

参考文献

- (1) Schultz and Melsa 久村富持訳：状態関数と線形制御系，学献社(1970)
- (2) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書(1977)
- (3) 高橋安人：システムと制御下，岩波書店(1978)
- (4) 児玉慎三，須田信英：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会(1978)
- (5) 小郷寛，美多勉：システム制御理論入門，実教出版(1979)
- (6) I.D.Landau ， 富塚誠義：適応制御システムの理論と実際，オーム社(1981)
- (7) 相良節夫，秋月影雄，中溝高好，片山徹：システム同定，計測自動制御学会 (1981)
- (8) 金井喜美雄：制御システム設計，槇書店(1982)
- (9) 計測自動制御学会編：自動制御ハンドブック 基礎編，オーム社(1983)
- (10) 片山徹：新版応用カルマンフィルタ，朝倉書店(1983)
- (11) 市川邦彦：適応制御，昭晃堂(1984)
- (12) 大西公平：メカトロニクスにおける新しいサーボ技術，電気学会論文誌 D， 107 巻 1 号， pp. 83-86 (1987)
- (13) 佐野昭：カルマンフィルタとシステム同定，コンピュータロール 23， コロナ社(1988)
- (14) 鈴木隆：モデル規範法に基づく適応同定，コンピュータロール 23， コロナ社(1988)
- (15) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis: State-space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems, *IEEE Trans. Automatic. Control*, Vol.34, pp.831-847(1989)
- (16) 鈴木隆：適応制御の基礎，コンピュータロール 32， コロナ社(1990)
- (17) 重政隆：2 自由度 PID オートチューニングコントローラ，コンピュータロール 32 ， コロナ社(1990)
- (18) 原辰次 他：新しい制御理論に基づく制御系設計法，SICE 夏季セミナー'92 (1992)
- (19) 杉江俊治： H^∞ 制御によるサーボ系の設計，システム制御情報チュートリアル講座'92 H^∞ 制御の新しい展開と応用の実際，システム制御情報学会編(1992)
- (20) 佐伯正美： H^∞ 制御と LQG 制御の関係，第 41 回システム制御情報講習会「 H^∞ 制御の基礎」，システム制御情報学会編(1992)
- (21) C. Schauder, "Adaptive speed identification for vector control of induction motors without rotational transducers", *IEEE Trans. Industr. Applic.*, Vol.28, No.5, pp. 1054-1061, Sep./Oct. (1992)
- (22) 美多勉： H_∞ 制御，昭晃堂(1994)
- (23) 細江繁幸，荒木光彦監修：制御系設計 H_∞ 制御とその応用，システム制御情報学会編，朝倉書店(1994)
- (24) 池田誠人，橋本秀樹：リニア DC モータによるワイヤ駆動系のロバスト制御，電気学会論文誌 D,114 巻， 11 号， pp.1115-1121 (1994)
- (25) 足立修一：制御のためのシステム同定，東京電機大学出版局(1996)

- (26) 野波健蔵, 西村秀和: 制御理論の基礎, 東京電機大学出版局(1998)
- (27) 堀洋一, 大西公平: 応用制御工学, 丸善(1998)
- (28) 木村英紀: H^∞ 制御, 昭晃堂(2000)
- (29) 藤森篤: ロバスト制御, コロナ社(2001)
- (30) 平田光男, 飯野郁与, 安達和孝, 金子豊: 安定余裕を考慮したゲインスケジュールド H_∞ 制御によるロックアップクラッチのスリップ回転速度制御, 計測自動制御学会産業論文集, Vol.9, No.2, pp.2-10(2010)
- (31) 足立修一, 丸田一郎: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局(2012)
- (32) 辻峰男: 電気回路講義ノート, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2014)
- (33) 辻峰男: 自動制御の理論と応用, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2015)
- (34) 辻峰男: パワーエレクトロニクスと電動機制御入門, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2015)
- (35) 辻峰男: デジタル制御システム, 長崎大学学術研究成果リポジトリ(NAOSITE)(2016)
- (36) 大平徹: 確率論講義ノート, 森北出版(2017)

* (32),(33),(34),(35)は自由にダウンロード可能

多くの文献を参考にさせて頂きました。この場を借りて著者の皆さまへ感謝申し上げます。この他にも沢山の文献があります。引用した文献は歴史的に見て最も古いものとは限らず、たまたま著者の手元にあって参考にしたものが多く含まれています。

付録 最適レギュレータ

1. 変分法 (variational calculus)

図1に示すように、対象とする時間を $t=0$ から T までとし、

$$I = \int_0^T F(x, \dot{x}) dt \quad (1)$$

という評価関数を定義する。 \dot{x} は時間微分を表す。このとき、 I が最小となるような最適な関数 $x_0(t)$ が満たす条件を導く。ここでは、簡単のため x はスカラーとする。

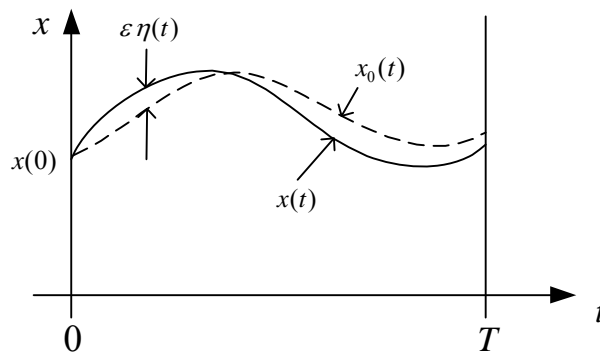


図1 変分法

図のように、 x, \dot{x} に対して、

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t) \quad (3)$$

なる摂動を与える。 ε は小さな定数、 $\eta(t)$ は $\eta(0)=0$ なる任意の関数とする。このとき、 I の変分 ΔI は

$$\Delta I = \int_0^T [F(x_0 + \varepsilon \eta, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{\eta}) - F(x_0, \dot{x}_0)] dt \quad (4)$$

上式を x, \dot{x} に対してテイラー展開すると

$$\Delta I = \varepsilon \int_0^T \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T \left[\eta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\eta \dot{\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{\eta}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right] dt + o(\varepsilon^2) \quad (5)$$

となる。停留条件から極値であるための必要条件を求める。停留条件

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (6)$$

を用いると、(5)式より

$$\int_0^T \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt = 0 \quad (7)$$

となるが、第2項に部分積分を用いて

$$\int_0^T \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt + \left[\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right]_0^T = 0 \quad (8)$$

となる。これが、いかなる $\eta(t)$ についても成立するためには、

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (9)$$

が必要である。この式を**オイラー・ラグランジュの微分方程式**という。また、(8)より

$$\eta(T) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=T} - \eta(0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

でなくてはならない。 $\eta(0) = 0$ であるから第2項は零である。よって、

$$\eta(T) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=T} = 0 \quad (11)$$

を得る。これを**横断性条件**という。

例題1 2点 $(0, a)$ と (T, b) を結ぶ曲線のうち、その長さが最小となる曲線を求めよ。

[解] 評価関数を2点間の距離とすると、

$$I = \int_0^T \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \quad \because ds = \sqrt{dt^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt \quad (12)$$

であり、境界条件は $x(0) = a$, $x(T) = b$ である。オイラー・ラグランジュの式を用いると、

$$F = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}$$

は x の関数でないから、(9)より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (13)$$

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \quad (14)$$

は一定値である。これから、

$$\dot{x} = K_1 = \text{const} \quad \therefore x = K_1 t + K_2 \quad (15)$$

境界条件を考慮して、

$$x = \frac{b-a}{T} t + a \quad (16)$$

すなわち、直線の式が得られた。

2. ラグランジュの未定乗数法

ある条件を満足しながら評価関数を最小にする場合、すなわち制約付最適化問題の解法としてラグランジュの未定乗数法が良く知られている。これを、例題により述べる。

例題2 周辺の長さが8のとき、長方形の面積を最大にするときの辺の長さを求めよ。

[解] 辺の長さを x_1, x_2 とすると、

$$2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \quad (17)$$

である。ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、ラグランジアンを

$$L = x_1 x_2 + \lambda(2x_1 + 2x_2 - 8) \quad (18)$$

とおく。第1項は面積で、第2項は0に λ を掛けた形である。 L を x_1, x_2, λ で偏微分して停留条件を求める。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \quad (21)$$

(19), (20), (21)より、次式が得られる。

$$\lambda = -1, x_1 = x_2 = 2 \quad (22)$$

すなわち、答えは正方形である。

3. 非線形システムの最適制御

非線形システムの状態方程式を

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (23)$$

とする。このシステムで、

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (24)$$

を最小化するような入力 \mathbf{u} を求める問題を考える。これは、(23)の制約付の最適化問題であるから、ラグランジュの未定乗数法を用いる。未定乗数を $\boldsymbol{\lambda}$ (\mathbf{x} と同じ次元のベクトル) として、

$$J = \int_0^T \{f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}]\} dt \quad (25)$$

の最小化を考える。(9)のオイラー・ラグランジュの式を適用する。この場合変数として、 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}$ があるのでそれぞれについて偏微分をとる必要がある。

1) \mathbf{x} について

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (26)$$

したがって,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}] + \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{0} \quad (27)$$

2) $\boldsymbol{\lambda}$ について

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (28)$$

が得られ、第2項は0であるから、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (29)$$

これは、(23)の状態方程式に他ならない。

3) \mathbf{u} について

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \quad (30)$$

が得られ、第2項は0であるから、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}] = \mathbf{0} \quad (31)$$

ここで、**ハミルトニアン** H を次式で定義する。

$$H \equiv f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (32)$$

ハミルトニアンはもともと力学の概念で、すべての運動は、ハミルトニアンを刻々停留するようなパスにしたがって起こるものである。力学の場合、 \mathbf{x} を位置と解釈すれば、 f_0 が位置エネルギー、 $\boldsymbol{\lambda}$ は運動量、 \mathbf{f} は速度、従って $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$ は運動エネルギーに対応する。 H を用いて、(27),(29),(31)は以下のようにまとめられる。

オイラーの正準方程式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (33)$$

停留条件：

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (34)$$

従って、非線形システムの最適制御入力 \mathbf{u} は、まず、(34)より \mathbf{u} を \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ の関数で表現し、(33)に代入して、 \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ に関する非線形微分方程式を数値的に解くことで求められる。しかし、 $t=0$ と $t=T$ において境界値が半分ずつ与えられた**2点境界値問題**となり繰り返し計算

で解かなくてはならない。 $\mathbf{x}(0)$ が与えられたときの(11)の横断性条件は、この場合

$$\boldsymbol{\eta}(T)^T \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} (f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) \Big|_{t=T} = 0 \quad \therefore \boldsymbol{\eta}(T)^T \boldsymbol{\lambda}(T) = 0 \quad (35)$$

となる。

- 1)固定終端値問題： $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{x}(T)$ が与えられた場合、 $\boldsymbol{\eta}(0)$ だけでなく $\boldsymbol{\eta}(T)$ も $\mathbf{0}$ となり、 $\boldsymbol{\lambda}$ は自由で最終的に $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{x}(T)$ が条件を満足するように決定される。
- 2)自由終端値問題： $\mathbf{x}(0)$ のみが与えられた場合で、 $\mathbf{x}(T)$ は制御の結果、ある値に定まる。この場合、 $\boldsymbol{\eta}(T) \neq \mathbf{0}$ なので、(35)より、 $\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}$ とならなければならない。

4. 線形定係数システムの最適制御

制御対象が次の状態方程式により表現された線形定係数システムとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (36)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は n 次元の状態変数ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は m 次元の入力変数ベクトルである。最小とすべき2次形式評価関数を次式で定義する。

$$J = \int_0^T \{ \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \quad (37)$$

ハミルトニアン H は、(32)より

$$H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (38)$$

となる。(33)より、

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (39)$$

が求められる。最適入力 \mathbf{u} は

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \therefore \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (40)$$

となる。(40)を(36)に代入し、次式を得る。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (41)$$

従って、(39),(41)を2点境界値問題として解くことで、 \mathbf{x} と $\boldsymbol{\lambda}$ が求まり、その結果(40)より最適制御入力 \mathbf{u} が求まる。しかし、その解法は容易ではない。

そこで、 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ が次式で表現できるものと仮定して話を進める。

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = 2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (42)$$

(42)を(41)と(39)に代入して、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (44)$$

(43)を(44)に代入して

$$(\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t))x(t) = 0 \quad (45)$$

これが、 $x(t)$ に関係なく成立するためには次式が成り立てば良い。

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t) = 0 \quad (46)$$

これをリッカチの微分方程式(Riccati differential equation)という。

$x(0)$ が与えられ、 $x(T)$ は任意とすると、自由終端値問題となり、 $\lambda(T) = 0$ である。よって、(42)より

$$P(T) = 0 \quad (47)$$

正定対称行列 $P(t)$ は、逆時間方向にオフラインで解くことによって求めることができる。

この結果、最適制御入力

$$u(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t) \quad (48)$$

で求まる。

ところで、(48)を用いてオンライン処理で制御を行うことは容易ではないだろう。そこで、制御時間 T が ∞ の場合を考える。このとき、 $P(t)$ は定数となり、次のリッカチ代数方程式を満す。

$$PA + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (49)$$

このとき、最適制御入力は

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (50)$$

となる。この場合、初期状態にあるものを原点($x(\infty) = 0$)に持って行く問題になる。 $x(\infty) \neq 0$ の場合、 $J \rightarrow \infty$ となる。

<<スカラー関数のベクトルによる微分>>

$$\text{定義} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

$$\text{公式} \quad \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{Q}^T \mathbf{x} = 2\mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (\mathbf{Q} : \text{対称行列})$$

索引

	ページ			
ARX モデル	103	最悪外乱	81	負荷トルクオブザーバ
H_∞ ノルム	68	最小次元オブザーバ	56	分散
I-P 制御系	50	最大特異値	69	ベクトル制御
LQG 制御	81	最適サーボ系	46	忘却係数
PE	104	最適フィードバック行列	40	ポポフの超安定論
PID 制御	19	最適レギュレータ	40	モデル規範適応システム
安定判別	16	雑音除去特性	71	モデル規範適応制御
一般化プラント	72	式誤差法	103	余因子行列
エルミート行列	70	システム雑音	60	ラウスの表
オイラー法	12	シミュレータ	51	ラプラス変換
オブザーバゲイン	54	周辺確率分布	67	リアプノフ法
オブザーバの極	55	出力方程式	1,3	リッカチ方程式
重み関数	72	準正定行列	41	ルンゲ・クッタ法
重みつき最小 2 乗法	102	状態推移行列	6	レギュレータ
可安定	80	状態変数	3	ロバスト
階数	27,83	状態方程式	1,3	ロバスト安定性
外乱オブザーバ	58	乗法変動	73	ロバストサーボ系
外乱抑圧特性	71	スモールゲインの定理	74	
可観測	28	正実	89	
可観測正準形式	34	正準形式	31	
拡大系	47	正定行列	41	
可検出	80	セルフチューニング	86	
可制御	27	相補感度関数	73	
可制御正準形式	32	速応性	71	
可調整モデル	85	測定雑音	60	
加法変動	76	対角正準形式	31	
カルマンゲイン	62	畳み込み積分	6	
カルマンフィルタ	60	中心解	80	
カルマン・ヤクボビッチの補題	91	超安定定理	89	
感度関数	73	直交射影の原理	62	
期待値	65	定常偏差	20	
規範モデル	85	適応オブザーバ	86	
逆行列	18	適応機構	85	
強正実	89	適応同定システム	85	
共分散行列	67	伝達関数	16	
共分散推定値	61	伝達関数行列	31	
行列式	18	同一次元オブザーバ	54	
行列の対角化	7	特性根	16	
極配置	37	特性方程式	16	
誤差方程式	52,54,57	内部モデル原理	47	
固有値	7,16	ノミナルモデル	74	
固有ベクトル	8	白色雑音	60	
混合感度問題	71,76	評価関数	40	
		標準偏差	66	