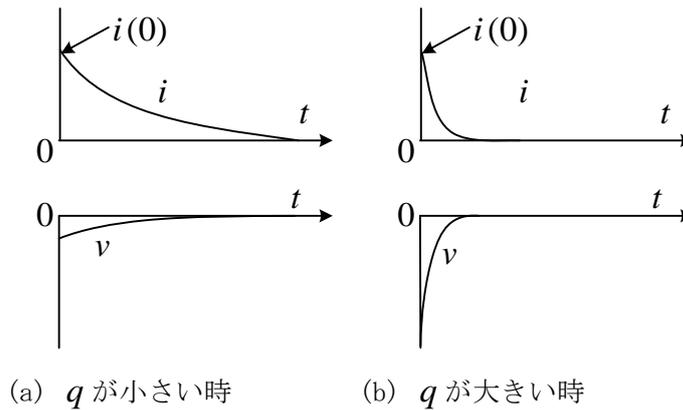


図 4-5 重みの違いが応答に及ぼす影響

(別解) リッカチ方程式を使わないで, 直接計算して求めてみよう。

$v = -ki$ だから, 制御系全体の微分方程式は

$$L\frac{di}{dt} + (R_0 + k)i = 0$$

よって, $i = e^{st}i(0)$, $s = -\frac{R_0 + k}{L}$

評価関数は, $s < 0$ すなわち $k > -R_0$ のときのみ収束し,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (qi^2 + v^2) dt \\ &= \int_0^\infty (qi^2 + k^2i^2) dt \\ &= (q + k^2)i^2(0) \int_0^\infty e^{2st} dt \\ &= \frac{L(q + k^2)}{2(R_0 + k)} i^2(0) \end{aligned}$$

極小値は, $\frac{\partial J}{\partial k} = 0$ より, $4Lk(R_0 + k) - 2L(q + k^2) = 0 \quad \therefore k = -R_0 + \sqrt{R_0^2 + q}$

$$J_{\min} = \frac{L(2q + 2R_0^2 - 2R_0\sqrt{R_0^2 + q})}{2\sqrt{R_0^2 + q}} i^2(0) = L(\sqrt{R_0^2 + q} - R_0) i^2(0)$$

(注意) 実際の電流制御では, 任意の指令値に追従しないといけない。練習問題の1つとして取り上げた。

例題 4-3 制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} i \quad \text{ただし, } a > 0, b > 0$$

に対し, 評価関数 J を

$$J = \int_0^\infty (q\theta^2 + i^2) dt \quad \text{ただし, } q > 0$$

として, 変数を原点に収束させる最適レギュレータ入力 i を求めよ。

(解) リッカチ方程式の正定対称行列の解を

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

として, 題意より

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

であるから、リッカチ方程式より

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(1,1)\text{成分} \quad -b^2 p_{12}^2 + q = 0 \quad \text{①}$$

$$(1,2), (2,1)\text{成分} \quad p_{11} - a p_{12} - b^2 p_{12} p_{22} = 0 \quad \text{②}$$

$$(2,2)\text{成分} \quad 2p_{12} - 2a p_{22} - b^2 p_{22}^2 = 0 \quad \text{③}$$

$$\mathbf{P} \text{ は正定なので, } p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\therefore p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad \therefore p_{22} > 0 \quad \text{④}$$

$$\text{③, ④より, } p_{12} > 0 \text{ だから, ①より } p_{12} = \sqrt{q}/b$$

$$\text{③より④を考慮して } p_{22} = (-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}) / b^2$$

$$\text{②より } p_{11} = \sqrt{q} \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}} / b$$

最適制御入力は,

$$\begin{aligned} i(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= -[0, b] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= -\sqrt{q} \theta - \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b} \omega \end{aligned}$$

4.3 最適サーボシステム(積分形最適レギュレータ)

最適レギュレータでは、状態値に変動があった場合、それを零にするような制御が行われるが、変化する目標値に出力を追随させることやステップ外乱などの持続的な外乱に対する考慮が払われていない。これらを考慮した次のような性質を持つ制御系を一般に**サーボ系** (servo system) という。

(I) 目標値や外乱が存在しないとき、制御系は安定である。

(内部安定性の条件)

(II) 持続的な外乱入力が存在しても、制御対象の出力が与えられた目標入力に定常偏差なく追従する。

(出力レギュレーションの条件)

この (II) の条件を満たす制御系が設計できるためには、目標入力及び外乱のラプラス変換を $R(s)$ とするとき、これと同じ伝達関数を一巡伝達関数の中に含んでいなければならない。これを**内部モデル原理**(internal model principle)という。

例えば、ステップ指令 $r(t)=1$ のときそのラプラス変換は $R(s)=1/s$ であり、一巡伝達関数の中に積分器がなければならず、制御対象に積分器が入っていなければ、積分制御器を用いないと定常偏差を 0 にすることができない。正弦波指令 $r(t)=\sin \omega t$ の場合には、そのラプラス変換は $R(s)=\omega/(s^2+\omega^2)$ であり、 $1/(s^2+\omega^2)$ を制御器に含まないと定常偏差を 0 にできない。

ここでは、ステップ状の指令に対して、ステップ状の外乱があつた場合でも定常偏差なく追従するサーボ系を最適レギュレータを適用して求める方法を示す。これを、**最適サーボシステム**(optimal servo system)と呼ぶ。

制御対象は m 入力、 m 出力で可制御、可観測システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Hd \quad (4-22)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4-23)$$

ここに、 $A(n \times n), B(n \times m), C(m \times n), H(n \times s)$

$$x(n \times 1), y(m \times 1), u(m \times 1), d(s \times 1)$$

で与えられるものとする。 d はステップ状外乱ベクトルを表す。

$y(t)$ をステップ状の一定目標入力ベクトル $r(m \times 1)$ に定常偏差なく追従するサーボ系を設計する **Smith-Davison の設計法** を以下に述べる⁽²⁶⁾。このとき偏差を

$$e = y - r \quad (4-24)$$

とする。一般とは符号が反対である。

(4-22)を微分すると d は一定だから次式が得られる。ドット・も時間微分 d/dt を表す。

$$\frac{d \dot{x}(t)}{dt} = A \dot{x}(t) + B \dot{u}(t) \quad (4-25)$$

(4-23)を用いて、(4-24)を微分し、 r は一定だから 次式を得る。

$$\frac{d e(t)}{dt} = C \dot{x}(t) \quad (4-26)$$

(4-25), (4-26)をまとめて、次の状態方程式 (**拡大系**と呼ぶ) が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \quad (4-27)$$

これを

$$\frac{d \mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{A}' \mathbf{x}' + \mathbf{B}' \dot{u} \quad (4-28)$$

と書く。評価関数を、

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'^T \mathbf{Q} \mathbf{x}' + \dot{u}^T \mathbf{R} \dot{u}) dt \quad (4-29)$$

とする。新しい状態変数 \mathbf{x}' は速やかに $\mathbf{0}$ (ステップ指令及び一定外乱の定常状態) に制御したいので、 J を最小にする制御に最適レギュレータ理論が適用できる。なぜなら定常状態は $\dot{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{0}$ とし、また偏差も 0 にしたいからである。この結果

$$\dot{u} = -\mathbf{F} \mathbf{x}', \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{P} \quad (4-30)$$

ここに、 \mathbf{P} は $(n+m) \times (n+m)$ の行列であり、次のリッカチ方程式の対称正定値解である。

$$\mathbf{P} \mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4-31)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

とおくと、(4-30)より

$$\dot{u} = -\mathbf{K}_1 \dot{x} - \mathbf{K}_2 (y - r) \quad (4-33)$$

と表される。この式を積分すると、

$$u(t) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2 \int_0^t (r - y) dt \quad (4-34)$$

この場合の制御システムを図4-6に示す。 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ は一般に行列であることに注意せよ。

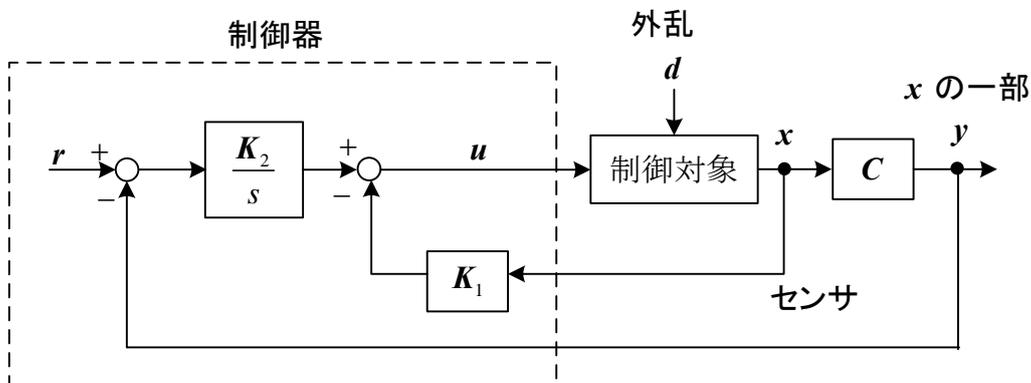


図4-6 最適サーボシステム

なお、応答を計算する場合には、

$$z = \int_0^t (r - y) dt \quad (4-35)$$

とにおいて、次式の系全体の状態方程式より計算すればよい。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}d \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

最適サーボシステムでは、評価関数を設定すれば機械的に最適な $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ が求まる。よって PI 制御や I-P 制御に比べて高性能化できる。状態変数が全て検出できることが前提であるが、それができない場合には次章で述べるオブザーバが利用できる。

例題 4-4 制御対象が 1 次の系

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bu \quad \textcircled{1}$$

であるとき ($a > 0, b > 0$)、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ q(x^* - x)^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\} dt \quad \textcircled{2}$$



を最小にするような最適サーボシステムを設計せよ ($q > 0$)。 x^* は指令値である。入力 u は理論上、その微分の 2 乗を評価する。それが小さいなら、穏やかに入力 u が変化する。

(解) $e = x - x^*$ (x^* : 一定) とおき、 $\textcircled{1}$ を微分して拡大系が以下の様に得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}$$

よって、

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

対称正定行列 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおいて、リッカチ方程式より、

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(1,2), (2,1)の成分は等しく, 3個の独立な式が得られる。

$$-2a p_{11} + 2p_{12} - p_{11}^2 b^2 = 0 \quad (3)$$

$$-a p_{12} + p_{22} - p_{11} p_{12} b^2 = 0 \quad (4)$$

$$q - p_{12}^2 b^2 = 0 \quad (5)$$

\mathbf{P} は正定行列だから, $p_{11} > 0$, $|\mathbf{P}| = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad \therefore p_{22} > 0$

$p_{12} > 0$ だから, (5)より $p_{12} = \frac{\sqrt{q}}{b}$

(3) に代入して, $p_{11} > 0$ なので $p_{11} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b^2}$

(4) より $p_{22} = \frac{\sqrt{q}\sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}}{b}$

$$\mathbf{F} = [K_1, K_2] = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = [b, 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = [bp_{11}, bp_{12}]$$

よって

$$K_1 = (-a + \sqrt{a^2 + 2b\sqrt{q}}) / b$$

$$K_2 = \sqrt{q}$$

このときのブロック線図を図 4-7 に示す。 K_1, K_2 がスカラーなので **I-P 制御系** と呼ばれる制御系になる。 q を大きく選ぶと, K_1, K_2 はいずれも大きくなり, 偏差を速く 0 にする制御系となる。一方, q を小さく選ぶと, K_1, K_2 はいずれも小さくなり, 入力の急な変化が抑えられる。図 4-6 の最適サーボシステムは, K_1, K_2 が行列である点に注意されたい。

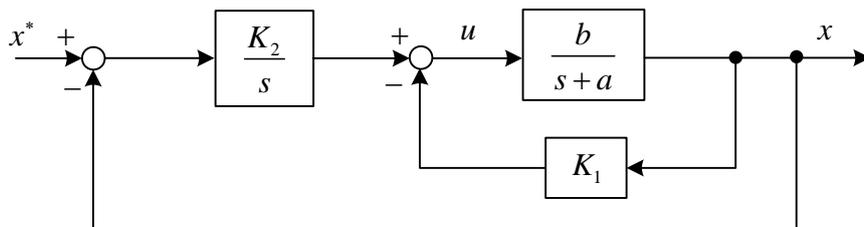


図 4-7 1 次の制御対象の最適サーボシステム

第5章 オブザーバとカルマンフィルタ

実際の制御対象では，状態値の全てが測定できることはまれであり，制御対象の状態方程式や直接測定できる出力から $\mathbf{x}(t)$ を推定することが行われる。そのための推定機構の一つがルーエンバーガ (Luenberger) により提案された**オブザーバ(状態観測器)**(observer)である。オブザーバは，最適フィードバック制御を始め，いろいろな制御に利用できる。

5.1 単純な状態推定器 (シミュレータ)

まず，簡単な図の制御対象で考える。入力電圧 $u(t)$ ，抵抗 R ，インダクタンス L は既知であるとして，センサを用いなくて電流 $i(t)$ を推定できないだろうか？

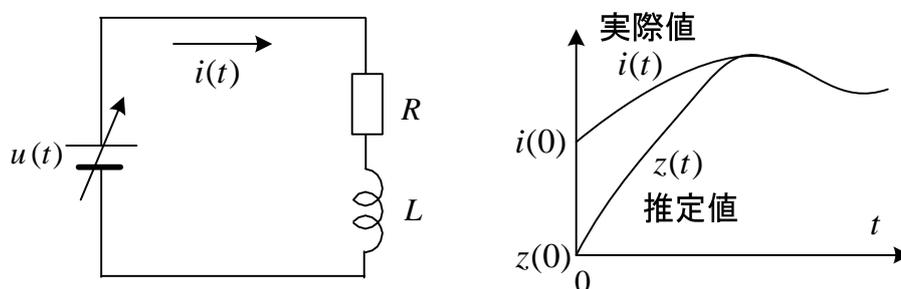


図 5-1 RL 回路と状態推定

状態方程式は，次式で与えられる。

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \quad (1)$$

従って，

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R}{L}z + \frac{1}{L}u \quad (2)$$

を用いて z を演算し，実際値 i の代わりに使うことが考えられる。②-①より，次式が得られる。これを**誤差方程式**という。

$$\frac{d(z-i)}{dt} = -\frac{R}{L}(z-i) \quad (3)$$

この式を解くと，

$$z(t) - i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} (z(0) - i(0)) \quad (4)$$

初期値 $i(0)$ は判らないので，例えば $z(0) = 0$ として計算すると，しばらくすると

$$z(t) = i(t) \quad (5)$$

となり，推定値 $z(t)$ を実際値 $i(t)$ の代わりに使うことができるようになる。これが**状態推定** (state estimation) であり，センサを使わないで状態値が得られる。②の $z(t)$ の演算は，一般に $u(t)$ が時間によって変化するので制御用のコンピュータを用いてオンラインで求める。

例えばオイラー法を使うと (T : サンプルング周期), 次式で演算できる。

$$z_{k+1} = z_k + \left(-\frac{R}{L}z_k + \frac{1}{L}u_k\right)T \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \textcircled{6}$$

この結果, センサを省くことができるようになる。以上の考え方を一般の場合に拡張する。

制御対象は m 入力, l 出力で次式の可制御, 可観測システムとする。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (5-2)$$

ここに, $\mathbf{A}(n \times n)$, $\mathbf{B}(n \times m)$, $\mathbf{C}(l \times n)$

$$\mathbf{x}(n \times 1), \quad \mathbf{y}(l \times 1), \quad \mathbf{u}(m \times 1)$$

行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} と入力 $\mathbf{u}(t)$ は既知として, (5-1)より $\mathbf{x}(t)$ の推定値 $\mathbf{z}(t)$ を

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (5-3)$$

により求める。この方法は最も簡単で, **シミュレータ**と呼ばれる。ここで初期値 \mathbf{x}_0 は判らないので, 適当な値 \mathbf{z}_0 にする。(5-3)で演算する場合の問題点を述べよう。実際の値 $\mathbf{x}(t)$ と推定値 $\mathbf{z}(t)$ の差を考え, (5-3)から(5-1)を引いて**誤差方程式**が以下の様に得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)) &= \mathbf{A}(\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)) \\ \therefore \mathbf{z}(t) &= \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)) \end{aligned} \quad (5-4)$$

一般に $\mathbf{z}(0) \neq \mathbf{x}(0)$ であるから, \mathbf{A} の固有値で $\mathbf{z}(t)$ が $\mathbf{x}(t)$ に近づく様子が変わる。 \mathbf{A} の固有値に実部が正のものがあれば不安定で推定できず, 固有値の実部が全て負の場合でも実部の絶対値が小さいと収束に長い時間を要することが考えられる。しかし, \mathbf{A} の固有値が十分安定であれば, (5-3)は利用可能で, 最も簡単に状態推定が可能となる。

誘導電動機(IM)のベクトル制御について例を示す⁽³⁴⁾。誘導電動機のベクトル制御は広く用いられているが, これは磁束のシミュレータを利用した制御と考えられる。シミュレータを用いて誘導モータの**二次鎖交磁束(回転子鎖交磁束)** $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ は次式で演算できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

ここで, $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$: 固定子 α, β 軸電流, ω_r : 回転角速度

τ_r : 回転子回路の時定数, M : 相互インダクタンス

① を制御用のコンピュータでオイラー法や台形公式を用いて解くと $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ が計算できる。このとき, $i_{s\alpha}, i_{s\beta}, \omega_r$ はセンサで検出した値を用いる。電流を入力と考えると,

固有値は、次式となり、実部が負だから安定な制御対象である。

$$\begin{vmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{vmatrix} = (s + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2 = 0 \quad \text{より,} \quad s = -\frac{1}{\tau_r} \pm j\omega_r \quad \text{②}$$

$\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ より、**磁束の向き** θ は次式で計算する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\psi_{r\beta}}{\psi_{r\alpha}} \quad \text{③}$$

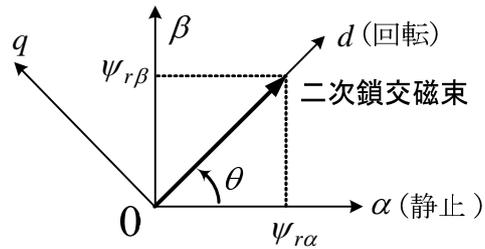


図 5-2 誘導機のモデリングに使用する座標系

①の二次鎖交磁束演算，③の磁束の向きの演算によるベクトル制御系の構成を図 5-3 に示す。3相/2相変換では、3相電流を静止座標系の2相電流に置き換える。2相/3相変換では、 d - q 回転座標系での電流指令から、3相電流指令を計算し、電流制御器でモータに指令通りの電流を流す（ここでインバータが使われる）。この結果、 i_{sq}^* に比例してモータのトルクが発生する。検出が難しい二次鎖交磁束を計算で求め利用している。誘導機をベクトル制御で始動するとき、まず励磁電流指令 i_{sd}^* を流して一度定常状態に達してから、 i_{sq}^* を与える。これは二次鎖交磁束の初期値の影響をなくすためである。

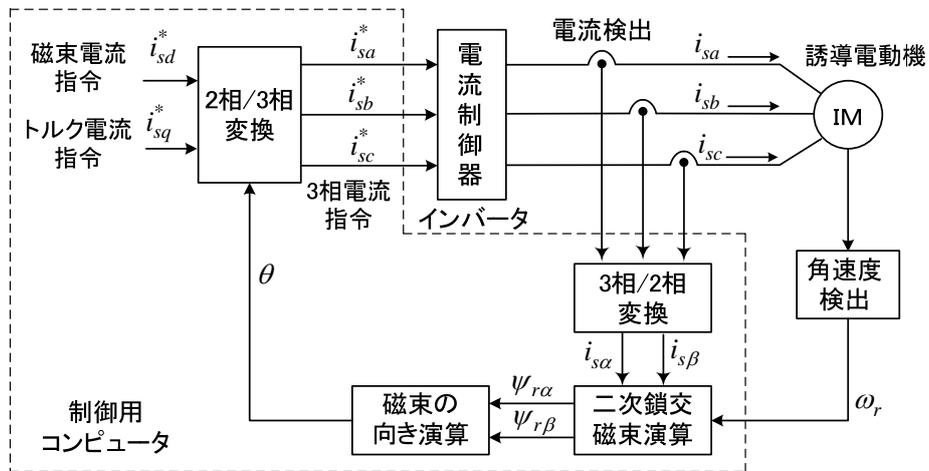


図 5-3 誘導電動機のベクトル制御⁽³⁴⁾

5.2 同次元オブザーバ

同次元オブザーバ(identity observer, full order observer)について述べる⁽⁵⁾。(5-1), (5-2)で与えられる可観測な制御対象に対し, 同次元 (n 次元) オブザーバを次式で構成する。

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}z(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})z(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}u(t)\end{aligned}\quad (5-5)$$

但し, $\mathbf{K} : (n \times l)$ ゲイン行列(gain matrix)

(5-3)の方法と違うのは, 実際出力 $\mathbf{y}(t)$ とオブザーバから求めた出力 $\mathbf{C}z(t)$ の差に**オブザーバゲイン**(observer gain) \mathbf{K} を掛けて補正している点である。 $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ とするとシミュレータになる。図 5-4 に同次元オブザーバのブロック線図を示す。

さて, $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{z}(t)$ の誤差ベクトルを

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \quad (5-6)$$

とおくと, (5-1), (5-2), (5-5)より, **誤差方程式**(error equation)は次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}}{dt} &= \frac{d\mathbf{z}}{dt} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}\end{aligned}\quad (5-7)$$

よって, (5-7)の解は

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})t} \mathbf{e}(0) \quad (5-8)$$

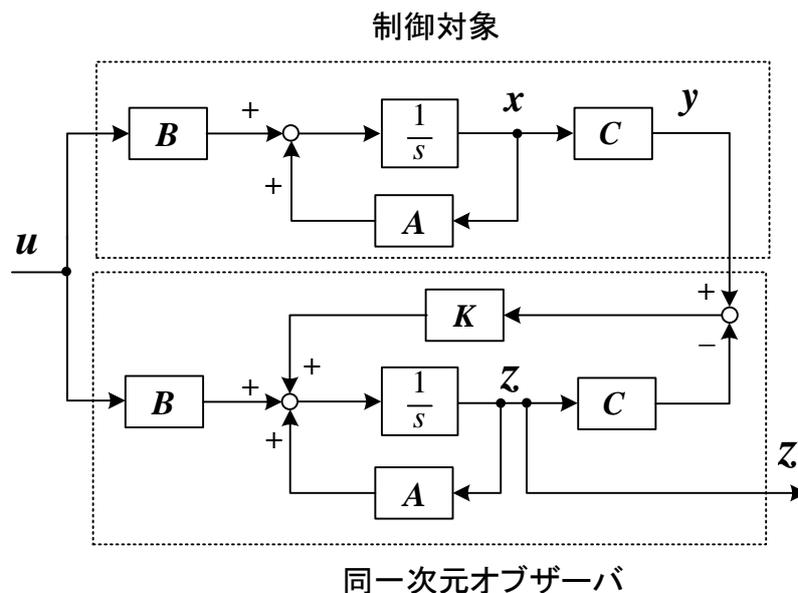


図 5-4 実際の制御対象と同次元オブザーバによる状態推定

となる。 $A-KC$ を安定行列にできれば、どんな初期推定誤差 $e(0)$ に対しても、 $t \rightarrow \infty$ で $e(t) \rightarrow 0$ すなわち、 $z(t) \rightarrow x(t)$ となり、 $z(t)$ を $x(t)$ の推定値として使えるようになる。また、 $A-KC$ の固有値を**同一次元オブザーバの極**という。オブザーバの極を複素平面のより左側に設定すれば、より速く $z(t) \rightarrow x(t)$ とできるが、オブザーバゲインが大きくなってノイズの影響を受けやすくなる。従って適切なオブザーバゲインの選定が重要である。

さて、 $A-KC$ の固有値と K の関係については次の定理が知られている⁽⁵⁾。

『定理』 (C, A) が可観測であることと、 $A-KC$ の固有値を任意の値に設定する K が存在することは等価である。

極配置は、レギュレータの場合と同様に行える。 K の位置をそろえるため、 $A-KC$ の転置をとり、 $(A-KC)^T = A^T - C^T K^T$ を得る。 $A-KC$ と $A^T - C^T K^T$ の固有値は等しいので、 $A^T - C^T K^T$ の極配置より K^T を求める。なお、 (C, A) が可観測であるとき、 (A^T, C^T) が可制御であることも成り立つ。極配置では可制御正準形式を使用している。次元が低いときには、変換しないで直接極配置が可能である。

例題 5-1 2 入力 1 出力の制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対し、オブザーバの極を -5 (重根) とする同一次元オブザーバを求めよ。

(解) x_1, x_2 の推定値をそれぞれ z_1, z_2 とすると同一次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} (y - [1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}) \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{K} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{z})) \\ &= \begin{bmatrix} -1-k_1 & -1 \\ 1-k_2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} y \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{y} \end{aligned}$$

$A-KC$ の固有値を $r = -5$ (重根) にすればよい。

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K} \mathbf{C}| &= \begin{vmatrix} s+1+k_1 & 1 \\ -1+k_2 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + (k_1+3)s + 2k_1 - k_2 + 3 \\ &= (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25 \end{aligned}$$

係数比較により, $k_1 = 7, k_2 = -8$ となり, 同次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

5.3 最小次元オブザーバ

l 個の状態変数が直接測定できた場合, オブザーバで直接測定できない $n-l$ 個の状態変数だけを再現した方が簡単になる。このようにして, 次元が下げられたオブザーバを**最小次元オブザーバ**(minimal order observer)という。最小次元オブザーバについてはゴピナス(Gopinath)の構成法が良く知られている⁽⁵⁾。出力変数そのまま状態変数の一部と一致する場合には, 変数変換は不要で手順も簡単になる。この場合について説明する。制御対象が次式で表せるとする。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5-9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \quad (5-10)$$

ここで, $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}: l \times 1, \mathbf{x}_2: (n-l) \times 1, \mathbf{u}: m \times 1$

\mathbf{x}_1 は測定できるから, \mathbf{x}_2 だけを推定すればよい。(5-9)を2つに分け, (5-10)を用いると次式が得られる。

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (5-11)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (5-12)$$

\mathbf{x}_2 の推定値を \mathbf{z} とし, (5-12)を出力方程式と考えて同次元オブザーバを構成すると次式を得る。

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}_{22}\mathbf{z} + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{z} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y} - \mathbf{B}_1\mathbf{u} \right) \quad (5-13)$$

$\mathbf{K}((n-l) \times l)$: ゲイン行列

(5-13)で, 右辺の \mathbf{y} の微分を除くため

$$\mathbf{z} - \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{z}' \quad (5-14)$$

とおくと

$$\frac{d\mathbf{z}'}{dt} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12})\mathbf{z}' + (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{11})\mathbf{y} + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \quad (5-15)$$

が得られる。(5-15)で \mathbf{z}' を求め、(5-14)より \mathbf{z} を計算すれば \mathbf{y} の微分は必要ない。デジタル制御する場合には、(5-15)より差分方程式を求め、(5-14)より \mathbf{z} を求めることになる。(5-13)より直接差分方程式を作り、 \mathbf{y} の差分を用いると、 \mathbf{y} に含まれるノイズの影響を大きく受ける。ただし、(5-13)を用いて差分方程式を作り、変形して(5-15)と同じ差分方程式を得ることはできる。

次に、**誤差方程式**を求める。(5-13)から(5-11)を引いて、(5-12)を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}_{22}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) + \mathbf{K}(\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12})(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (5-16)$$

(\mathbf{C}, \mathbf{A})が可観測であれば、($\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22}$)が可観測となることが知られており、 $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}$ の固有値(オブザーバの極)は任意の値に設定できる。従って、 $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{x}_2(t)$ ($t \rightarrow \infty$)とできる。

最小次元オブザーバでも、同一次元オブザーバと同様に制御対象の状態方程式は全て計算に利用しており、式が極端に単純化された訳ではない。同一次元オブザーバでは、センサで検出している変数も推定するので無駄なことをしているようであるが、その演算値と実際のセンサ出力の差から \mathbf{A} に含まれる変動するパラメータを推定することなどに利用が可能で、場合によっては役立つことがある。なお、最小次元のシミュレータなら随分と式は簡単になる。図5-3に示したベクトル制御については、実際は電流も状態変数であるから、最小次元のシミュレータを用いたと考えられる。

例題 5-2 2入力1出力の制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対し、オブザーバの極を -5 とする最小次元オブザーバを求めよ。

(解) x_2 の推定値を z_2 とすると x_1 は出力として測定されるので、最小次元オブザーバは次式で与えられる。

$$\frac{d z_2}{d t} = x_1 - 2 z_2 + 2 u_2 + K \left(\frac{d x_1}{d t} + x_1 + z_2 - u_1 \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{d}{d t} (z_2 - K x_1) = (1 + K) x_1 + (K - 2) z_2 + 2 u_2 - K u_1$$

$z_2 - Kx_1 = z_2'$ とおくと

$$\frac{d}{dt} z_2' = (1 - K + K^2)x_1 + (K - 2)z_2' + 2u_2 - Ku_1 \quad (3)$$

③より z_2' を演算し、

$$z_2 = z_2' + Kx_1 \quad (4)$$

より z_2 が求まる。

誤差方程式を求めるため、②に①の dx_1/dt を代入すると

$$\frac{dz_2}{dt} = x_1 - 2z_2 + 2u_2 + K(-x_2 + z_2) \quad (5)$$

⑤から①の dx_2/dt を引いて

$$\frac{d}{dt}(z_2 - x_2) = -2(z_2 - x_2) + K(z_2 - x_2) = (K - 2)(z_2 - x_2)$$

オブザーバの極は $(K - 2)$ で、これを -5 とするのでオブザーバゲインは $K = -3$ となる。

$K = -3$ とした③、④が最小次元オブザーバである。

例題 5-3 制御対象がモータで

$$J \frac{d\omega}{dt} = k i - T_L \quad (1), \quad \frac{dT_L}{dt} = 0 \quad (2)$$

J : 慣性モーメント, k : トルク定数, ω : 回転角速度, T_L : 負荷トルク
 i : トルク電流

で与えられる。簡単のためトルク電流を入力と考える。負荷トルク T_L 以外は全て既知とすると、 T_L を推定する最小次元オブザーバ (**負荷トルクオブザーバ**, **外乱オブザーバ disturbance observer** と呼ばれる⁽¹²⁾) を求めよ。オブザーバの極は $-r$ に設定する。

(解) 最小次元オブザーバは、②を状態方程式、①を出力方程式と考えて同次元オブザーバを作ればよいから((5-13)より)、 T_L の推定値を T_L' として

$$\frac{dT_L'}{dt} = K \left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_L'}{J} - \frac{ki}{J} \right) \quad (3)$$

となる。(5-13) の右辺第 1,2,3 項が 0 で、オブザーバゲインがついた項だけが残っている。

①を代入して③-②より誤差方程式を求めると次式が得られる。

$$\frac{d(T_L' - T_L)}{dt} = K \left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_L'}{J} - \frac{ki}{J} \right) = \frac{K}{J} (T_L' - T_L) \quad (4)$$

④よりオブザーバの極は、 K/J だから題意より

$$K/J = -r \quad \therefore K = -rJ \quad (5)$$

で与えられる。③が求める負荷トルクオブザーバで、オブザーバゲインは⑤で与えられる。

以下に、ブロック線図を導き、負荷トルクオブザーバの理解を深める。③、⑤よりラプ

ラプラス変換して

$$T_L'(s) = \frac{ki(s) - Js\omega(s)}{1 + (s/r)} \quad (6)$$

となり、図 5-5 のブロック線図が得られる。しかし、ブロック線図通り ω の微分を直接計算するのは、ノイズの影響が大きいので避けるべきである。そこで、⑥を

$$\begin{aligned} T_L'(s) &= \frac{rki(s)}{r+s} - \frac{rJs\omega(s)}{r+s} = \frac{rki(s)}{r+s} - rJ\left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\omega(s) \\ &= -rJ\omega(s) + \frac{rki(s) + r^2J\omega(s)}{r+s} \end{aligned} \quad (7)$$

と変形する。⑦式の演算には微分は含まれない。デジタル制御⁽³⁵⁾を行う場合まず、

$$x(s) = \frac{rki(s) + r^2J\omega(s)}{r+s} \quad (8)$$

とにおいて、 x の微分方程式から差分方程式を作り（これは 1 次のローパスフィルタ）、

$$T_L'(t) = -rJ\omega(t) + x(t) \quad (9)$$

として演算すればよい。差分方程式は、③から(5-14),(5-15)の考え方を使っても得られる。(5-14)の z' が、⑧の x に相当する。

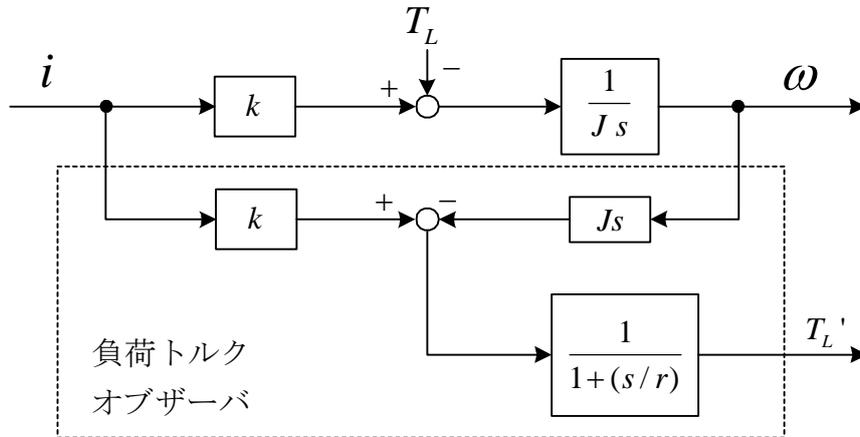


図 5-5 負荷トルクオブザーバ (外乱オブザーバ)

負荷トルクオブザーバの極は、ローパスフィルタの極に相当するため、 r を大きく選ぶことで遅れのない負荷トルクの推定値を得ることができる。しかし、大きすぎると観測ノイズや制御対象のモデル化誤差の影響を受ける。 $r = \infty$ は、⑥より ω の微分を演算して T_L を求めることに相当する。



5.4 カルマンフィルタ

連続系のカルマンフィルタ

同次元オブザーバではオブザーバゲイン \mathbf{K} の設計が重要である。測定出力や制御対象に入る不規則性の雑音を考えて、 \mathbf{K} を求める同次元オブザーバが**カルマンフィルタ** (Kalman filter) である。以下これについて述べる。

制御対象を

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (5-17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (5-18)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(n \times n), \quad \mathbf{B}(n \times m), \quad \mathbf{C}(l \times n), \quad \mathbf{x}(n \times 1), \\ \mathbf{y}(l \times 1), \quad \mathbf{u}(m \times 1), \quad \mathbf{w}(n \times 1), \quad \mathbf{v}(l \times 1)$$

とする。 $\mathbf{w}(t)$ は**システム雑音** (system noise), $\mathbf{v}(t)$ は**測定雑音** (measurement noise) と呼ばれる。以下、 (\mathbf{C}, \mathbf{A}) は可観測と仮定する。

このシステムに対する、同次元オブザーバを

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{z}(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{z}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5-19)$$

とし、 $\mathbf{z}(t)$ と $\mathbf{x}(t)$ の誤差を次式で定義する。

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \quad (5-20)$$

$\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ は**正規分布**した**白色雑音** (white noise) で、以下の式が成り立つとする⁽⁵⁾。

(1) $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ の期待値は零である。 $E[\cdot]$ は**期待値** (後述) を求める演算である。

$$E[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(t)] = \mathbf{0} \quad (5-21)$$

(2) $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ は時間が少しでも違えば**無相関** (uncorrelated) 雑音で、それらの**共分散行列** (後述) が次式で与えられる。

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(\tau)^T] = \mathbf{Q}\delta(t - \tau), \quad E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = \mathbf{R}\delta(t - \tau) \quad (5-22)$$

但し、 $\mathbf{Q}(n \times n)$: 半正定行列, $\mathbf{R}(l \times l)$: 正定行列

(3) $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ は無相関である。

$$E[\mathbf{w}(\tau)\mathbf{v}(t)^T] = \mathbf{0} \quad (5-23)$$

(4) $\mathbf{e}(0) = \mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)$ は、適当な平均値と分散行列をもつ確率ベクトルで、 $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ とは無相関である。

これらの仮定のもとで、時刻 t での 2 乗平均誤差

$$J = E[\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)] \quad (5-24)$$

を最小にするゲイン行列 \mathbf{K} を求める。この \mathbf{K} を用いた(5-19)を**カルマンフィルタ** (Kalman filter) という。とくに、 $t \rightarrow \infty$ となるときに最適となるカルマンフィルタについては、最適ゲイン行列は、一定行列

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (5-25)$$

で与えられる。但し、 $\mathbf{P}(n \times n)$ は**リッカチ方程式** (Riccati equation)

$$\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5-26)$$

を満たす正定の唯一解である。

またこのとき、カルマンフィルタは安定となる。

離散値系のカルマンフィルタ

次に実際の応用が多い差分方程式で記述された線形確率システムについて述べる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-27)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-28)$$

ここで、 $\mathbf{A}_k (n \times n)$, $\mathbf{B}_k (n \times m)$, $\mathbf{C}_k (l \times n)$, $\mathbf{x}_k (n \times 1)$,
 $\mathbf{y}_k (l \times 1)$, $\mathbf{u}_k (m \times 1)$, $\mathbf{w}_k (n \times 1)$, $\mathbf{v}_k (l \times 1)$

\mathbf{w}_k , \mathbf{v}_k は平均が零で共分散行列がそれぞれ \mathbf{Q}_k , \mathbf{R}_k の**正規分布**した**白色雑音** (**正規性白色雑音** (Gaussian white noise)) とする。すなわち、

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \equiv \mathbf{Q}_k \quad , \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \equiv \mathbf{R}_k \quad (5-29)$$

連続系では $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ は定数行列としたが、ここでの $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ は可変でも構わない。

カルマンフィルタでは、以下のアルゴリズムを繰り返して状態推定を行う^{(10),(13),(31)}。 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ を1つ前の**状態推定値**、 \mathbf{P}_{k-1} を1つ前の**共分散推定値**とする。

$$(1) \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (\text{事前状態推定}) \quad (5-30)$$

$$(2) \bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (\text{事前共分散推定}) \quad (5-31)$$

$$(3) \mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (\text{最適カルマンゲイン計算}) \quad (5-32)$$

$$(4) \hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \quad (\text{事後状態推定}) \quad (5-33)$$

$$(5) \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{P}}_k \quad (\text{事後共分散推定}) \quad (5-34)$$

事前状態推定では前のサンプリング時刻の状態推定値から、(5-27)を用い現在のサンプリング時刻の状態推定を行う(もちろん雑音 \mathbf{w}_k は式から除く)。事前共分散推定で $\bar{\mathbf{P}}_k$ を求め、次に**最適カルマンゲイン**(Kalman gain) \mathbf{K}_k を計算する。事後状態推定では、現在の観測値を用いて、事前状態推定値を補正してより正確なものにする。(5-30)と(5-33)が同次元オブザーバの構成に対応している。事後共分散推定は、次回の事前共分散推定に用いる。これらは、カルマンゲインを計算するためにのみ使われる。なお、 $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ は一定と限らず、カルマンゲインはリッカチ方程式を解かなくても逐次求まる点が連続系の場合と異なる。

計算の手順は、初期値 $\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{P}}_0$ を与え、まず $k=0$ とおいて、 $\mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0$ を計算する。次に、 $k=1$ として、上から順番に計算していく。以下繰り返す。

$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ が一定で、 $t \rightarrow \infty$ の場合には、 \mathbf{K}_k は一定値 \mathbf{K} になる。この場合を定常カルマンフィルタという。(5-31), (5-32), (5-34)より $\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}, \mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{P}_k$ などと置いて得られる**離散形リッカチ方程式**(discrete Riccati equation)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P})\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (5-35)$$

を解いて、次式よりカルマンゲイン \mathbf{K} が求まる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (5-36)$$

最適カルマンゲインの導出

カルマンフィルタは、次式に示す平均2乗誤差を最小にする推定値を与えるものである。

$$J(k) = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)] \quad (5-37)$$

いくつかの証明があるが、本稿では、**直交射影の原理**(principle of orthogonal projection)を使ってカルマンゲインを求めよう^{(10),(31)}。導出に当り、まず(5-27)の入力 $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ の場合を考え

る。直交射影の原理より、最適な推定誤差とそれまでの観測値 \mathbf{y}_i は直交し、次式が成立する^{(2),(10)}。[]の中は行列になっていることに注意しよう。

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{y}_i^T] = \mathbf{0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (5-38)$$

(5-37)より次式が成り立つ^{(10),(31)}。(5-29)の $\bar{\mathbf{x}}_k$ は観測値 \mathbf{y}_i の線形結合(linear combination)として求められるので(入力は零と仮定)、このように考えてよいであろう。

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k)^T] = \mathbf{0} \quad (5-39)$$

(5-32), (5-28)を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k - \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (5-40)$$

一方,

$$\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}_k(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{v}_k \quad (5-41)$$

これらを(5-39)に代入する。 \mathbf{v}_k は $\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{x}}_k$ (\mathbf{y}_k は使っていない) と無相関であり、その期待値は $\mathbf{0}$ となるので、次式が得られる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T]\mathbf{C}_k^T - \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{0} \quad (5-42)$$

$$\text{ここで, } E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \equiv \bar{\mathbf{P}}_k \quad (5-43)$$

とおくと

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{0} \quad (5-44)$$

これから、(5-32)が得られる。

次に、共分散行列の関係を求める。

$$\mathbf{P}_k \equiv E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (5-45)$$

と定義すると(5-40)を代入して、 \mathbf{v}_k は $\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{x}}_k$ と無相関より

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]\{(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k\}^T\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]\mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (5-44)\text{適用} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)\bar{\mathbf{P}}_k \end{aligned} \quad (5-46)$$

これで、(5-34)が得られた。

(5-43)の $\bar{\mathbf{P}}_k$ を考える。(5-27), (5-30)を用いると, \mathbf{w}_{k-1} は \mathbf{x}_{k-1} , $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ と無相関より

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}_k &\equiv E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ &= E[(\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1})(\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1})^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1}E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T]\mathbf{A}_{k-1}^T + E[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}\end{aligned}\quad (5-47)$$

これで, (5-31)が得られた。

最後に, $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ の場合を述べておく。(5-27)を以下のように雑音と入力の2つの式に分けて考える⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5-48)$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (5-49)$$

ここで,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{z}_k + \mathbf{s}_k \quad (5-50)$$

出力として, \mathbf{y}_k の代わりに

$$\boldsymbol{\eta}_k \equiv \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k \quad (5-51)$$

を考え, (5-28)を代入すると次式を得る。

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (5-52)$$

(5-48), (5-52)に対してカルマンフィルタを構成する。この結果, カルマンゲインに関する式(5-31), (5-32), (5-34)は, $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ の場合と同じで, 以下の式が異なる。

$$\text{事前状態推定} \quad \bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \quad (5-53)$$

$$\text{事後状態推定} \quad \hat{\mathbf{z}}_k = \bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{K}_k(\boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) \quad (5-54)$$

これを用いて,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &\equiv \hat{\mathbf{z}}_k + \mathbf{s}_k \\ &= \bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{K}_k(\boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) + \mathbf{s}_k \\ &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{s}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{z}}_k) \\ &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\bar{\mathbf{x}}_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &\equiv \mathbf{s}_k + \bar{\mathbf{z}}_k \\ &= \mathbf{s}_k + \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{z}}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}\end{aligned}$$

となり, $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ の場合の(5-30), (5-33)が得られる。



本テキストでは、(5-33)については同一次元オブザーバと同じ構成と述べ、証明をしていないが、(5-33)も直交射影の原理より、線形推定予測器に対して導かれる⁽³¹⁾。

カルマンフィルタには、上述の様に連続時間フィルタと離散時間フィルタがあり、一般にカルマンフィルタと言えは後者を指す。カルマンフィルタは、レーダー、カーナビ、天気予報、経済学など広い分野で応用されている。

期待値, 分散

離散型の確率分布の場合、確率変数 x_i が起こる確率を $p(x_i)$ とすると、**期待値**(expectation value) $E[x]$ は次式で定義される。

$$E[x] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad \text{ここで,} \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \quad (5-55)$$

例えば、サイコロを振って出た目の数値のお金がもらえるとしたら、期待値は

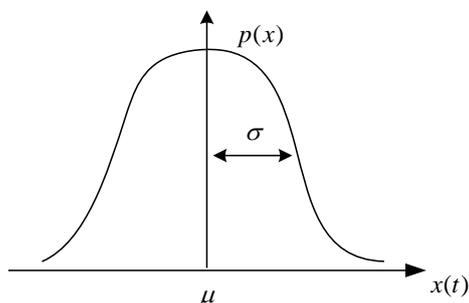
$$E = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5 \quad \text{円}$$

である。期待値は平均値とも呼ばれる。以上のことを頭において、以下の連続的な確率分布を考えよう。

時刻 t での確率変数 $x(t)$ の**期待値**は、確率密度を $p(x)$ として

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \mu \quad \text{ここで,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (5-56)$$

で与えられる。例えば、時刻 t で電圧ノイズの値を $x(t)$ とすると、 $x(t)$ の値はいろいろ考えられて、それぞれが存在する確率密度が $p(x)$ である。つまり $p(x)$ が大きいところの、電圧ノイズが生じる可能性が高い。



また、一般に次式のエルゴート仮定がなされる。これが成立するための必要条件は時間のランダム変数 $x(t)$ の性質が時間と共に変化しない定常ランダム性をもつことである。

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \mu \quad (5-57)$$

(集団平均) (時間平均)

例えば、ある瞬間で考え、電圧ノイズの期待値が $\mu = 0\text{V}$ なら、長い時間で見るとその間の時間平均が 0V になる。以下 $x(t)$ を単に x と記す。

確率分布の特徴を示すために、平均値の他に分散がよく用いられる。まず、 $x - \mu$ の期待値を考えれば、

$$\begin{aligned} E[x - \mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= E[x] - \mu = 0 \end{aligned} \quad (5-58)$$

となるが、 $(x - \mu)^2$ の期待値を考えると、

$$\begin{aligned} E[(x - \mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] \\ &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 \\ &= E[x^2] - \mu^2 \end{aligned} \quad (5-59)$$

となり、必ずしも 0 にならない。これを x の**分散**(variance)と言い、 $V(x)$ で表す。分散はデータの散らばり具合を表わす。 $\sqrt{V(x)}$ を**標準偏差**(standard deviation) σ という。すなわち、

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 \quad (5-60)$$

正規分布(normal distribution) (別名**ガウス分布**(Gaussian distribution)) の場合には、 $\mu \pm \sigma$ の中に全体の約 $2/3$ 、 $\mu \pm 2\sigma$ の中に全体の約 $19/20$ が入る。

確率変数 x, y の関数 $f(x, y)$ も確率変数で、その期待値は、次式で与えられる。

$$E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy \quad (5-61)$$

$$\text{ここで、} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$p(x, y)$ は 2 次元同時確率密度関数と呼ばれる。 x, y の値によって確率密度が異なる。 $p(x, y) dx dy$ が $x \sim x + dx$ 、 $y \sim y + dy$ の面にある確率である。その重みが $f(x, y)$ でそれを全空間で集めると期待値となる。

期待値は線形演算である。すなわち、 a, b を実数として

$$\begin{aligned} E[af(x, y) + bg(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x, y) + bg(x, y)) p(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy \\ &= a E[f(x, y)] + b E[g(x, y)] \end{aligned}$$

特に、 $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ のとき、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E[ax + by] &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy \\ &= a E[x] + b E[y] \end{aligned} \tag{5-62}$$

ここで、

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy, \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

は**周辺確率分布**と呼ばれている⁽³⁶⁾。

(5-62)に関しては、例えば、離散型の場合であるが、2つのサイコロを振って出た目の数値 x, y の和だけお金がもらえるとしたら、期待値は

$$E(x + y) = E(x) + E(y) = 3.5 + 3.5 = 7 \text{ 円}$$

としてよい。定義から直接求めると、 Σ 目の和 \times 確率より

$$\begin{aligned} E(x + y) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ &\quad + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7 \text{ 円} \end{aligned}$$

となり、上記の結果と一致する。

n 次元ベクトルの**期待値**は、各成分の期待値として以下のように定義される。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t)] &= [E[x_1(t)], \dots, E[x_n(t)]]^T \\ &= [\mu_1, \dots, \mu_n]^T \end{aligned} \tag{5-63}$$

また、**共分散行列**(covariance matrix)は、一般的に違う時間 t, τ を考えて

$$\begin{aligned} &E[(\mathbf{x}(t) - E[\mathbf{x}(t)])(\mathbf{x}(\tau) - E[\mathbf{x}(\tau)])^T] \\ &\equiv \begin{bmatrix} E[(x_1(t) - \mu_1)(x_1(\tau) - \mu_1)] & \cdots & E[(x_1(t) - \mu_1)(x_n(\tau) - \mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_n(t) - \mu_n)(x_1(\tau) - \mu_1)] & \cdots & E[(x_n(t) - \mu_n)(x_n(\tau) - \mu_n)] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-64}$$

で定義される。(5-22)は、上式で期待値 $\mu_i = 0$ の場合に相当する。

第6章 H_∞ 制御

制御器は、制御対象の数学モデル（伝達関数や状態方程式）をもとに設計される。しかし、数学モデルはなんらかの近似を行って得られ、実際の制御対象に対してモデル化誤差を持つ。モデル化誤差に対する安定性をロバスト安定性という。**ロバスト**(robust)とは、“強健な”、“がっしりした”の意味がある。本章では、ロバスト制御の代表的設計法である H_∞ (エッチ無限大)制御について述べる。 H_∞ 制御では、ロバスト安定性のみならず制御本来の目的である目標値追従性や外乱除去特性を同時に達成する。 H_∞ ノルムを設計の評価に用い、それが最小になるように制御器を設計する。得られる制御器は、オブザーバ（最悪外乱考慮）+最適制御を一般化したものと解釈できる。

6.1 H_∞ ノルムとは

H_∞ 制御器は、フィードバック制御によって、適当な入力から適当な出力までの閉ループ伝達関数 $G(s)$ の大きさがある値以下にする制御である。適当な入力とは、指令値、外乱、観測ノイズを指す。 H_∞ 制御については、1989年に Doyle, Glover, Khargonekar, Francis が発表した論文が有名で、これにより 2 つのリッカチ方程式を解いて解が得られるようになった⁽¹⁵⁾。 H_∞ の H には Hardy 空間の意味がある。 $G(s)$ がスカラーの場合には、 H_∞ ノルムは絶対値の上限 sup として次式で定義されるが、厳密さを求めなければ**最大値**と考えて良い。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G(j\omega)| \tag{6-1}$$

これは、周波数特性のゲインの最大値であり、ボード線図、ナイキスト線図では、図の値である。例えば、閉ループ伝達関数が 2 次系の場合、 H_∞ ノルム (M ピークゲイン(maximum value of M)と等しい) が大きいと共振現象によってステップ応答が振動的になり好ましくない。よって H_∞ ノルムがある値以下になるように設計しないとイケない。

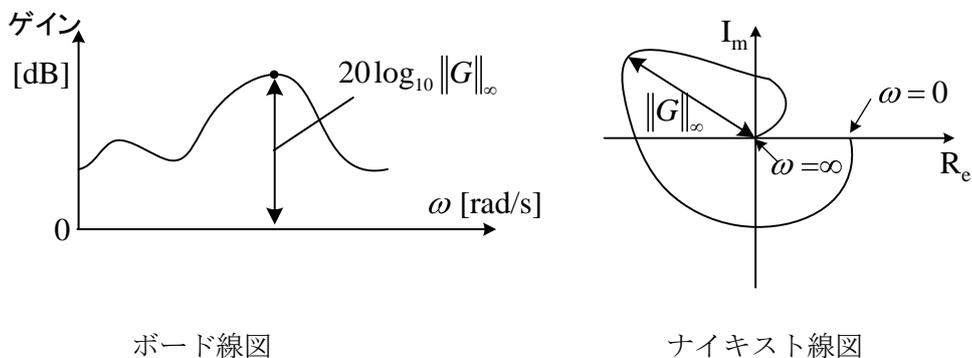


図 6-1 H_∞ ノルムの意味 (1 入力 1 出力の閉ループ伝達関数 $G(s)$ の場合)

多入力多出力で、閉ループ伝達関数が行列となる場合 ($\mathbf{G}(s)$ と書く : 図 6-2 参照), H_∞ ノルムは、次式で定義される。(上限 \sup は最大値と考えよ)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(s)\|_\infty &= \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} \left\{ \lambda_{\max}[\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} \sigma_{\max}[\mathbf{G}(j\omega)] \end{aligned} \quad (6-2)$$



要素の j を $-j$ で置き換えてから転置した行列 $\mathbf{G}^T(-j\omega) \equiv \mathbf{G}^*(j\omega)$ は共役転置行列と呼ばれる。 λ_{\max} は $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の最大固有値であり、 σ_{\max} は $\sqrt{\lambda_{\max}}$ で $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値 (maximum singular value) と呼ばれている。一般に $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の固有値は非負の実数である。すなわち

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \sigma_1^2)(\lambda - \sigma_2^2) \dots (\lambda - \sigma_n^2)$$

$\sigma_i^2 \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) が $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ の固有値 λ である。これより、特異値 $\sigma_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) が求まる。 σ_{\max} は、 ω の関数で、その最大値が H_∞ ノルムである。

少し説明すると、 $(\mathbf{G}^*\mathbf{G})^* = \mathbf{G}^*\mathbf{G}$ より $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ はエルミート行列であり、 $\mathbf{x}^*\mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{x} = (\mathbf{G}\mathbf{x})^*\mathbf{G}\mathbf{x} \geq 0$ (複素数とその共役との積は絶対値の 2 乗) であるから、 $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ は準正定行列となる。このとき、 $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ の固有値は非負の実数となるのである。

図 6-2 に 2 入力, 2 出力の場合の閉ループ伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ を示す。

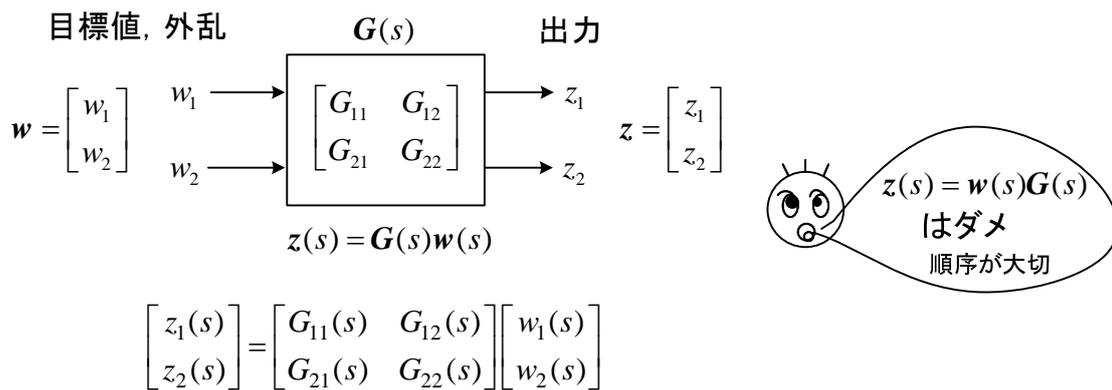


図 6-2 2 入力, 2 出力の場合の $\mathbf{G}(s)$

$G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ の極 (共通) が左半平面にあるとき安定な伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ という。

2 入力 2 出力の場合に限らず、安定な伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ に対し、入力ベクトル $\mathbf{w}(t)$ と出力ベクトル $\mathbf{z}(t)$ に対し、 $\mathbf{G}(s)$ の H_∞ ノルムは、

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_w \frac{\left\{ \int_0^{\infty} z^T(t) z(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \int_0^{\infty} w^T(t) w(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (6-3)$$

と一致することが知られている⁽²²⁾。いろいろの入力(目標値や外乱) $w(t)$ を加えたときに、出力 $z(t)$ が非常に大きくなるのは問題である。入出力の大きさの比(これが伝達関数)の最大値(最悪値)が H_{∞} ノルムに一致するので、 H_{∞} ノルムがある値以下になるように制御器を設計すればよいのである。

エルミート行列

$A^* = A$ のとき、 A をエルミート行列(Hermitian matrix) (成分が実数なら対称行列である) といい、H 行列と書く。 $*$ は共役転置行列を意味する。

性質 1. $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^* = A$

性質 2. H 行列の固有値は全て実数である。

(証明) $x^* A x = x^* \lambda x = \lambda x^* x$

$$x^* A x = x^* A^* x = (Ax)^* x = \lambda^* x^* x$$

従って、 $\lambda = \lambda^*$

性質 3. A を H 行列とすると、エルミート形式(H 形式) $x^* A x$ は常に実数となるが、 $x \neq 0$ なる任意の x 対して $x^* A x > 0$ (≥ 0) を満たすとき正定(\geq は準正定) といひ、 $A > 0$ ($A \geq 0$) と書く。なお、 x は一般に複素数の成分を持つベクトルである。正定の必要十分条件は次のいずれか一つがなりたつことである。

(1) A の固有値が全て正である。

$$(2) A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \\ & \cdot & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{とおくとき } |A_k| > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \text{が成り立つ。}$$

準正定の場合は、 A の固有値が非負、 $|A_k| \geq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) である。

例題 6-1 H 行列 $A = \begin{bmatrix} a & j & 0 \\ -j & 2a & -j \\ 0 & j & a \end{bmatrix}$ が正定であるための条件を求めよ。 a は実数とする。

$$|A_1| = a > 0, |A_2| = \begin{vmatrix} a & j \\ -j & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 1 > 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & j & 0 \\ -j & 2a & -j \\ 0 & j & a \end{vmatrix} = 2a^3 - 2a > 0 \quad \therefore a > 1$$

固有値を計算して以下のように求めることもできる。

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -j & 0 \\ j & \lambda - 2a & j \\ 0 & -j & \lambda - a \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore (\lambda - a)(\lambda^2 - 3a\lambda + 2a^2 - 2) = 0$$

$$\lambda = a, \lambda = \frac{3a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2} \quad \text{固有値が全て正である条件より}$$

$$a > 0, 3a - \sqrt{a^2 + 8} > 0 \quad \text{よって, } a > 1$$

6.2 混合感度問題

制御系を設計する場合、どんな性能に着目すればよいのであろうか？以下に示すように、いろいろなことが考えられる。

- (1) システムが安定でありオーバーシュートやアンダシュートが小さいこと（安定性, 減衰性）。
制御対象が変動しても安定性が影響されないこと（ロバスト安定性: robust stability）。
- (2) 目標値に素早く達すること（速応性 speed of response）。
- (3) 定常偏差(steady-state error)がないこと。
- (4) 外乱の影響を受けないこと（外乱抑圧特性）。
- (5) ノイズの影響を受けないこと（雑音除去特性）。
- (6) 制御対象の操作量(入力)が^{ひんぱん}頻りに制限値(リミッタ)にかからないこと。

速応性、定常偏差は目標値追従特性とよばれることもある。(1)~(6)には、同時に満足することができないものも含まれている。大雑把に言って、制御器のゲインを大きくすると、(2) (3) (4) は満足されるが、逆に(1) (5) (6) は満たされなくなる。もちろん、不安定な制御対象で制御器のゲインを大きくして安定化することもあり、あくまでも“一応”である。

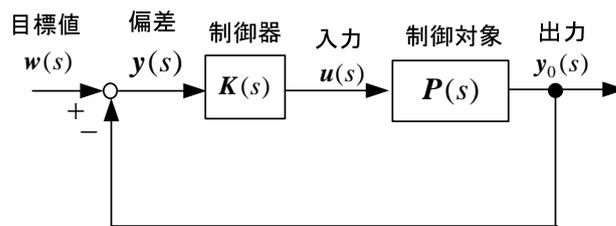


図 6-3 フィードバック制御系の構成

見慣れたフィードバック制御系の構成を図 6-3 に示す。目的は上記の各種条件を満足する制御器 $\mathbf{K}(s)$ (多入力多出力の場合は行列) の設計である。 H_∞ 制御でも目的は同じであるが、独特のブロック線図の書き方をする。図 6-4 は H_∞ 制御で扱う一般化プラント (generalized plant) $\mathbf{G}_0(s)$ と制御器 $\mathbf{K}(s)$ の構成例である。

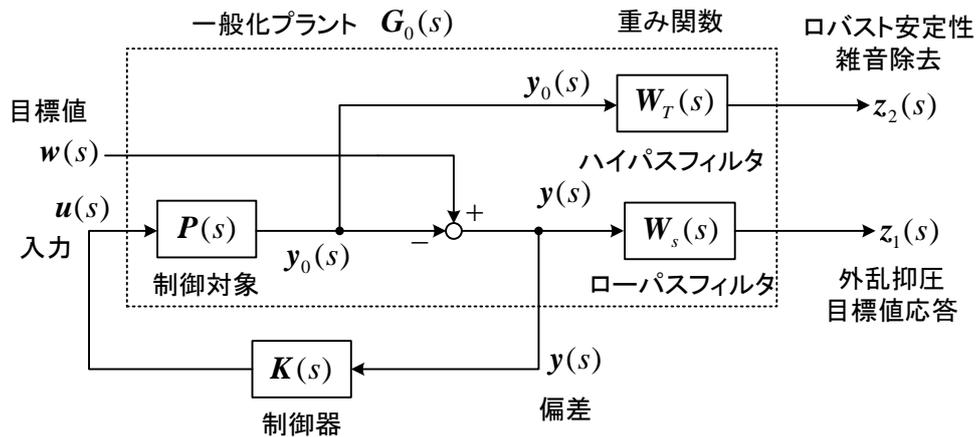


図 6-4 一般化プラント $\mathbf{G}_0(s)$ と制御器 $\mathbf{K}(s)$ の構成例 I

図 6-3 と同じように、 $\mathbf{w}(s)$ を目標値、 $\mathbf{y}(s)$ を偏差とする。 $\mathbf{P}(s)$ は制御対象の伝達関数、 $\mathbf{y}_0(s)$ は制御対象の出力である。 $\mathbf{W}_T(s), \mathbf{W}_s(s)$ は、 $\mathbf{K}(s)$ を設計するための重み関数 (weighting function) で、後で詳しく述べる。図 6-4 の小文字はベクトル、大文字は行列を意味する。これらは全てスカラの場合が多いであろうが、その場合も含め一般的に説明する。

まず、図 6-4 のシステムについて成立する関係式を導出する。ベクトルや行列は、以下の演算が行える適当なサイズとする。特に、積の順序には注意すること。

$$\mathbf{y}_0(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s) \quad (6-4)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{w}(s) - \mathbf{y}_0(s) \quad (6-5)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}(s) \quad (6-6)$$

$$\mathbf{z}_1(s) = \mathbf{W}_s(s)\mathbf{y}(s) \quad (6-7)$$

$$\mathbf{z}_2(s) = \mathbf{W}_T(s)\mathbf{y}_0(s) \quad (6-8)$$

(6-4)~(6-6)より

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)(\mathbf{w}(s) - \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s)) \quad \therefore \quad \mathbf{u}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{P}(s))^{-1} \mathbf{K}(s)\mathbf{w}(s) \quad (6-9)$$

これを(6-7), (6-8)へ代入して,

$$\mathbf{z}_1(s) = \mathbf{W}_s(s)\mathbf{w}(s) - \mathbf{W}_s(s)\mathbf{y}_0(s) = \mathbf{W}_s(s)(\mathbf{I} - \mathbf{T}(s))\mathbf{w}(s) \quad (6-10)$$

$$\mathbf{z}_2(s) = \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\mathbf{w}(s) \quad (6-11)$$

但し、 $T(s) = P(s)(I + K(s)P(s))^{-1}K(s)$

$(I + AB)A = A(I + BA)$ より、 $A(I + BA)^{-1} = (I + AB)^{-1}A$ であるから

$$T(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) \quad (6-12)$$

従って、(6-12) を用いて計算すると、 $I = (I + P(s)K(s))^{-1}(I + P(s)K(s))$ より

$$\begin{aligned} I - T(s) &= (I + P(s)K(s))^{-1}(I + P(s)K(s)) - (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) \\ &= (I + P(s)K(s))^{-1} \end{aligned} \quad (6-13)$$

が得られる。

$$S(s) \equiv (I + P(s)K(s))^{-1} \quad (6-14)$$

は、**感度関数**(sensitivity function)と呼ばれる。それに対し、 $T(s)$ は**相補感度関数**(complementary sensitivity function)と呼ばれ、(6-13)より

$$S(s) + T(s) = I \quad (6-15)$$

の関係がある。(6-10), (6-11)より、

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_s(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{bmatrix} w(s), \quad \begin{bmatrix} y(s) \\ y_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) \\ T(s) \end{bmatrix} w(s) \quad (6-16)$$

が成り立つ。

感度関数 $S(s)$ は、偏差 $y(s)$ に関係することから、制御対象や入力部に加わる外乱の抑圧や目標値応答を良くするために小さくないといけない (“大きい” や “小さい” は曖昧な言い方であるが、スカラの場合は絶対値に対し、行列なら H_∞ ノルムに対して言う)。大雑把に言えば、(6-14)より制御器 $K(s)$ のゲインを大きく選ぶ (制御を強くかける) と $S(s)$ を小さくできる。一方、 $T(s)$ はロバスト安定性を確保するため、あるいは雑音の影響を受けにくくするため小さくする必要がある。これについては、以下に詳しく述べる。

ロバスト安定性

$P(s)$ の**乗法変動**を考え、

$$\tilde{P}(s) = (I + \Delta(s))P(s) \quad (6-17)$$

とする。これは、実際の制御対象の伝達関数 $\tilde{P}(s)$ が、制御器の設計に用いる **ノミナルモデル** (nominal model) (定格モデル) の $P(s)$ に比べ、伝達関数 $\Delta(s)$ の分だけ変動があるということの意味する。制御対象の伝達関数をモデリングする際に、影響が小さいとして近似した項や一定と考えたパラメータが使用条件の変化で $P(s)$ と違ってくることが考えられるからである。変動部分に着目して、図 6-5 のブロック線図を得る。

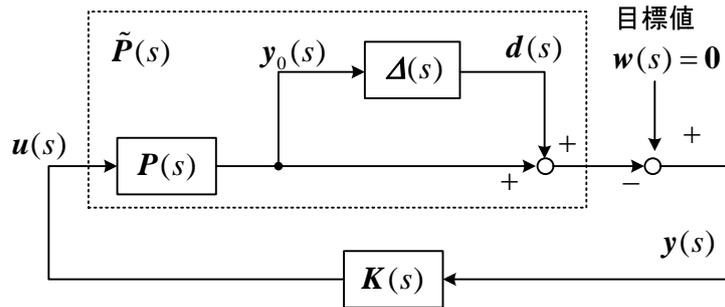


図 6-5 $P(s)$ の乗法変動を考えたときのブロック線図

目標値 $w(s) = \mathbf{0}$ として (線形システムでは目標値は安定性に関係ない), d から y_0 までの伝達関数を求める。

$$y_0 = -P(s)K(s)(d + y_0) \quad \text{より}$$

$$\therefore y_0 = -(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) d$$

従って、 $\Delta(s)$ を含む **一巡伝達関数** (loop transfer function) $G_l(s)$ は、

$$G_l(s) = -\Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) \quad (6-18)$$

となる。ナイキストの安定条件より考え、安定の十分条件は、 H_∞ ノルムを用いて

$$\left\| \Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) \right\|_\infty < 1 \quad \because \|G\|_\infty = \|-G\|_\infty \quad (6-19)$$

である⁽²²⁾。これは、**スモールゲインの定理** (small gain theorem) として知られている。

(6-19)は、相補感度関数 $T(s)$ を用いて、

$$\left\| \Delta(s)T(s) \right\|_\infty < 1 \quad (6-20)$$

と書ける。すなわち、 $T(s)$ を小さくすることでロバスト安定化が可能となることが判った。(6-12) より大雑把に言って、制御器 $K(s)$ のゲインを小さく選ぶ (制御を強くかけない) と、ロバスト安定性が向上する。なお、観測雑音が制御対象の出力に及ぼす影響も制御器のゲイン $K(s)$ が小さい方が良い。ゲインが大きくと制御が強すぎると、制御対象の思わぬ変化や

雑音の影響を強く受けるというイメージである。

次に、図 6-5 を基にした図 6-6 を考える。

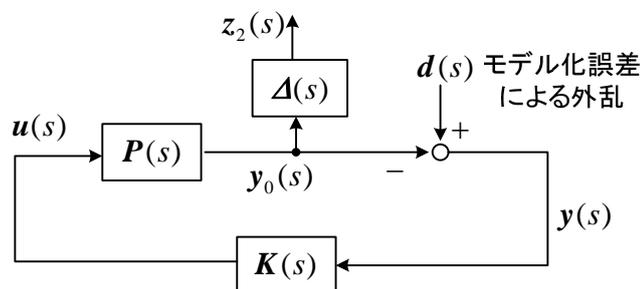


図 6-6 ロバスト安定性を評価するブロック線図

図 6-6 では図 6-5 の目標値 $w(s) = \mathbf{0}$ とし、 $d(s)$ をモデル化誤差による外乱と考えている。 $d(s)$ と $z_2(s)$ の伝達関数を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} z_2(s) &= \Delta(s)(I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s) d(s) \\ &= \Delta(s)T(s)d(s) \end{aligned} \tag{6-21}$$

よって、(6-20)のロバスト安定性は、 $d(s)$ と $z_2(s)$ の伝達関数を使って評価すればよいことが判る。後述するが、図 6-4 では、 $d(s)$ の代わりに目標値 $w(s)$ で代用している。すなわち、 $z_2(s)$ に対しては $w(s)$ を外乱と考えよう。

混合感度問題の考え方

結局、外乱抑圧や目標値応答を良くするため感度関数 $S(s)$ を小さく、ロバスト安定性の向上や雑音の影響を低減するためには相補感度関数 $T(s)$ を小さくする必要があることが判った。しかし、(6-15)が成立するので、同じ周波数帯域で同時に $S(s)$ 、 $T(s)$ を共に小さくすることには限界がある。そこで、外乱抑圧や目標値応答を良くするため、低周波領域で $S(s)$ を小さくする。これは急速に変化する目標値（高周波信号）に追従させるよりも、まずゆっくりした目標値の変化（低周波信号）に追従しないことには話にならないからである。一方、制御対象の不確かさ（一般に低周波の分は $P(s)$ にモデル化されるであろうから高周波領域で現れる）に起因する安定性の低下を防ぐため、すなわち、ロバスト安定性の点や雑音の影響を低減するため高周波領域で $T(s)$ を小さくする。このように、周波数領域で分けることにより両立を図る。このような考え方は、古典制御理論でボード線図を用いた制御系設計でも使われている⁽³³⁾。つまり、低周波領域では一巡伝達関数のゲインを大きく、高周波領域ではゲインを小さくする方法である。ただ、 H_∞ 制御では閉ループ伝達関数を考えるので、古典制御理論のように位相は考えなくてもよい。

H_∞ 制御では、 w と z の閉ループ伝達関数行列で H_∞ ノルムをできるだけ小さくし、かつ

安定になるような制御器 $\mathbf{K}(s)$ を設計する。つまり (6-16)で、なるべく小さい定数 γ に対し

$$\|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (6-22)$$

を満たす $\mathbf{K}(s)$ を求める。これを**混合感度問題**(mixed sensitivity problem)という。 $\mathbf{S}(s), \mathbf{T}(s)$ を直接小さくするのではなく、 $\mathbf{W}_s(s), \mathbf{W}_T(s)$ の重み関数を掛けた上で小さくする。

まず、(6-22)のようにまとめて最小化して問題ないか、以下に説明しよう。行列の最大特異値はその部分行列の最大特異値より大きいという定理があるから、(6-22)の H_{∞} ノルムについて、一般に次式が成り立つ。

$$\max(\|\mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s)\|_{\infty}, \|\mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\|_{\infty}) \leq \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s) \\ \mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad \max(1, 2) = 2 \quad (6-23)$$

よって、(6-22)のようにまとめて最小化すれば、それぞれがそれ以下になる。ただし、(6-22)のようにまとめると、保守的な (安全サイドの)評価になることがある。つまり、別々にもっと小さくできる可能性はある (まとめたことであまり小さくできない)。しかし、

$$\|\mathbf{W}_s(s)\mathbf{S}(s)\|_{\infty} < \gamma_1, \|\mathbf{W}_T(s)\mathbf{T}(s)\|_{\infty} < \gamma_2 \quad (6-24)$$

と、別々に設計することは(6-15)の関係があるから困難である。

最後に、重要な $\mathbf{W}_s(s)$ と $\mathbf{W}_T(s)$ の選び方の指針を説明する。低周波帯域で $\mathbf{W}_s(s)$ が大きくなるようにローパスフィルタに選ぶと、低周波帯域で $\mathbf{S}(s)$ を小さくできる。これは、(6-22)を満たす様に $\mathbf{K}(s)$ を決めるので、重み $\mathbf{W}_s(s)$ が大きい低周波帯域では、 $\mathbf{S}(s)$ が小さくならざるを得ず、逆に高周波領域では重み $\mathbf{W}_s(s)$ が小さいので、大きな $\mathbf{S}(s)$ でも条件を満足できるからである。一方、 $\mathbf{W}_T(s)$ はハイパスフィルタに選ぶと、高周波帯域で $\mathbf{W}_T(s)$ が大きく、その帯域で $\mathbf{T}(s)$ を小さくできる。低周波領域では制御対象を正しくモデル化するであろうから、低周波領域の $\mathbf{\Delta}(s) \approx \mathbf{0}$ と考えてよく、 $\mathbf{W}_T(s)$ は $\mathbf{\Delta}(s)$ に対応させて選ぶことが考えられる。

図 6-4 では、 $\mathbf{W}_T(s)$ は $\mathbf{\Delta}(s)$ に対応し、モデル化誤差による外乱 $\mathbf{d}(s)$ を目標値 $\mathbf{w}(s)$ で代用している。要は(6-22)の条件を満足するように $\mathbf{K}(s)$ を設計すればよいので、 $\mathbf{G}_{zw}(s)$ が導けるなら目標値 $\mathbf{w}(s)$ が代用できるのである。

ところで、一般化プラントは自由に構成してよい。図 6-7 もその例である。詳細は述べないが、 $\mathbf{w}_1(s)$ に対する $\mathbf{z}_2(s)$ の伝達関数を考えることにより、次式に示す制御対象の**加法変動**に対するロバスト安定性が評価できる⁽²²⁾。

$$\tilde{\mathbf{P}}(s) = \mathbf{P}(s) + \mathbf{\Delta}(s) \quad (6-25)$$

また、図に示すように制御対象に入る外乱 $\mathbf{w}_2(s)$ に対し、 $\mathbf{z}_1(s), \mathbf{z}_2(s)$ をそれぞれ評価することもできる。後述するが、最終的に一般化プラントを状態方程式に記述できればよい。

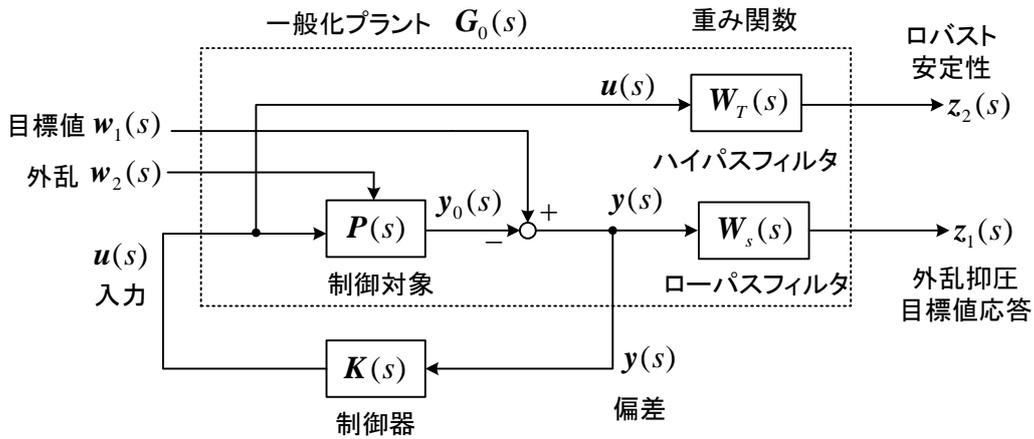


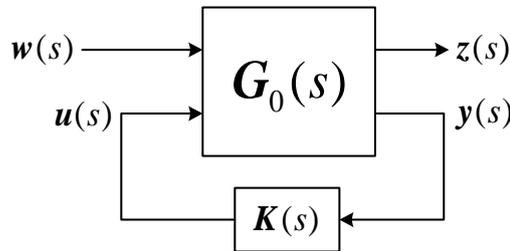
図 6-7 一般化プラント $G_0(s)$ と制御器 $K(s)$ の構成例 II

6.3 H_∞ 制御問題とその解

H_∞ 制御問題は、外部入力（目標値，外乱，観測ノイズ） $w(s)$ と制御量 $z(s)$ との間の閉ループ伝達関数行列 $G_{zw}(s)$ に対して，

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \quad (6-26)$$

とし，かつ図の制御系を安定にする制御器 $K(s)$ を求めることである。



$G_0(s)$: 一般化プラント， $K(s)$: H_∞ 補償器

図 6-8 H_∞ 制御問題

一般化プラント $G_0(s)$ は次式で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = G_0(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

このとき，図の閉ループ伝達関数行列 $G_{zw}(s)$ は次式で求められる。

$$G_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (6-28)$$

H_∞ 制御問題を解くためには、一般化プラント $G_0(s)$ を状態方程式で表現する必要がある。
これを、次式で表わす。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (6-29a)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (6-29b)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (6-29c)$$

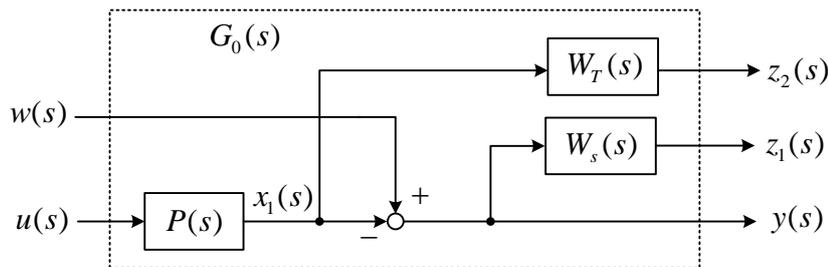
ここで、各変数ベクトルの次元は以下の通りとする。

$$\mathbf{x} : n \text{ 次元}, \quad \mathbf{w} : n_w \text{ 次元}, \quad \mathbf{u} : n_u \text{ 次元}$$

$$\mathbf{z} : n_z \text{ 次元} \quad \mathbf{y} : n_y \text{ 次元}$$

\mathbf{x} の変数には、実際の制御対象の変数だけではなく、重み関数の変数も含まれていることに注意しよう。

例題 6-2 図の一般化プラントについて、状態方程式を求めよ。



$$\text{ただし, } P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad W_s(s) = \frac{10}{s + 5}, \quad W_T(s) = \frac{(s + 10)^2}{500}$$

ローパスフィルタ ハイパスフィルタ

(解) $P(s)$ の出力を $x_1(s)$ とすると、

$$(s^2 + s + 1)x_1(s) = u(s) \quad \text{①}$$

$sx_1(s) = x_2(s)$ とおいて、次の状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{②}$$

* 3章の可制御正準系が利用できる。

$W_s(s)$ については、

$$\frac{10}{s + 5} = \frac{z_1(s)}{y(s)} \quad \therefore 10y = (s + 5)z_1$$

であるから、

$$\dot{z}_1 = -5z_1 + 10(w - x_1) \quad \text{③}$$

$W_T(s)$ については,

$$\frac{(s+10)^2}{500} = \frac{z_2(s)}{x_1(s)}$$

$$\therefore (s^2 + 20s + 100)x_1 = 500z_2$$

①および $sx_1(s) = x_2(s)$ を利用して,

$$z_2 = \frac{99}{500}x_1 + \frac{19}{500}x_2 + \frac{1}{500}u \quad \text{④}$$

図より, y については

$$y = w - x_1 \quad \text{⑤}$$

②~⑤より,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{A} \qquad \mathbf{B}_1 \qquad \mathbf{B}_2$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 99/500 & 19/500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/500 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{D}_{11} \qquad \mathbf{D}_{12}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_2 \qquad \mathbf{D}_{21} \qquad \mathbf{D}_{22}$

H_∞ 制御問題は, Doyle らにより解かれた。以下に結果のみを示す。以下の仮定を設ける^{(18),(19)}。



(1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$: 可安定

(2) $\text{rank } \mathbf{D}_{12} = n_u$ (縦長の列フルランク) $\mathbf{D}_{12}(n_z \times n_u) : n_z \geq n_u$

(3) $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} = n + n_u$ (列フルランク) ω : 任意(0 含む)

(4) $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$: 可検出

(5) $\text{rank } \mathbf{D}_{21} = n_y$ (横長の行フルランク) $\mathbf{D}_{21}(n_y \times n_w) : n_w \geq n_y$

$$(6) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + n_y \quad (\text{行フルランク}) \quad \omega : \text{任意 (0 含む)}$$

$$(7) \quad D_{11} = \mathbf{0}, \quad D_{22} = \mathbf{0}$$

これらの仮定で、(1), (4)は制御系の安定化に必要なものである。(2),(3),(5),(6)については、粗く言えば実際の制御対象や重み関数行列の極や零点が虚軸上（原点を含む）に存在しなければ成立する^{(19),(29)}。(7)の仮定がないと、解は複雑となる。可安定、可検出はそれぞれ可制御、可観測の条件を弱めたものである。不可制御な部分システムが安定であれば、制御入力によって安定化しなくてもよいので**可安定(stabilizable)**と言える。また、不可観測な部分システムが安定であるならば、その出力からの情報がなくても制御できるため**可検出(detectable)**と言う。

まず、一般化制御対象について、以下の2つの**リッカチ方程式**を解く⁽²⁸⁾。

$$XA + A^T X + \frac{1}{\gamma^2} XB_1 B_1^T X - (C_1^T D_{12} + XB_2)(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X) + C_1^T C_1 = \mathbf{0} \quad (6-30)$$

$$YA^T + AY + \frac{1}{\gamma^2} YC_1^T C_1 Y - (B_1 D_{21}^T + YC_2^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1} (D_{21} B_1^T + C_2 Y) + B_1 B_1^T = \mathbf{0} \quad (6-31)$$

この解の中から、次の条件を満たすものを選択する。

$$(1) \quad X = X^T \geq 0 \quad (\text{準正定})$$

$$(2) \quad Y = Y^T \geq 0 \quad (\text{準正定})$$

$$(3) \quad \rho(XY) < \gamma^2 \quad \text{ここで, } \rho(A) = \max |\lambda_i(A)| : \text{固有値(絶対値)の最大値}$$

X , Y が求まると、 H_∞ 補償器は次の様に構成される。ここでは、一般に用いられている**中心解(central solution)**と呼ばれるものを示す。

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} y \quad (6-32)$$

$$u = F \hat{x} \quad (6-33)$$

ただし、

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + ZL_y (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) \quad (6-34)$$

$$\hat{B} = -ZL_y \quad (6-35)$$

$$F = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X) \quad (6-36)$$

$$L_y = -(B_1 D_{21}^T + Y C_2^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \quad (6-37)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \quad (6-38)$$

(6-28),(6-29)を用いて、(6-27)は次式の様に書くこともできる。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \{A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L_y (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X)\} \hat{x} - Z L_y y \\ &= A \hat{x} + B_1 w_0 + B_2 u + Z L_y (\hat{y} - y) \end{aligned} \quad (6-39)$$

$$\hat{y} = C_2 \hat{x} + D_{21} w_0 \quad (6-40)$$

$$\text{但し, } w_0 = \gamma^{-2} B_1^T X \hat{x}$$

これらの式は、(6-29)と比べると、 w の最悪外乱 w_0 を推定し、オブザーバを構成したものと解釈できる。 $Z L_y$ はオブザーバゲイン、 F がレギュレータゲインになっている。カルマンフィルタを用いたオブザーバを利用して、最適レギュレータを構成するとき、二つのリッカチ方程式を解くことになる。これはLQG (Linear Quadratic Gaussian)制御と呼ばれている。 H_∞ 制御も評価は異なるが、同様に二つのリッカチ方程式を解いている。しかし、LQG制御では、二つのリッカチ方程式は独立で、制御と観測の分離がなされているが、 H_∞ 制御では、分離されておらず、その点設計は難しくなる。 $\gamma \rightarrow \infty$ とすると、 H_∞ 制御はLQG制御に一致する。つまり、 H_∞ 制御はLQG制御を含むことが知られている⁽²⁰⁾⁽²³⁾。

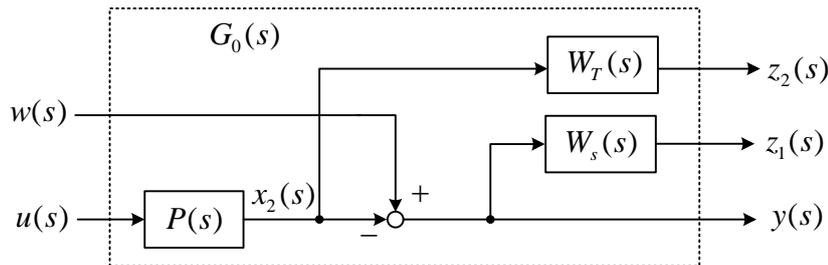
(6-32)、(6-33)より、 H_∞ 制御器の伝達関数行列 $K(s)$ は、

$$K(s) = F(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (6-41)$$

である。 $K(s)$ の分母の次数は一般化プラント A の次元と等しくなり、決して小さくはない。そこで、伝達関数のボード線図がほぼ等しくなるように低次元化することも行われる。

実際の設計では、MATLABなどの商用ソフトウェアパッケージが利用できる。制御器の状態空間表示が求まると、最終的に双一次変換などで離散化して制御用コンピュータで実現することになる。

例題 6-3 図の一般化プラントについて、状態方程式を求めよ。



ただし, $P(s) = \frac{2s}{s^2+1}$, $W_s(s) = \frac{10}{s+5}$, $W_T(s) = s+20$

また, H_∞ 制御問題の仮定(2),(3)が成り立つか調べよ。

(解) 制御対象より

$$s^2 x_2(s) + x_2(s) = 2s u(s) \quad \therefore s x_2(s) + \frac{x_2(s)}{s} = 2u(s) \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{x_2(s)}{s} \equiv x_1(s) \quad \textcircled{2}$$

とおき, 時間関数にラプラス逆変換して, 状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad \textcircled{3}$$

$W_s(s)$ については,

$$\frac{10}{s+5} = \frac{z_1(s)}{y(s)} \quad \therefore 10y = (s+5)z_1$$

であるから, 時間領域では

$$\dot{z}_1 = -5z_1 + 10(w - x_2) \quad \textcircled{4}$$

$W_T(s)$ については,

$$s+20 = \frac{z_2(s)}{x_2(s)}$$

$$\therefore z_2(s) = s x_2(s) + 20x_2(s)$$

①, ②を用い, 時間領域では,

$$z_2 = -x_1 + 20x_2 + 2u \quad \textcircled{5}$$

図より, y については

$$y = w - x_2 \quad \textcircled{6}$$

③~⑥より,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{A} \qquad \mathbf{B}_1 \qquad \mathbf{B}_2$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$\mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{D}_{11} \qquad \mathbf{D}_{12}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

C_2 D_{21} D_{22}

仮定(2)については, $\text{rank } D_{12} = n_u = 1$ を満足する。

仮定(3)については,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} -5 - j\omega & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3 \quad (\omega = 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

よって, 仮定を満足しない。行列によっては $\omega \neq 0$ でランクが下がることもある。

◎ 行列の基本変形

- (1) 行または列の順序を変える。
- (2) 行または列に 0 でない数を掛ける。
- (3) ある行または列にある数を掛けてそれぞれ他の行または列に加える。

- ◎ 行列の**階数**(rank)は, 一次独立な行ベクトルの数(=一次独立な列ベクトルの数)である。
行列の基本変形を行っても行列の階数は変わらない。

6.4 ロバストサーボ系

$K(s)$ に積分器が含まれないとステップ指令に対し定常偏差を 0 にできないが, 中心解は積分器を含むとは限らない。そこでロバストサーボ系とするための工夫がいくつか提案されている^{(18),(19)}。本稿では, 図 6-9 の重み関数による方法を紹介する。

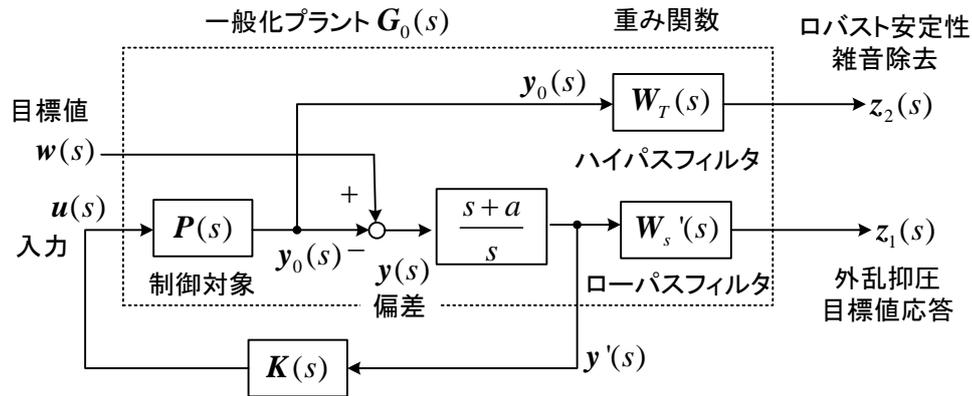


図 6-9 サーボ系の構成法

この方法は、偏差の後に、積分器を持つ $\frac{s+a}{s}$ (a は正の定数) のブロックを挿入する。そして、 $W_s'(s)$ で $s+a$ を打ち消すようにする。例えば

$$W_s'(s) = \frac{k}{s+a} \mathbf{I} \quad (6-42)$$

と選ぶ。このようにした一般化プラントについて、 H_∞ 制御問題を解いて $\mathbf{K}(s)$ を求めれば、偏差に対する実際の制御器 $\mathbf{K}'(s)$ は、次式のように得られる。

$$\mathbf{K}'(s) = \frac{s+a}{s} \mathbf{K}(s) \quad (6-43)$$

この結果、制御器に積分器が含まれることになり、サーボ系が構成できる。

$w(s)$ と $z_1(s)$ の間の伝達関数行列を求めてみよう。(6-43)を用いて

$$z_1(s) = \frac{s+a}{s} W_s'(s) (\mathbf{I} + P(s) \mathbf{K}'(s))^{-1} w(s) \quad (6-44)$$

よって、実質的な重み関数は

$$W_s(s) = \frac{s+a}{s} W_s'(s) = \frac{k}{s} \mathbf{I} \quad (6-45)$$

となる。

なお、 $(s+a)/s$ の代わりに積分器 $1/s$ を用いることはできない。何故なら、そうすると \mathbf{D}_{21} が行フルランクの条件を満足しないためである (積分器で状態変数が増え、 \mathbf{y}' を表すとき w の項がなくなる)。制御対象に最初から積分器がある場合にも解けないので、類似の方法が適用されている⁽²⁴⁾。

H_∞ の応用として、ハードディスク⁽²²⁾、燃料噴射ポンプ、鉄鋼プロセスラインの張力制御、柔軟構造物の制御、自動車のロックアップクラッチなどへの応用⁽³⁰⁾などが報告されている。

第7章 モデル規範適応システム

オブザーバを用いることで、直接測ることのできない状態変数を推定できることは既に述べた。このとき、制御対象の状態方程式に含まれるパラメータは既知であるとしたが、この値が運転中に変化する場合には、オブザーバで正しい状態変数の推定値が得られない。**モデル規範適応システム** (MRAS, model reference adaptive system) を利用して、これらのパラメータをオンラインで**同定** (identification) する問題を考えてみよう。

7.1 MRAS の基本構成

モデル規範適応システムには、**モデル規範形適応制御** (model reference adaptive control) と **適応同定システム** (adaptive identification system) がある。図 7-1 のモデル規範形適応制御では、望ましい動特性を持つ**規範モデル** (reference model) の出力 y_m に制御対象の出力 y が一致するようにすなわち差 $e = y_m - y$ を 0 にするように**適応機構** (adaptation mechanism) で制御パラメータを演算する。この制御パラメータを用いて制御器は入力 u を演算する。規範モデルや適応機構も広い意味では制御器の一部である。一方、図 7-2 の適応同定システムは実際の制御対象を規範モデルと考えると、制御対象の出力 y と**可調整モデル** (adjustable model) の出力 \hat{y} の差 e が 0 になるように適応機構が働いて、制御対象の未知パラメータを同定 (推定) する。可調整モデルには制御対象を表す数学モデルを用いる。例えば、制御対象がモータ

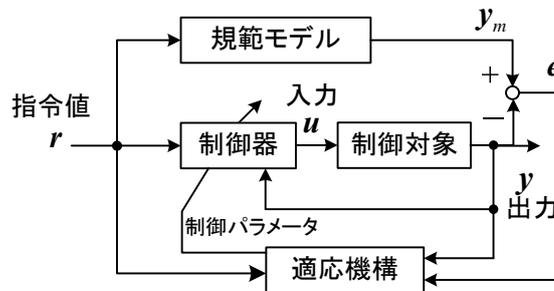


図 7-1 モデル規範形適応制御

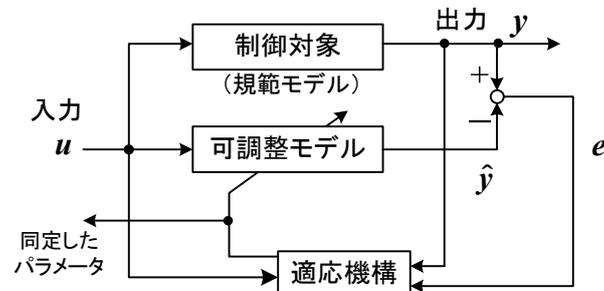


図 7-2 適応同定システム

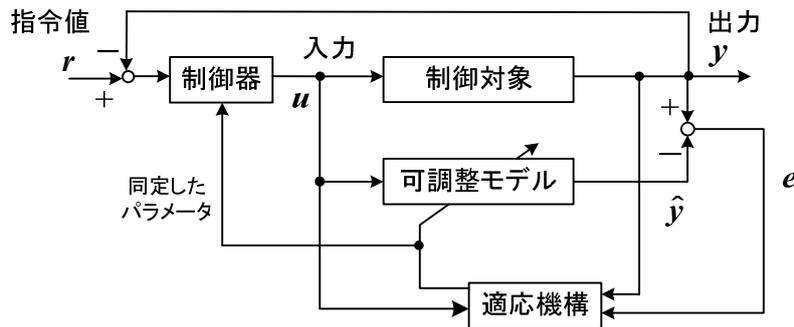


図 7-3 セルフチューニングレギュレータ

なら可調整モデルではその数学モデルを使うので、抵抗などのパラメータを用いる。それらが未知であれば、適応機構により同定できる。適応同定システムは、制御までは行っていないので、図 7-3 のように制御器が必要で、このとき同定したパラメータが利用できる。これは**セルフチューニングレギュレータ**(STR self-tuning regulator)と呼ばれる。可調整モデルや適応機構も広い意味では制御器である。適応同定器に制御対象の状態変数 x を推定する機能を付加したシステムは**適応オブザーバ** (adaptive state observer) と呼ばれる。この詳しい構成例を図 7-4 に示す。適応オブザーバにより、パラメータと状態変数が全て推定できることになり、これを制御に利用すれば高度な制御が期待できる。

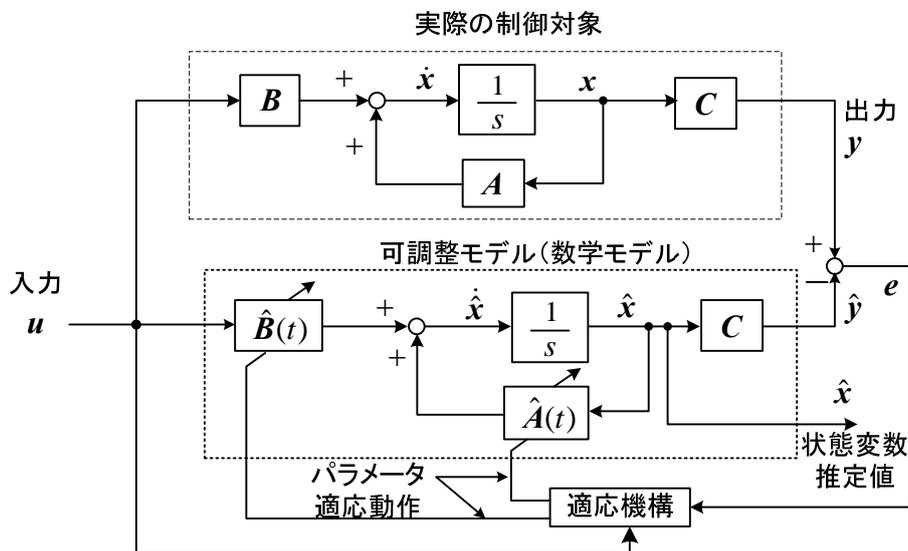


図 7-4 適応オブザーバ

7.2 非線形システムの安定判別法

MRAS の設計では、安定性を確保することが最も重要である。非線形システムの安定判

別が可能なリアプノフ法 (Lyapunov method) とポポフの超安定論 (Popov's hyperstability theory) は, MRAS を構成する場合によく用いられる。本節では, これらにつき簡単に述べる。なお, ラウスの安定判別法やナイキストの安定判別法は線形システムにしか使えない。

(1) リアプノフの安定判別法

非線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (7-1)$$

で表わされる非線形システム (nonlinear system) について, リアプノフの安定性についての定理は, 以下の様に与えられる。

リアプノフ法 : 次の条件を全て満足し, 連続な 1 階偏導関数をもつ連続な実数値スカラー関数 $V(x)$ が存在するならば, (7-1) は **大域的漸近安定** (asymptotically stable in large) である。大域的漸近安定とは非線形システムで, どんな初期値から出発しても **平衡点** (equilibrium point) に収束する場合をいう。線形では安定と言えば大域的漸近安定を意味する⁽¹⁾。

(i) $V(0) = 0$

(ii) $x \neq 0$ のとき $V(x) > 0$

(iii) $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow \infty$

(iv) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$

(v) 原点以外で, $\frac{dV(x)}{dt}$ は恒等的に 0 でない。

これらの条件を満足するとき $V(x)$ は **リアプノフ関数** と呼ばれている。リアプノフ関数を見つける一般的な方法はなく, 経験的に見つける必要がある。エネルギーは 1 つの候補になる。また, この方法は安定性に関する十分条件を与えるので, 実際の安定領域はもっと広いと考えるべきである。つまり, リアプノフ関数を探して, 上記の条件を満足する安定な制御パラメータが見つかったからといって, 上記の条件を満足しない制御パラメータの場合に不安定とは断言できないのである。しかし, 少なくとも安定な制御パラメータが求まっていることは確かなので, それで制御系を設計すれば問題ないのである。

次式の **線形システム** (linear system) について考えよう。

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (7-2)$$

リアプノフ関数として

$$V(x) = x^T P x \quad (7-3)$$

を選ぶ。ここで $\mathbf{P} > 0$ (正定行列, p.41 参照) に選ぶと, (i), (ii), (iii) を満足する。

(7-3)を時間微分して, (7-2)を用い

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (7-4)$$

と置くと,

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

であるから, $\mathbf{Q} > 0$ (正定行列) であれば, (iv), (v) を満足する。(7-4)は**リアプノフ方程式** (Lyapunov equation) と呼ばれる。 $\mathbf{Q} > 0$ となる \mathbf{Q} を1つ決めて, (7-4)より \mathbf{P} を決定すると, $\mathbf{P} > 0$ であることが, (7-2)が漸近安定であるための必要十分条件となる。

例題 7-1 単振子の接線方向の運動方程式を

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - c \frac{d\theta}{dt}$$

とする。 c は空気抵抗である。リアプノフ関数を用いて, $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ のまわりの運動の安定性を調べよ。

(解) $\theta = x_1$, $\frac{d\theta}{dt} = x_2$ とおくと, 非線形微分方程式

により系が記述できる。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{c}{ml} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1$$

(これらが, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ に対応する。)

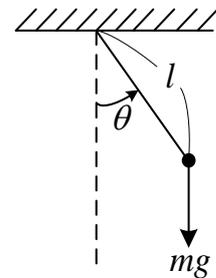
関数 V として, 全エネルギーをとると速度 $v = l x_2$ だから

$$V = mgl(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} ml^2 x_2^2$$

V は, 定理の (i), (ii), (iii) を満足している。また,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= mgl \sin x_1 \cdot x_2 + ml^2 x_2 \left(-\frac{c}{ml} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1\right) \\ &= -lc x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

$dV/dt = 0$ となるのは, $x_2 = 0$ のときだけである。常に $x_2 = 0$ となるのは, 与式より,



$(x_1, x_2) = (0, 0)$ のみであるから, (iv), (v) を満すので, 平衡点は漸近安定である。

(2) ポポフの超安定論⁽¹¹⁾

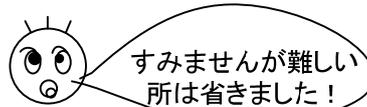


図 7-5 の線形定係数ブロックと非線形ブロックより成るシステムを考える。なお, フィードバックシステムの安定性を調べるので外部入力は零とする。

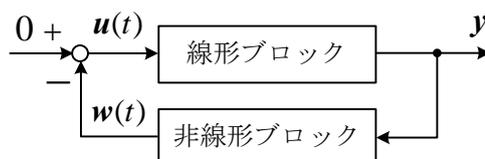


図 7-5 非線形制御システム

線形ブロック :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (7-5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7-6)$$

非線形ブロック :

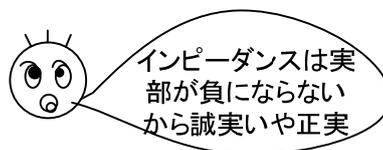
$$w(t)(= -u(t)) = f(y, t) \quad (7-7)$$

ここで, x は n 次元の状態ベクトル, u, y は同じ m 次元の入力, 出力ベクトルである。また, (A, B) は可制御, (C, A) は可観測とする。いま, **非線形ブロック**(nonlinear time variant block)において, すべての $t_1 \geq 0$ に対し次の不等式 (**ポポフの積分不等式** (Popov integral inequality) と呼ばれる) が成り立っているものとする。

$$\int_0^{t_1} w^T(t) y(t) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-8)$$

但し, γ_0^2 は t_1 に依存しない有限な正数である。

このとき, ポポフは, 次の定理を導いた。



超安定定理 : 図 7-5 のフィードバック系が **超安定**

(あるいは **漸近超安定***(asymptotically hyperstable)) となるための必要十分条件は, 線形ブロック (linear time invariant block) の伝達関数行列

$$F(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (7-9)$$

が **正実**(positive real) (あるいは **強正実***(strictly positive real)) となることである。*印が対応。

超安定 (hyperstable)とは、次式を満足する場合を言う。

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K (\|\mathbf{x}(t_0)\| + \delta) \quad (7-10)$$

ただし、 $t \geq t_0$, K, δ : 正の定数, ノルム $\|\mathbf{x}\| = \{\mathbf{x}^T \mathbf{x}\}^{1/2}$

$\mathbf{x}(t)$ がある範囲に納まっていることを意味する。漸近超安定とは超安定で、しかも

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7-11)$$

を満足する場合である。超安定より条件が厳しく、通常我々が安定と言う場合に相当しよう。以下、漸近超安定と強正実の場合について述べる。

定理 I : 1入力1出力の場合には、 $F(s)$ はスカラ関数となるので、 $F(s)$ と表わす。 $F(s)$ が強正実であるための必要十分条件は次の2つの条件を共に満足することである。

- (i) $F(s)$ は s 平面の右半平面にも虚軸上にも極を持たない。
- (ii) $s = j\omega$ なるすべての ω に対して $F(j\omega)$ の実部が正つまり $\text{Re } F(j\omega) > 0$

(i)は $F(s)$ が安定な伝達関数であることを意味している。また、(ii)は、 $F(j\omega)$ のナイキスト線図が右半平面のみに存在することを意味する。従って、 $F(s)$ が強正実関数ならば、 $F(j\omega)$ の位相角は ω のいかんにかかわらず $\pm 90^\circ$ 以内である。更に強正実関数の逆数もまた強正実関数であることが証明でき、この結果 $F(s)$ の零点は右半平面や虚軸上に存在しない。また、 $F(s)$ が実係数有理関数の場合、強正実ならば分母と分子の多項式の次数の差はたかだか1であることも証明できる。

定理 II : 多入力多出力システムで、 $F(s)$ が行列の場合、強正実であるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition)は、次の2つの条件を共に満足することである。

- (i) $F(s)$ の各要素は、右半平面にも虚軸上にも極を持たない。
- (ii) $s = j\omega$ なるすべての ω に対して

$$\mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega) > 0 \quad (\text{正定}) \quad (7-12)$$

$F(s)$ がスカラ関数のとき、定理IIの条件(ii)は定理Iの条件(ii)と一致する。また、 $\mathbf{H} = \mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega)$ はエルミート行列であり、これが正定である条件は、第6章(p.70)で述べている。

定理 III : (7-9)で与えられる $F(s)$ が強正実となるための必要十分条件は、次の関数を満足するような行列 $\mathbf{L}, \mathbf{W}, \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ が存在することである⁽¹¹⁾。

$$A^T P + PA = -LL^T - Q \quad (7-13)$$

$$B^T P + W^T L^T = C \quad (7-14)$$

$$D + D^T = W^T W \quad (7-15)$$

これは、**カルマン・ヤクボビッチの補題**(Kalman-Yacubovich's lemma)と呼ばれる。なお、上記の関係は、 $D = 0$ の場合にも満足され得る。

$D = 0$ の場合、(7-13), (7-14), (7-15)は次の様に単純化される⁽⁶⁾。

$$A^T P + PA = -Q \quad (7-16)$$

$$B^T P = C \quad (7-17)$$

(7-16), (7-17)は $D \neq 0$ の場合には、 $L = 0$ と選ぶことで得られ、強正実となるための十分条件となる⁽¹¹⁾。(7-16)は、リアプノフ方程式(Lyapunov equation)と呼ばれており、 $Q > 0$ となる Q を1つ決めて、この式より対称行列 P を決定すると、 $P > 0$ であることが、 A が安定行列(固有値が左半平面にある)であるための必要十分条件である。すなわち、ラウスの安定判別法と等価である。安定条件を求めるだけであれば、 Q は特別なものでも良いが^{(1),(5)}、(7-17)から C を決める場合に限られたものになるから^{(8),(11)}、できるだけ一般的な $Q > 0$ を選んで C を求める方が自由度があって良いだろう。超安定論の適用にあたっては、 C は決まったものでなく、強正実になるように選ぶと考える方がよい。

1入力1出力の場合について、超安定定理を解析してみよう⁽¹¹⁾。(7-8)より

$$\int_0^t w(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2$$

で、 $y(t) = \sin \omega t$, $w(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ (ただし、 $a > 0$)と仮定すると、

$$w(t)y(t) = \frac{a}{2}(\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) \quad (7-18)$$

となるので、位相差が $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ($\cos \varphi > 0$)である限り、第2項は有限だから上記の不等式は満足される。一方、線形ブロックが強正実であれば位相角が $\pm 90^\circ$ 以内であるから、ループ全体としての位相遅れは -180° を超えないので、不安定となることはない。

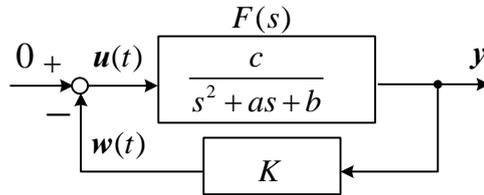
超安定定理は、あらゆる非線形ブロックを考えた場合に必要十分条件となるのであって、特定の非線形ブロックを考える場合には単に十分条件を与えるにすぎない。つまり、強正実でなくても漸近安定となることがあり得る。図にその例を示す。図の線形制御系の特性方程式は

$$s^2 + as + b + cK = 0$$

であり、 $a > 0, b + cK > 0$ なら漸近安定である。一方、 $K > 0$ なら

$$\int_0^{t_1} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = K \int_0^{t_1} y^2 dt > 0$$

で、ポポフの不等式は満足されているが、 $F(s)$ は次数の差が2で正実ではないので、ポポフの安定条件を満足しない。



例題 7-2 $F(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$ が強正実関数となる必要十分条件を求めよ。

定理 I を用いる場合：

条件 (i) より，ラウスの安定判別法より， $a_1 > 0, a_0 > 0$

条件 (ii) より

$$\operatorname{Re}(F(j\omega)) = \operatorname{Re}\left(\frac{jc_1\omega + c_0}{(j\omega)^2 + ja_1\omega + a_0}\right) = \frac{c_0 a_0 + (c_1 a_1 - c_0)\omega^2}{(a_0 - \omega^2)^2 + \omega^2 a_1^2} > 0$$

任意の ω に対して成立するためには， $c_0 a_0 > 0, c_1 a_1 - c_0 > 0$

求める条件は， $a_0 > 0, a_1 > 0, c_0 > 0, c_1 > \frac{c_0}{a_1}$

定理 III を用いる場合：

$\frac{y}{u} = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{x_1}{x_1}$ とおいて， $u = (s^2 + a_1 s + a_0)x_1, y = (c_1 s + c_0)x_1$ とする。

$\frac{d x_1}{d t} = x_2$ とおいて，以下の状態方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [c_0 \quad c_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(7-16)より， $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$ ， $q_1 > 0, q_2 > 0$ と選んで

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = \frac{q_1}{2a_0}, p_2 = \frac{q_2 + 2p_3}{2a_1} = \frac{a_0q_2 + q_1}{2a_0a_1}$$

$$p_1 = a_1p_3 + a_0p_2$$

$\mathbf{P} > \mathbf{0}$ の条件より,

$$p_1 = \frac{a_0^2q_2 + a_1^2q_1 + a_0q_1}{2a_0a_1} > 0$$

$$p_1p_2 - p_3^2 = \frac{a_0 \left\{ (q_1 + a_0q_2)^2 + q_1q_2a_1^2 \right\}}{(2a_0a_1)^2} > 0$$

従って, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ が得られる。(7-17)に代入して

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1] = [0, 1] \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = [p_3, p_2] \quad \text{だから}$$

$$c_0 = \frac{q_1}{2a_0}, c_1 = \frac{a_0q_2 + q_1}{2a_0a_1} = \frac{q_2}{2a_1} + \frac{c_0}{a_1}$$

q_1, q_2 は任意の正の値であるから, この結果は定理 I を用いた場合に一致する。

7.3 パラメータ同定(全状態変数が検出可能な場合)

MRAS 理論を応用して, 可調整モデルのパラメータを同定しよう⁽³⁾。簡単のため制御対象の状態変数 $\mathbf{x}(t)$ は全て検出できるものとする。また, 制御対象は漸近安定かつ可制御とする。

制御対象:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (7-19)$$

可調整モデル:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u}(t) \quad (7-20)$$

目的は, (7-19), (7-20)で, $\mathbf{x}(t)$ と $\hat{\mathbf{x}}(t)$ の差を小さくすることで, パラメータの推定値 $\hat{\mathbf{A}}(t)$, $\hat{\mathbf{B}}(t)$ をそれぞれ \mathbf{A} , \mathbf{B} に収束させることである。なお, \mathbf{u} は共通である。

(7-19)–(7-20)より誤差方程式を作ると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$= A(x - \hat{x}) + (A - \hat{A})\hat{x} + (B - \hat{B})u$$

ここで,

$$x - \hat{x} = e \quad (7-21)$$

$$(A - \hat{A})\hat{x} + (B - \hat{B})u = u_e \quad (7-22)$$

とおくと, 次式を得る。

$$\frac{de}{dt} = Ae + u_e \quad (7-23)$$

強正実ブロックを作るため, (7-16)を用いて**補償要素 P** (compensating element)を付加する。

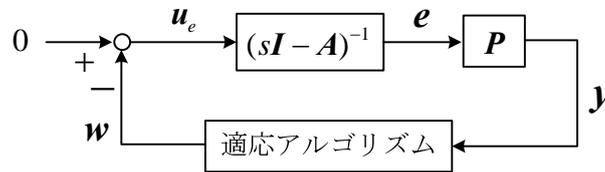
P はリアプノフ方程式の解として次式より決定できる。

$$A^T P + PA = -Q \quad (7-24)$$

Q は任意の正定対称行列であり, $Q = I$ と選ぶ。制御対象が漸近安定であれば, P は正定対称行列となる。出力を y (n 次元) とすると,

$$y = Pe \quad (7-25)$$

と表す。これで伝達関数 $F(s) = P(sI - A)^{-1}$ は $B = I, C = P$ で (7-16),(7-17)を満たし, 強正実となる。



適応アルゴリズムでパラメータ同定を行うとき, 次式のポポフの積分不等式を満たす必要がある。

$$\int_0^{t_1} w^T(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-26)$$

$u_e(t) = -w(t)$ であるから,

$$-\int_0^{t_1} u_e^T(t)y(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7-27)$$

(7-22)より,

$$-u_e^T(t)y(t) = -y^T(t)u_e = y^T(\hat{A} - A)\hat{x} + y^T(\hat{B} - B)u \quad (7-28)$$

この値が正であれば, (7-27)は満足されるから, $y^T(\hat{A} - A)\hat{x}$, $y^T(\hat{B} - B)u$ の各成分が正になるように, \hat{A} , \hat{B} の各成分を同定しよう。すなわち, \hat{A} の \hat{B} の各成分をそれぞれ $y\hat{x}^T$, yu^T の各成分を PI 制御して推定しよう。

$$\hat{a}_{ij}(t) = K_{pij}y_i(t)\hat{x}_j(t) + K_{lij}\int_0^t y_i(\tau)\hat{x}_j(\tau)d\tau + \hat{a}_{ij}(0) \quad (7-29)$$

$$\hat{b}_{ij}(t) = L_{pij}y_i(t)u_j(t) + L_{lij}\int_0^t y_i(\tau)u_j(\tau)d\tau + \hat{b}_{ij}(0) \quad (7-30)$$

(7-29), (7-30)が(7-27)のポポフの不等式を満足することを証明しよう。(7-28)で,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} &= [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} - a_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} - a_{n1} & \cdots & \hat{a}_{nn} - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \\ &= y_1(\hat{a}_{11} - a_{11})\hat{x}_1 + y_1(\hat{a}_{12} - a_{12})\hat{x}_2 + \cdots + y_1(\hat{a}_{1n} - a_{1n})\hat{x}_n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + y_n(\hat{a}_{n1} - a_{n1})\hat{x}_1 + y_n(\hat{a}_{n2} - a_{n2})\hat{x}_2 + \cdots + y_n(\hat{a}_{nn} - a_{nn})\hat{x}_n \end{aligned}$$

となり, 各成分がポポフの不等式を満足することが十分条件となるから,

$$\int_0^{t_1} y_i(\hat{a}_{ij} - a_{ij})\hat{x}_j dt \geq -\gamma_{0ij}^2 \quad (7-31)$$

であればよい。(7-31)~(7-29)を代入して,

$$y_i(t)\hat{x}_j(t) = f(t), \quad \hat{a}_{ij}(0) - a_{ij} = c \quad (\text{一定})$$

とおくと, 次式が満足されればよい。

$$\int_0^{t_1} f(t) \left(c + K_{pij}f(t) + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau \right) dt \geq -\gamma_{0ij}^2 \quad (7-32)$$

$K_{pij} \geq 0$, $K_{lij} > 0$ とすれば, K_{pij} の項は正で満足する。 $F(t) = c + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau$ とし,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} f(t) \left(c + K_{lij}\int_0^t f(\tau)d\tau \right) dt &= \frac{1}{K_{lij}} \int_0^{t_1} \frac{dF(t)}{dt} F(t) dt \\ &= \frac{1}{2K_{lij}} (F^2(t_1) - F^2(0)) = \frac{1}{2K_{lij}} \left((c + K_{lij}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau)^2 - c^2 \right) \end{aligned}$$

従って, ポポフの不等式を満足する。

$\mathbf{y}^T(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\mathbf{u}$ についても, (7-30)を用いて同様に証明できるので, (7-29), (7-30)によるパラメータ同定はポポフの不等式(7-26)を十分満足することが証明できた。

例題 7-3 制御対象が次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \quad \text{①}$$

パラメータ a, b を推定する MRAS を構成せよ。但し x, u は既知とする。

(解) 可調整モデルを

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad \text{②}$$

とする。①—②より、誤差方程式を作る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) &= ax + bu - \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u \\ &= a(x - \hat{x}) + (a - \hat{a})\hat{x} + (b - \hat{b})u \end{aligned}$$

ここで、

$$e = x - \hat{x} \quad \text{③}$$

$$u_e = (a - \hat{a})\hat{x} + (b - \hat{b})u \quad \text{④}$$

とおくと、

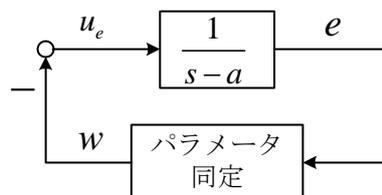
$$\frac{de}{dt} = ae + u_e \quad \text{⑤}$$

伝達関数は、 $\frac{e(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s - a} = F(s)$ となり、 $a < 0$ であれば左半平面に極をもち、 $s = j\omega$

のとき、

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{-a + j\omega} = \frac{-a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ \therefore \operatorname{Re} F(j\omega) &= \frac{-a}{a^2 + \omega^2} > 0 \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

であるから、強正実となる。従って、特に補償を行う必要もなく出力 e を用いてパラメータ同定を行う。このときの、適応ループを図に示す。



パラメータ同定は、Popov の不等式を満足する必要がある。すなわち、

$$\int_0^{t_1} w(t)e(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7)$$

$u_e(t) = -w(t)$ であるから, (7)は次式となる。

$$-\int_0^{t_1} u_e(t)e(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad (8)$$

(8)に(4)を代入して,

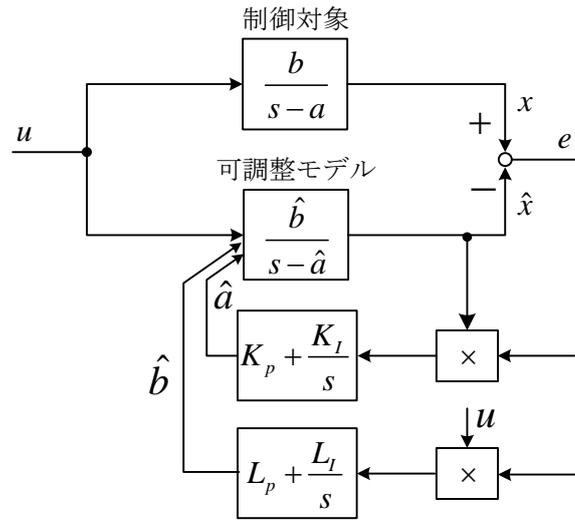
$$\int_0^{t_1} \left((\hat{a}(t) - a)\hat{x}(t)e(t) + (\hat{b} - b)u(t)e(t) \right) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (9)$$

(9)式を満足するように, 次式によりパラメータ \hat{a}, \hat{b} を同定する。

$$\hat{a}(t) = K_p e(t)\hat{x}(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\hat{x}(\tau)d\tau \quad (10)$$

$$\hat{b}(t) = L_p e(t)u(t) + L_I \int_0^t e(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11)$$

同定のブロック線図を示す。



(10), (11)がポポフの不等式を満すことを証明する。 \hat{a} について示せば, \hat{b} についても全く同様である。

$$f(t) = \hat{x}(t)e(t)$$

とおくと, (9)の左辺第1項は, (10)を代入して

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{t_1} (K_p f(t) + K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a)f(t)dt \\ &= \int_0^{t_1} K_p f^2(t)dt + \int_0^{t_1} (K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a)f(t)dt \end{aligned}$$

$K_p > 0$ とすると、第1項は非負である。

$$\text{公式} \quad \int_0^{t_1} g(t)\dot{g}(t)dt = \frac{1}{2}((g^2(t_1) - g^2(0)))$$

を用いると、 $g(t) = K_I \int_0^t f(\tau)d\tau - a$, $\dot{g}(t) = K_I f(t)$ だから

$$\text{第2項} = \frac{1}{K_I} \frac{1}{2} \left((K_I \int_0^{t_1} f(\tau)d\tau - a)^2 - a^2 \right)$$

よって、 $X \geq -\gamma_{0x}^2$ となり、 \hat{b} も同様であるから⑨が成立し、よって⑦のポポフの不等式を満足する。



例題 7-4 誘導機の状態方程式は与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \text{①}$$

二次鎖交磁束 $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ はセンサで検出でき、一次電流 $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$ は自由に制御できるとする。なお τ_r, M は正の定数である。いま、回転角速度 ω_r (一定と仮定) を推定するため、次式のシミュレータを考える。^ (ハット) は推定値を表わす。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\hat{\omega}_r \\ \hat{\omega}_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{M}{\tau_r} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \text{②}$$

このとき、速度を次式のPI制御器で推定するとき、安定に推定できることをポポフの超安定論を用いて証明せよ⁽²¹⁾。

$$\hat{\omega}_r = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) \quad \text{③}$$

* 文献(21)は、MRASによる速度センサレスベクトル制御として良く知られている。

(証明) ①-②より

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\psi}_{r\beta} \\ \hat{\psi}_{r\alpha} \end{bmatrix} (\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad \text{④}$$

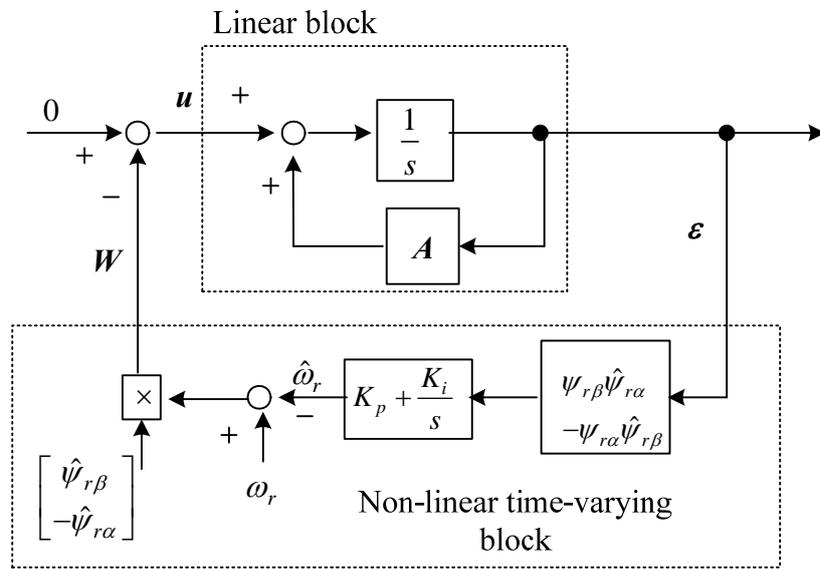
ここで, $\varepsilon_d = \psi_{r\alpha} - \hat{\psi}_{r\alpha}$, $\varepsilon_q = \psi_{r\beta} - \hat{\psi}_{r\beta}$

④を行列表示する。

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{W} \quad (5)$$

ここで,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{r\beta} \\ -\hat{\psi}_{r\alpha} \end{bmatrix} (\omega_r - \hat{\omega}_r) = -\mathbf{u} \quad (6)$$



MRAS representation as a non-linear feedback system

ポポフの積分不等式

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} dt = \int_0^{t_1} (\varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta} - \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha}) (\omega_r - \hat{\omega}_r) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (7)$$

を満足するように速度推定をしなければならない。

$$\int_0^{t_1} \frac{d f(t)}{d t} f(t) dt = \frac{1}{2} (f^2(t_1) - f^2(0)) \geq -\frac{1}{2} f^2(0) \quad (8)$$

であるから,

$$\frac{d f}{d t} = \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta} - \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} \quad (a) \quad , \quad f(t) = \omega_r - \hat{\omega}_r \quad (b)$$

に対応させる。実速度 ω_r は定数と考え、(b)を(a)に代入して、

$$\frac{d \hat{\omega}_r}{d t} = \varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}$$

よって $\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}$ を積分すれば速度が推定できる。PI 制御して

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_r &= K_p (\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}) + K_i \int_0^t (\varepsilon_q \hat{\psi}_{r\alpha} - \varepsilon_d \hat{\psi}_{r\beta}) dt \\ &= K_p (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) + K_i \int_0^t (\psi_{r\beta} \hat{\psi}_{r\alpha} - \psi_{r\alpha} \hat{\psi}_{r\beta}) dt\end{aligned}\quad (9)$$

を得る。この場合、⑨を⑦に代入すると、(7-32)のように変形でき、⑨の演算はポポフの不等式を満足することが証明される。

次に、④で表わされる線形ブロックの伝達関数行列が強正実となることを証明する。

$$\mathbf{F}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & s + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix}\quad (10)$$

定理 II の (i) は極 $s = -\frac{1}{\tau_r} \pm j\omega_r$ より満足する。(ii) を証明する。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(j\omega) + \mathbf{F}^T(-j\omega) &= \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} j\omega + \frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & j\omega + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{(-j\omega + \frac{1}{\tau_r})^2 + \omega_r^2} \begin{bmatrix} -j\omega + \frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & -j\omega + \frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} \frac{A}{\tau_r} + B\omega & jB\omega_r \\ -jB\omega_r & \frac{A}{\tau_r} + B\omega \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (11)$$

ただし、 $A = (\frac{1}{\tau_r})^2 - \omega^2 + \omega_r^2$, $B = \frac{2\omega}{\tau_r}$

⑪が正定であることは、以下の式から判る。

$$\frac{A}{\tau_r} + B\omega = \frac{1}{\tau_r} \left((\frac{1}{\tau_r})^2 + \omega^2 + \omega_r^2 \right) > 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega\right)^2 - (B\omega_r)^2 &= \left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega + B\omega_r\right)\left(\frac{A}{\tau_r} + B\omega - B\omega_r\right) \\ &= \left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 + (\omega + \omega_r)^2\right) \left(\left(\frac{1}{\tau_r}\right)^2 + (\omega - \omega_r)^2\right) > 0 \end{aligned}$$

定理Ⅲを使う場合には、④より

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$ とおくと、(7-17)の $B^T P = C$ を満足している。また

$$A^T P + P A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & \omega_r \\ -\omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & -\omega_r \\ \omega_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau_r} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\tau_r} \end{bmatrix} = -Q$$

より、 $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau_r} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\tau_r} \end{bmatrix} > 0$ を満足している。

7.4 パラメータ同定(1入力1出力の場合, 離散時間形)

計算が簡単化される離散時間形のパラメータ同定について述べる。同定を行う制御対象の**離散時間システム**(discrete-time system)が、 k を現在として次式で与えられるとする。

$$y_k = \theta^T z_k \quad (k \geq n) \quad (7-33)$$

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} \cdots - a_n y_{k-n} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \cdots + b_n u_{k-n} \quad (\text{成分表示})$$

ここで、 y_i : 出力(スカラ) $i = 0, 1, 2, \dots$

u_i : 入力(スカラ) $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad (2n \times 1) \quad (7-34)$$

$$z_k = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T \quad (2n \times 1) \quad (7-35)$$

(7-33)は、連続システムを離散化することによって得られる。 $k \geq n$ は、(7-35)の成分の係数が負にならない条件である。 y にマイナスを付けた方が伝達関数が綺麗である(後述)。考える問題は、(7-33)で表わされる制御対象の y_i, u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$)を測定して、パラメータ θ を同定することである。(7-33)の推定値を

$$\hat{y}_k = \hat{\theta}^T \mathbf{z}_k \quad (7-36)$$

と書く。誤差 $y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i$ に重みを付けて2乗し、 $i=n$ から $i=k$ まで加え、それらの和を最小にするように、パラメータ $\hat{\theta}$ を決定する。 $i=k$ が現在で、このとき(7-33) , (7-36) が成り立っている。 $i < n$ は \mathbf{z}_i の成分の係数が負になるから除外する。

評価関数として、

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i)^2 \quad \text{但し, } 0 < \lambda \leq 1 \quad (7-37)$$

を考えると、 $\partial J / \partial \hat{\theta} = \mathbf{0}$ より、次のアルゴリズムが得られる^{(14),(16)}。

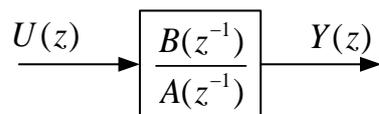
$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \mathbf{z}_k) \quad (7-38)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (2n \times 2n) \quad (7-39)$$

このアルゴリズムは、古いデータに小さな重みをかけて $\hat{\theta}$ を求めようとするもので、**重みつき最小2乗法**と呼ばれる。**重み係数 λ は忘却係数 (forgetting factor)** とも呼ばれる。 $\lambda = 1$ とすると通常の最小2乗法(least-squares method)のアルゴリズムである。これらは、**逐次最小2乗法(recursive least-squares method)**とも呼ばれる。 λ は0.97~0.995位にとられることが多い。重みつき最小2乗法は、同定すべきパラメータが時変の場合にも有効で、収束も早い。このアルゴリズムは本来、 y_i, u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) までのデータが得られて、 $k=n$ から適用すべきものである。しかし、実際には、 $\mathbf{P}_{-1} = \gamma \mathbf{I}$ ($\gamma \gg 1$) , $\hat{\theta}_{-1} = \mathbf{0}$ として $k=0$ の場合から計算を進めてよいと言われている⁽¹⁶⁾。

ところで、(7-33), (7-34), (7-35)より、 z 変換して初期値を $\mathbf{0}$ とおくと次式が得られる。

$$\begin{aligned} Y(z) &= -(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) \\ &\quad + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}) U(z) \\ \therefore \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \equiv \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \end{aligned} \quad (7-40)$$



これを用いて、(7-33)を

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k \quad (7-41)$$

と書くことがある。この場合、 z^{-1} は遅延演算子を表す。(7-41)を **ARMA モデル**と呼ぶこともあるが、厳密には入力 u_k が雑音の場合に **ARMA モデル**と定義されている⁽²⁵⁾。

雑音 e_k を考えると

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k + e_k \quad (7-42)$$

すなわち、

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} \cdots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \cdots + b_n u_{k-n} + e_k$$

と書ける。 e_k は式誤差と言われる。よって、

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u_k + \frac{1}{A(z^{-1})} e_k \quad (7-43)$$

である。(7-43)は、外部入力をもつ自己回帰モデル(**ARX モデル**)(autoregressive exogenous model)と呼ばれている⁽²⁵⁾。

ランダウ(Landau)によって体系づけられたモデル規範法の考え方に基づく **適応同定器** (Adaptive identifier) より、以下のアルゴリズムが得られている^{(6),(14)}。

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{1 + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \mathbf{z}_k) \quad (7-44)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\lambda_2(k) \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda_1(k) + \lambda_2(k) \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (7-45)$$

ここで、 $0 < \lambda_1(k) \leq 1$, $0 \leq \lambda_2(k) < 2$

$\lambda_1(k) = 1$, $\lambda_2(k) = 0$ の固定ゲイン則はパラメータが頻繁に変化する場合に適すると言われている。適応ゲイン行列 \mathbf{P} の対角要素が小さいほど測定ノイズの影響は小さくなると同時に推定パラメータの収束速度は遅くなる。 $\lambda_1(k) = 1$, $0 < \lambda_2(k) < 2$ はパラメータが未知であるが一定の場合に適すると言われている。 $\lambda_2(k)$ が大きいほど適応ゲインは時間とともに速く減少する。 $\lambda_1(k) = 1$, $\lambda_2(k) = 1$ は漸減ゲイン則と呼ばれる。漸減ゲイン則は、通常
の最小2乗法(least-squares method)と全く一致する。 $\lambda_2(k)$ を1よりも小さくすると測定ノイズが大きい場合に有効となることがある。パラメータがゆっくり変化する場合には、 $0.95 \leq \lambda_1(k) \leq 0.99$, $0 < \lambda_2(k) < 2$ が良いと言われている。

これまで述べたアルゴリズムは、**式誤差法** (方程式誤差法、直並列法とも呼ばれる) によるもので、広く用いられている^{(6),(14)}。この他に、

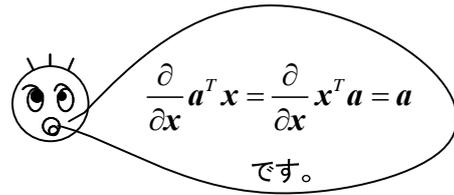
$$\mathbf{z}_k = [-\hat{y}_{k-1}, -\hat{y}_{k-2}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T$$

を用いた出力誤差法のアルゴリズムもある。出力誤差法は式誤差法に比べ複雑であるが、出力へ雑音が入っても同定結果にバイアスが生じない利点があると言われている。

適応同定器によりパラメータが真値に収束するためには、信号 \mathbf{z}_k の各成分が持続的に互いに独立であることが必要である。この条件は、 n 次の制御対象に対して、入力信号 $u(t)$ が n 個以上の周波数成分を含むなら満足される。このような信号は **Persistently Exciting (PE)** と言われる。しかし、ただ含めば良いというだけでなく、各成分が十分な振幅をもった適当な低周波域内に存在することが必要である。このために、合成正弦波信号や M 系列信号 (擬似不規則信号) が用いられている⁽¹⁷⁾。

重みつき最小2乗法の導出⁽¹⁶⁾

$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i)^2$ の極値を求めるため、



$$\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 2 \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i) \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \text{注} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right]^T \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (y_i \mathbf{z}_i - \hat{\theta}^T \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T) = \mathbf{0} \quad \therefore \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right]^{-1} \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i \quad \textcircled{2}$$

ここで、 $\mathbf{P}_k = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right]^{-1}$ 、 $\mathbf{p}_k = \sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i$ と定義し、②より。

$$\hat{\theta}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{p}_k \quad \textcircled{3}$$

と書く。逆行列を使わない方法を考えていく。 定義より

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \sum_{i=n}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T + \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T = \lambda \mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \quad \textcircled{4}$$

$$\mathbf{p}_k = \sum_{i=n}^{k-1} \lambda^{k-i} y_i \mathbf{z}_i + y_k \mathbf{z}_k = \lambda \mathbf{p}_{k-1} + y_k \mathbf{z}_k \quad \textcircled{5}$$

④の左から \mathbf{P}_k 、右から \mathbf{P}_{k-1} を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} = \lambda \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}$$

右から \mathbf{z}_k を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k = \lambda \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k$$

$$\therefore \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \quad (6)$$

④の左から \mathbf{P}_{k-1} , 右から \mathbf{P}_k を掛けて

$$\mathbf{P}_{k-1} = \lambda \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_k^T = \left(\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T \right)^T = \left[\sum_{i=n}^k \lambda^{k-i} (\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T)^T \right]^{-1} = \mathbf{P}_k \quad \text{だから, ⑥を用いて}$$

$$\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k = \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}$$

よって⑦より

$$\lambda \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}$$

$$\therefore \mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] \quad (8)$$

③より, (7-38)が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} &= \mathbf{P}_k \mathbf{p}_k - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \right] (\lambda \mathbf{p}_{k-1} + y_k \mathbf{z}_k) - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k (\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k) y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k y_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} \\ &= \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k}{\lambda + \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{z}_k} (y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \quad (9) \end{aligned}$$

最後に, カルマンフィルタから逐次最小二乗法を導出しよう⁽²⁵⁾。パラメータ $\boldsymbol{\theta}_k$ を状態変数として,

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k \quad (1)$$

を用いる。考える問題は, 次式の出力方程式 ((5-28)に対応) で表わされる y_k, \mathbf{z}_k を測定して, $\boldsymbol{\theta}$ を同定することである。 v_k はノイズである。

$$y_k = \mathbf{z}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + v_k \quad (2)$$

ここで,

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad ③$$

$$z_k = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}]^T \quad ④$$

$A_k = I, B_k = 0, Q_k = 0, C_k = z_k^T$ に対応するから, カルマンフィルタのアルゴリズムは

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{P_{k-1} z_k}{r + z_k^T P_{k-1} z_k} (y_k - z_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \quad ⑤$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} z_k z_k^T P_{k-1}}{r + z_k^T P_{k-1} z_k} \quad ⑥$$

ここで, $R_k = r$

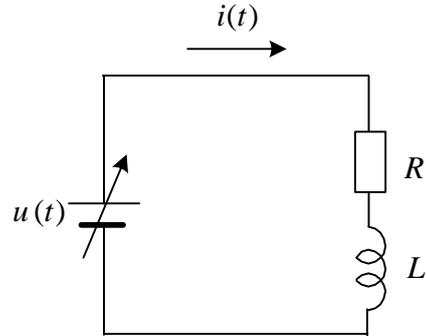
いま, P_k を新たに rP_k と置くと, 次式の逐次最小二乗法と一致する。

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{P_{k-1} z_k}{1 + z_k^T P_{k-1} z_k} (y_k - z_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \quad ⑦$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} z_k z_k^T P_{k-1}}{1 + z_k^T P_{k-1} z_k} \quad ⑧$$

カルマンフィルタによりパラメータを推定するために, ①を状態方程式と考える点が面白い。

例題 7-5 図の制御対象で, 入力電圧 $u(t)$ と電流 $i(t)$ は既知である。抵抗 R , インダクタンス L を逐次最小二乗法で求める演算式を示せ。



(解) 状態方程式は, 次式で与えられる。

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \quad ①$$

サンプリング周期を T として, オイラー法を使うと次の差分方程式が得られる。

$$\frac{i_k - i_{k-1}}{T} = -\frac{R}{L}i_{k-1} + \frac{1}{L}u_{k-1} \quad ②$$

$$\therefore i_k = \left(1 - \frac{TR}{L}\right)i_{k-1} + \frac{T}{L}u_{k-1} \quad ③$$

$$\text{これを, } i_k = ai_{k-1} + bu_{k-1} \quad k=1,2,\dots \quad (4)$$

とおく。ただし, $a=1-\frac{TR}{L}$, $b=\frac{T}{L}$ であり, 抵抗とインダクタンスの値が逐次更新される。 a , b が計算できれば, R , L はすぐに計算できるので, 以下 a , b を求める。

④は,

$$i_k = ai_{k-1} + bu_{k-1} \equiv \theta^T z_k \quad (k \geq n=1) \quad (5)$$

ここで, $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $z_k = \begin{bmatrix} i_{k-1} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$ であり, (7-33)に対応する。

$$P_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \gamma_k \end{bmatrix}$$

とおくと (7-38)は次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda + z^T(k)P(k-1)z(k)} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1}i_{k-1} + \beta_{k-1}u_{k-1} \\ \beta_{k-1}i_{k-1} + \gamma_{k-1}u_{k-1} \end{bmatrix} (i_k - a_{k-1}i_{k-1} - b_{k-1}u_{k-1})$$

(7-39)も同様に書き下せる。

この例は, (7-33), (7-34), (7-35)で最も簡単な $n=1$ の場合に相当する。

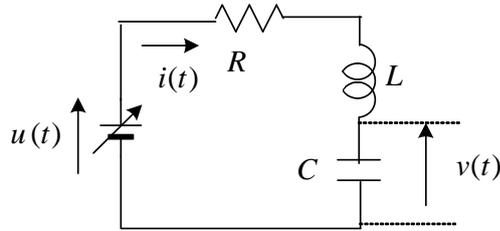
$$y_k = -a_1 y_{k-1} + b_1 u_{k-1} + v_k$$

が⑤と対応する。ここではノイズ v_k も入れて考えてみよう。問題は, ノイズ v_k のある中で, 既知の y_k, y_{k-1}, u_{k-1} を用い, a_1, b_1 を推定することにある。サンプリング周期毎にデータは入ってくるから, ノイズを無視すると, 3 回分のデータより連立方程式を解いて a_1, b_1 が計算できそうである。しかし, これだとノイズなどのため誤差が大きくなろう。最小 2 乗法では, 得られる多くのデータを有効に活用する。ただ, a_1, b_1 も変化する可能性があるから (温度で抵抗が変化する場合など), 忘却係数を用いて古いデータの影響を小さくする。もう一つ考えておかなければいけないことは, 例えば直流の定常状態では電流は一定で, この状態のデータだけでインダクタンスの値を知ることは不可能である。従って, 入力電圧が変化するような場合のデータがどうしても必要である。つまり入力電圧が PE (Persistently Exciting) でないといけないのである。入力電圧は制御によって一定になることもあるので, この問題を解決するため, 本来必要な入力電圧に振幅が比較的小さな合成正弦波信号や M 系列信号を重畳させて加えることが考えられている。

例題 7-6 図の制御対象で、入力電圧 $u(t)$ と電流 $i(t)$ は既知である。逐次最小二乗法を適用するための離散時間モデル

$$y_k = \theta^T z_k \quad (k \geq n)$$

を導出せよ。



(解) 成り立つ微分方程式は

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + v \quad \text{①}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad \text{②}$$

サンプリング周期を T として、オイラー法を用いて離散化すると、次式が得られる。

$$u_{k-1} = Ri_{k-1} + L \frac{i_k - i_{k-1}}{T} + v_{k-1} \quad \text{③}$$

$$i_{k-1} = C \frac{v_k - v_{k-1}}{T} \quad \text{④}$$

v_k, v_{k-1} の項を消去する必要がある。③, ④を 1 サンプル前の関係式にすると

$$u_{k-2} = Ri_{k-2} + L \frac{i_{k-1} - i_{k-2}}{T} + v_{k-2} \quad \text{⑤}$$

$$i_{k-2} = C \frac{v_{k-1} - v_{k-2}}{T} \quad \text{⑥}$$

⑤より v_{k-2} を求め、⑥に代入すると v_{k-1} が電流と入力電圧だけで表せる。これを③へ代入することにより次式が得られる。

$$i_k = \left(2 - \frac{TR}{L}\right) i_{k-1} + \left(\frac{TR}{L} - 1 - \frac{T^2}{LC}\right) i_{k-2} + \frac{T}{L} u_{k-1} - \frac{T}{L} u_{k-2} \quad \text{⑦}$$

これは、

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} \quad (k \geq 2) \quad \text{⑧}$$

に対応する。

参考文献

- (1) Schultz and Melsa 久村富持訳：状態関数と線形制御系，学献社(1970)
- (2) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書(1977)
- (3) 高橋安人：システムと制御下，岩波書店(1978)
- (4) 児玉慎三，須田信英：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会(1978)
- (5) 小郷寛，美多勉：システム制御理論入門，実教出版(1979)
- (6) I.D.Landau ， 富塚誠義：適応制御システムの理論と実際，オーム社(1981)
- (7) 相良節夫，秋月影雄，中溝高好，片山徹：システム同定，計測自動制御学会 (1981)
- (8) 金井喜美雄：制御システム設計，槇書店(1982)
- (9) 計測自動制御学会編：自動制御ハンドブック 基礎編，オーム社(1983)
- (10) 片山徹：新版応用カルマンフィルタ，朝倉書店(1983)
- (11) 市川邦彦：適応制御，昭晃堂(1984)
- (12) 大西公平：メカトロニクスにおける新しいサーボ技術，電気学会論文誌 D， 107 巻 1 号， pp. 83-86 (1987)
- (13) 佐野昭：カルマンフィルタとシステム同定，コンピュータロール 23， コロナ社(1988)
- (14) 鈴木隆：モデル規範法に基づく適応同定，コンピュータロール 23， コロナ社(1988)
- (15) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis: State-space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems, *IEEE Trans. Automatic. Control*, Vol.34, pp.831-847(1989)
- (16) 鈴木隆：適応制御の基礎，コンピュータロール 32， コロナ社(1990)
- (17) 重政隆：2 自由度 PID オートチューニングコントローラ，コンピュータロール 32 ， コロナ社(1990)
- (18) 原辰次 他：新しい制御理論に基づく制御系設計法，SICE 夏季セミナー'92 (1992)
- (19) 杉江俊治： H^∞ 制御によるサーボ系の設計，システム制御情報チュートリアル講座'92 H^∞ 制御の新しい展開と応用の実際，システム制御情報学会編(1992)
- (20) 佐伯正美： H^∞ 制御と LQG 制御の関係，第 41 回システム制御情報講習会「 H^∞ 制御の基礎」，システム制御情報学会編(1992)
- (21) C. Schauder, "Adaptive speed identification for vector control of induction motors without rotational transducers", *IEEE Trans. Industr. Applic.*, Vol.28, No.5, pp. 1054-1061, Sep./Oct. (1992)
- (22) 美多勉： H_∞ 制御，昭晃堂(1994)
- (23) 細江繁幸，荒木光彦監修：制御系設計 H_∞ 制御とその応用，システム制御情報学会編，朝倉書店(1994)
- (24) 池田誠人，橋本秀樹：リニア DC モータによるワイヤ駆動系のロバスト制御，電気学会論文誌 D,114 巻， 11 号， pp.1115-1121 (1994)
- (25) 足立修一：制御のためのシステム同定，東京電機大学出版局(1996)

- (26) 野波健蔵, 西村秀和: 制御理論の基礎, 東京電機大学出版局(1998)
- (27) 堀洋一, 大西公平: 応用制御工学, 丸善(1998)
- (28) 木村英紀: H^∞ 制御, 昭晃堂(2000)
- (29) 藤森篤: ロバスト制御, コロナ社(2001)
- (30) 平田光男, 飯野郁与, 安達和孝, 金子豊: 安定余裕を考慮したゲインスケジュールド H_∞ 制御によるロックアップクラッチのスリップ回転速度制御, 計測自動制御学会産業論文集, Vol.9, No.2, pp.2-10(2010)
- (31) 足立修一, 丸田一郎: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局(2012)
- (32) 辻峰男: 電気回路講義ノート, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2014)
- (33) 辻峰男: 自動制御の理論と応用, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2015)
- (34) 辻峰男: パワーエレクトロニクスと電動機制御入門, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2015)
- (35) 辻峰男: デジタル制御システム, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2016)
- (36) 大平徹: 確率論講義ノート, 森北出版(2017)

* (32),(33),(34),(35)は自由にダウンロード可能

多くの文献を参考にさせて頂きました。この場を借りて著者の皆さまへ感謝申し上げます。この他にも沢山の文献があります。引用した文献は歴史的に見て最も古いものとは限らず、たまたま著者の手元にあって参考にしたものが多く含まれています。

付録 最適レギュレータ

1. 変分法 (variational calculus)

図1に示すように、対象とする時間を $t=0$ から T までとし、

$$I = \int_0^T F(x, \dot{x}) dt \quad (1)$$

という評価関数を定義する。 \dot{x} は時間微分を表す。このとき、 I が最小となるような最適な関数 $x_0(t)$ が満たす条件を導く。ここでは、簡単のため x はスカラーとする。

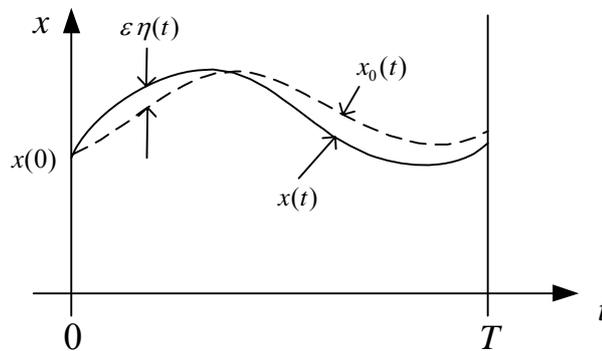


図1 変分法

図のように、 x, \dot{x} に対して、

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t) \quad (3)$$

なる摂動を与える。 ε は小さな定数、 $\eta(t)$ は $\eta(0)=0$ なる任意の関数とする。このとき、 I の変分 ΔI は

$$\Delta I = \int_0^T [F(x_0 + \varepsilon \eta, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{\eta}) - F(x_0, \dot{x}_0)] dt \quad (4)$$

上式を x, \dot{x} に対してテイラー展開すると

$$\Delta I = \varepsilon \int_0^T \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T \left[\eta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\eta \dot{\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{\eta}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right] dt + o(\varepsilon^2) \quad (5)$$

となる。停留条件から極値であるための必要条件を求める。停留条件

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (6)$$

を用いると、(5)式より

$$\int_0^T \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt = 0 \quad (7)$$

となるが、第2項に部分積分を用いて

$$\int_0^T \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt + \left[\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_0^T = 0 \quad (8)$$

となる。これが、いかなる $\eta(t)$ についても成立するためには、

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (9)$$

が必要である。この式を**オイラー・ラグランジュの微分方程式**という。また、(8)より

$$\eta(T) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=T} - \eta(0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

でなくてはならない。 $\eta(0) = 0$ であるから第2項は零である。よって、

$$\eta(T) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=T} = 0 \quad (11)$$

を得る。これを**横断性条件**という。

例題1 2点 $(0, a)$ と (T, b) を結ぶ曲線のうち、その長さが最小となる曲線を求めよ。

[解] 評価関数を2点間の距離とすると、

$$I = \int_0^T \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \quad \because ds = \sqrt{dt^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt \quad (12)$$

であり、境界条件は $x(0) = a$, $x(T) = b$ である。オイラー・ラグランジュの式を用いると、

$$F = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}$$

は x の関数でないから、(9)より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (13)$$

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \quad (14)$$

は一定値である。これから、

$$\dot{x} = K_1 = \text{const} \quad \therefore x = K_1 t + K_2 \quad (15)$$

境界条件を考慮して、

$$x = \frac{b-a}{T} t + a \quad (16)$$

すなわち、直線の式が得られた。

2. ラグランジュの未定乗数法

ある条件を満足しながら評価関数を最小にする場合、すなわち制約付最適化問題の解法としてラグランジュの未定乗数法が良く知られている。これを、例題により述べる。

例題2 周辺の長さが8のとき、長方形の面積を最大にするときの辺の長さを求めよ。

[解] 辺の長さを x_1, x_2 とすると、

$$2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \quad (17)$$

である。ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、ラグランジアンを

$$L = x_1 x_2 + \lambda(2x_1 + 2x_2 - 8) \quad (18)$$

とおく。第1項は面積で、第2項は0に λ を掛けた形である。 L を x_1, x_2, λ で偏微分して停留条件を求める。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \quad (21)$$

(19), (20), (21)より、次式が得られる。

$$\lambda = -1, x_1 = x_2 = 2 \quad (22)$$

すなわち、答えは正方形である。

3. 非線形システムの最適制御

非線形システムの状態方程式を

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (23)$$

とする。このシステムで、

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (24)$$

を最小化するような入力 \mathbf{u} を求める問題を考える。これは、(23)の制約付の最適化問題であるから、ラグランジュの未定乗数法を用いる。未定乗数を $\boldsymbol{\lambda}$ (\mathbf{x} と同じ次元のベクトル) として、

$$J = \int_0^T \{f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}]\} dt \quad (25)$$

の最小化を考える。(9)のオイラー・ラグランジュの式を適用する。この場合変数として、 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}$ があるのでそれぞれについて偏微分をとる必要がある。

1) \mathbf{x} について

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (26)$$

したがって,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}] + \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{0} \quad (27)$$

2) $\boldsymbol{\lambda}$ について

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (28)$$

が得られ、第2項は0であるから、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (29)$$

これは、(23)の状態方程式に他ならない。

3) \mathbf{u} について

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (30)$$

が得られ、第2項は0であるから、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}] = \mathbf{0} \quad (31)$$

ここで、**ハミルトニアン** H を次式で定義する。

$$H \equiv f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (32)$$

ハミルトニアンはもともと力学の概念で、すべての運動は、ハミルトニアンを刻々停留するようなパスにしたがって起こるものである。力学の場合、 \mathbf{x} を位置と解釈すれば、 f_0 が位置エネルギー、 $\boldsymbol{\lambda}$ は運動量、 \mathbf{f} は速度、従って $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$ は運動エネルギーに対応する。 H を用いて、(27),(29),(31)は以下のようにまとめられる。

オイラーの正準方程式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (33)$$

停留条件：

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (34)$$

従って、非線形システムの最適制御入力 \mathbf{u} は、まず、(34)より \mathbf{u} を \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ の関数で表現し、(33)に代入して、 \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ に関する非線形微分方程式を数値的に解くことで求められる。しかし、 $t=0$ と $t=T$ において境界値が半分ずつ与えられた**2点境界値問題**となり繰り返し計算

で解かなくてはならない。 $\mathbf{x}(0)$ が与えられたときの(11)の横断性条件は、この場合

$$\boldsymbol{\eta}(T)^T \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} (f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) \Big|_{t=T} = 0 \quad \therefore \boldsymbol{\eta}(T)^T \boldsymbol{\lambda}(T) = 0 \quad (35)$$

となる。

- 1)固定終端値問題： $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{x}(T)$ が与えられた場合、 $\boldsymbol{\eta}(0)$ だけでなく $\boldsymbol{\eta}(T)$ も $\mathbf{0}$ となり、 $\boldsymbol{\lambda}$ は自由で最終的に $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{x}(T)$ が条件を満足するように決定される。
- 2)自由終端値問題： $\mathbf{x}(0)$ のみが与えられた場合で、 $\mathbf{x}(T)$ は制御の結果、ある値に定まる。この場合、 $\boldsymbol{\eta}(T) \neq \mathbf{0}$ なので、(35)より、 $\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}$ とならなければならない。

4. 線形定係数システムの最適制御

制御対象が次の状態方程式により表現された線形定係数システムとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (36)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は n 次元の状態変数ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は m 次元の入力変数ベクトルである。最小とすべき2次形式評価関数を次式で定義する。

$$J = \int_0^T \{ \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \quad (37)$$

ハミルトニアン H は、(32)より

$$H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (38)$$

となる。(33)より、

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (39)$$

が求められる。最適入力 \mathbf{u} は

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \therefore \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (40)$$

となる。(40)を(36)に代入し、次式を得る。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (41)$$

従って、(39),(41)を2点境界値問題として解くことで、 \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ が求まり、その結果(40)より最適制御入力 \mathbf{u} が求まる。しかし、その解法は容易ではない。

そこで、 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ が次式で表現できるものと仮定して話を進める。

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = 2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (42)$$

(42)を(41)と(39)に代入して、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (44)$$

(43)を(44)に代入して

$$(\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t))x(t) = 0 \quad (45)$$

これが、 $x(t)$ に関係なく成立するためには次式が成り立てば良い。

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t) = 0 \quad (46)$$

これを**リッカチの微分方程式**(Riccati differential equation)という。

$x(0)$ が与えられ、 $x(T)$ は任意とすると、自由終端値問題となり、 $\lambda(T) = 0$ である。よって、(42)より

$$P(T) = 0 \quad (47)$$

正定対称行列 $P(t)$ は、逆時間方向にオフラインで解くことによって求めることができる。

この結果、最適制御入力

$$u(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t) \quad (48)$$

で求まる。

ところで、(48)を用いてオンライン処理で制御を行うことは容易ではないだろう。そこで、制御時間 T が ∞ の場合を考える。このとき、 $P(t)$ は定数となり、次のリッカチ代数方程式を満す。

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (49)$$

このとき、最適制御入力

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (50)$$

となる。この場合、初期状態にあるものを原点 ($x(\infty) = 0$) に持って行く問題になる。 $x(\infty) \neq 0$ の場合、 $J \rightarrow \infty$ となる。

<<スカラー関数のベクトルによる微分>>

$$\text{定義} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

$$\text{公式} \quad \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{Q}^T \mathbf{x} = 2\mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (\mathbf{Q} : \text{対称行列})$$

索引

	ページ				
ARX モデル	103	最悪外乱	81	負荷トルクオブザーバ	58
H_∞ ノルム	68	最小次元オブザーバ	56	分散	66
I-P 制御系	50	最大特異値	69	ベクトル制御	53
LQG 制御	81	最適サーボ系	46	忘却係数	102
PE	104	最適フィードバック行列	40	ポポフの超安定論	88
PID 制御	19	最適レギュレータ	40	モデル規範適応システム	85
安定判別	16	雑音除去特性	71	モデル規範適応制御	85
一般化プラント	72	式誤差法	103	余因子行列	16,18
エルミート行列	70	システム雑音	60	ラウスの表	22
オイラー法	12	シミュレータ	51	ラプラス変換	6
オブザーバゲイン	54	周辺確率分布	67	リアプノフ法	87
オブザーバの極	55	出力方程式	1,3	リッカチ方程式	40,80
重み関数	72	準正定行列	41	ルンゲ・クッタ法	12
重みつき最小 2 乗法	102	状態推移行列	6	レギュレータ	36
可安定	80	状態変数	3	ロバスト	68
階数	27,83	状態方程式	1,3	ロバスト安定性	73
外乱オブザーバ	58	乗法変動	73	ロバストサーボ系	81
外乱抑圧特性	71	スモールゲインの定理	74		
可観測	28	正実	89		
可観測正準形式	34	正準形式	31		
拡大系	47	正定行列	41		
可検出	80	セルフチューニング	86		
可制御	27	相補感度関数	73		
可制御正準形式	32	速応性	71		
可調整モデル	85	測定雑音	60		
加法変動	76	対角正準形式	31		
カルマンゲイン	62	畳み込み積分	6		
カルマンフィルタ	60	中心解	80		
カルマン・ヤクボビッチの補題	91	超安定定理	89		
感度関数	73	直交射影の原理	62		
期待値	65	定常偏差	20		
規範モデル	85	適応オブザーバ	86		
逆行列	18	適応機構	85		
強正実	89	適応同定システム	85		
共分散行列	67	伝達関数	16		
共分散推定値	61	伝達関数行列	31		
行列式	18	同一次元オブザーバ	54		
行列の対角化	7	特性根	16		
極配置	37	特性方程式	16		
誤差方程式	52,54,57	内部モデル原理	47		
固有値	7,16	ノミナルモデル	74		
固有ベクトル	8	白色雑音	60		
混合感度問題	71,76	評価関数	40		
		標準偏差	66		