

内管が軸方向に運動する同心環状流路内の  
非ニュートン流体の十分に発達した層流熱伝達の解析  
(第2種の熱的境界条件の場合)

茂地 徹\*・桃木 悟\*  
山口 朝彦\*・東井上 真哉\*\*・Y. Lee\*\*\*

An Analysis on Fully Developed Laminar Heat Transfer  
of Power-Law Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli  
with Axially Moving Cores (The Case with the Second Kind  
Thermal Boundary Condition)

by

Toru SHIGECHI\*, Satoru MOMOKI\*, Tomohiko YAMAGUCHI\*,  
Shinya HIGASHIUE\*\*, and Y. LEE\*\*\*

The fully developed laminar heat transfer of a power-law non-Newtonian fluid in a concentric annulus with an axially moving core was studied analytically. The energy equation together with the fully developed velocity profile obtained in the previous report was numerically solved for the second kind thermal boundary conditions of constant wall heat flux at one wall with the other insulated. The effects of the radius ratio, the relative core velocity and the flow index of a non-Newtonian power-law fluid on the temperature distribution and Nusselt number were investigated.

### 1. まえがき

環状流路内の流動と伝熱の研究は、内管と外管がともに静止（固定）している場合には高温ガス炉や二重管熱交換器などの熱流動設計に関連して重要であるため古くから数多くの研究が行われてきたが、内管のみが軸方向に動く場合は応用面での要請が少なく研究もほとんど行なわれてこなかった。しかし、最近、押し出し・引き抜き・圧延などの金属やプラスチック材料の製造過程での材質制御に関連する伝熱問題や長いトンネル内を走行する列車の熱環境問題等への応用が見込まれ、内管が軸方向に運動する場合の流動・伝熱特

性に関する知見が必要とされるようになった。著者らは、内管が軸方向に運動する同心および偏心環状流路の場合について、ニュートン流体の層流と乱流の場合に対して理論解析を行い、流動と伝熱に関する重要な知見を公表している<sup>1)~5)</sup>。

前報で<sup>6)</sup>は、内管が軸方向に運動する同心環状流路内を非ニュートン流体が十分に発達した層流で流れる場合の速度場を解析し、流体の速度分布と摩擦係数に及ぼす内管と外管の半径比、内管の相対速度および指数法則で記述された非ニュートン流体の流れの指数の影響を理論的に明らかにした。

平成9年10月28日受理

\*機械システム工学科 (Dept. of Mechanical Systems Engineering)

\*\*ダイフク株式会社 (DAIFUKU, Co. Ltd)

\*\*\*オタワ大学工学部 (Fac. of Engineering, Univ. of Ottawa)

本報では、流体力学のおよび熱的に十分発達した層流熱伝達を第2種の熱的境界条件、つまり内管と外管の一方が熱流束一様で加熱され、他方が断熱されている場合に対して解析し、流体の温度分布とヌッセルト数に及ぼす内管と外管の半径比、内管の相対速度および非ニュートン流体の特性指数の影響を理論的に明らかにした結果について報告する。

### 主要記号

$c_p$	定圧比熱
$k$	熱伝導率
$n$	流れの指数 (前報 <sup>6)</sup> の式(3))
$Nu^{(2)}$	第2種境界条件の場合のヌッセルト数
$q$	壁面熱流束
$r$	半径方向座標 (Fig.1)
$r^*$	無次元半径座標 $\equiv r/R_0$
$R$	半径
$T$	温度
$u$	流体の軸方向速度 (前報 <sup>6)</sup> 参照)
$u^*$	無次元速度 $\equiv u/u_m$
$u_m$	流体の平均速度 (前報 <sup>6)</sup> の式(6))
$U$	内管の軸方向速度
$U^*$	内管の相対速度 $\equiv U/u_m$
$z$	軸方向座標
$\alpha$	内管と外管の半径比 $\equiv R_i/R_0$
$\alpha_{max}$	最大速度の生じる半径比 $\equiv R_m/R_0$
$\xi$	半径方向の無次元座標 $\equiv (r^* - \alpha)/(1 - \alpha)$
$\rho$	密度
$\theta$	無次元温度

### 添字

b	バルク
cr	臨界値
i	内壁
ii	内壁 (CASE A)
o	外壁
oo	外壁 (CASE B)

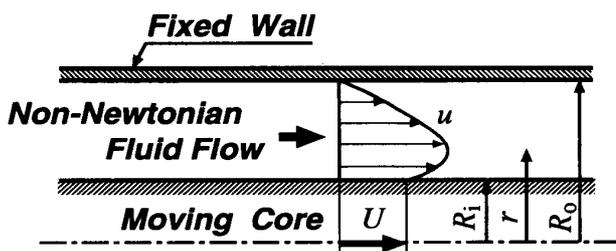


Fig. 1 Schematic of a concentric annulus with an axially moving core

## 2. 伝熱解析

Fig. 1 に示す物理モデルを考える。伝熱の解析に際して次の仮定を設定する。

- (1) 流れは非圧縮・定常層流で流体力学のおよび熱的に十分発達している。
- (2) 流体は非ニュートン流体で、せん断応力は Ostwald-de Waele<sup>7)</sup> の指数法則 (power-law model) で表わされ、物性値は一定とする。
- (3) 体積力、粘性逸散および軸方向の熱伝導は無視できる。
- (4) 内管は軸方向に速度一定で運動している。

### 2.1 内管表面が熱流束一定で加熱され、外管が断熱されている場合 (CASE A)

流体力学のおよび熱的に十分発達した流れに対する第2種境界条件の場合のエネルギー式と境界条件は次式で表される。

エネルギー式：

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] = \rho c_p u \frac{dT_b}{dz} \quad (1)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r=R_i : -k \frac{\partial T}{\partial r} = q_i \\ r=R_o : k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式(1)右辺の流速  $u$  は前報<sup>6)</sup> で得られている。

バルク温度  $T_b$  を次のように定義し、

$$T_b \equiv \frac{\iint_A u T dA}{\iint_A u dA} \quad (3)$$

式(1)を式(2)の境界条件の下で  $r$  について  $R_i$  から  $R_o$  まで積分すれば、 $\frac{dT_b}{dz}$  は次のように得られる。

$$\frac{dT_b}{dz} = \frac{2 R_i q_i}{\rho c_p u_m (R_o^2 - R_i^2)} \quad (4)$$

次式で定義される無次元温度  $\theta$  を導入する。

$$\theta \equiv \frac{T}{q_i (R_o - R_i) / k} \quad (5)$$

式(5)を用いるとエネルギー式、式(1)と境界条件、式(2)は次のように無次元化される。

エネルギー式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[ r^* \frac{d\theta}{dr^*} \right] = \left[ \frac{2\alpha}{(1+\alpha)(1-\alpha)^2} \right] u^* \quad (6)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r^* = \alpha : \frac{d\theta}{dr^*} = \left[ \frac{-1}{1-\alpha} \right] \\ r^* = 1 : \frac{d\theta}{dr^*} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

したがって、**CASE A** の場合の温度分布は式(6)の二階常微分方程式を式(7)の境界条件の下で数値的に解くことにより求まる。

内管表面におけるヌセルト数  $Nu_{ii}^{(2)}$  を次のように定義する。

$$Nu_{ii}^{(2)} \equiv \frac{[q_i / (T_i - T_b)] 2(R_o - R_i)}{k} = \left[ \frac{2}{\theta_i - \theta_b} \right] \quad (8)$$

ここに、 $\theta_b$  は無次元バルク温度で次のように定義される。

$$\theta_b \equiv \frac{T_b}{[q_i (R_o - R_i) / k]} \quad (9)$$

また、 $(\theta_i - \theta_b)$  は次のように計算できる。

$$\theta_i - \theta_b = \left[ \frac{2}{1 - \alpha^2} \right] \int_{\alpha}^1 r^* u^* (\theta_i - \theta) dr^* \quad (10)$$

## 2.2 外管表面が熱流束一定で加熱され、内管が断熱されている場合 (CASE B)

エネルギー式と境界条件は次式のように書かれる。

エネルギー式：

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] = \rho c_p u \frac{dT_b}{dz} \quad (11)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r=R_i : -k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r=R_o : k \frac{\partial T}{\partial r} = q_o \end{cases} \quad (12)$$

式(11)右辺の流速  $u$  は前報<sup>6)</sup> で得られている。

バルク温度  $T_b$  を式(3)のように定義すると、 $\frac{dT_b}{dz}$  は次のように得られる。

$$\frac{dT_b}{dz} = \frac{2 R_o q_o}{\rho c_p u_m (R_o^2 - R_i^2)} \quad (13)$$

エネルギー式と境界条件は無次元温度、

$$\theta \equiv T / [q_o (R_o - R_i) / k] \quad (14)$$

を用いると次のように変換される。

エネルギー式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[ r^* \frac{d\theta}{dr^*} \right] = \left[ \frac{2}{(1 + \alpha)(1 - \alpha)^2} \right] u^* \quad (15)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r^* = \alpha : \frac{d\theta}{dr^*} = 0 \\ r^* = 1 : \frac{d\theta}{dr^*} = \left[ \frac{1}{1 - \alpha} \right] \end{cases} \quad (16)$$

したがって、**CASE B** の場合の温度分布は式(15)の二階常微分方程式を式(16)の境界条件の下で数値的に解くことにより求まる。

外管表面におけるヌセルト数  $Nu_{oo}^{(2)}$  を次式で定義する。

$$Nu_{oo}^{(2)} \equiv \frac{[q_o / (T_o - T_b)] 2(R_o - R_i)}{k} = \left[ \frac{2}{\theta_o - \theta_b} \right] \quad (17)$$

$\theta_b$  は次のように定義する。

$$\theta_b \equiv T_b / [q_o (R_o - R_i) / k] \quad (18)$$

また、 $(\theta_o - \theta_b)$  は次のように計算できる。

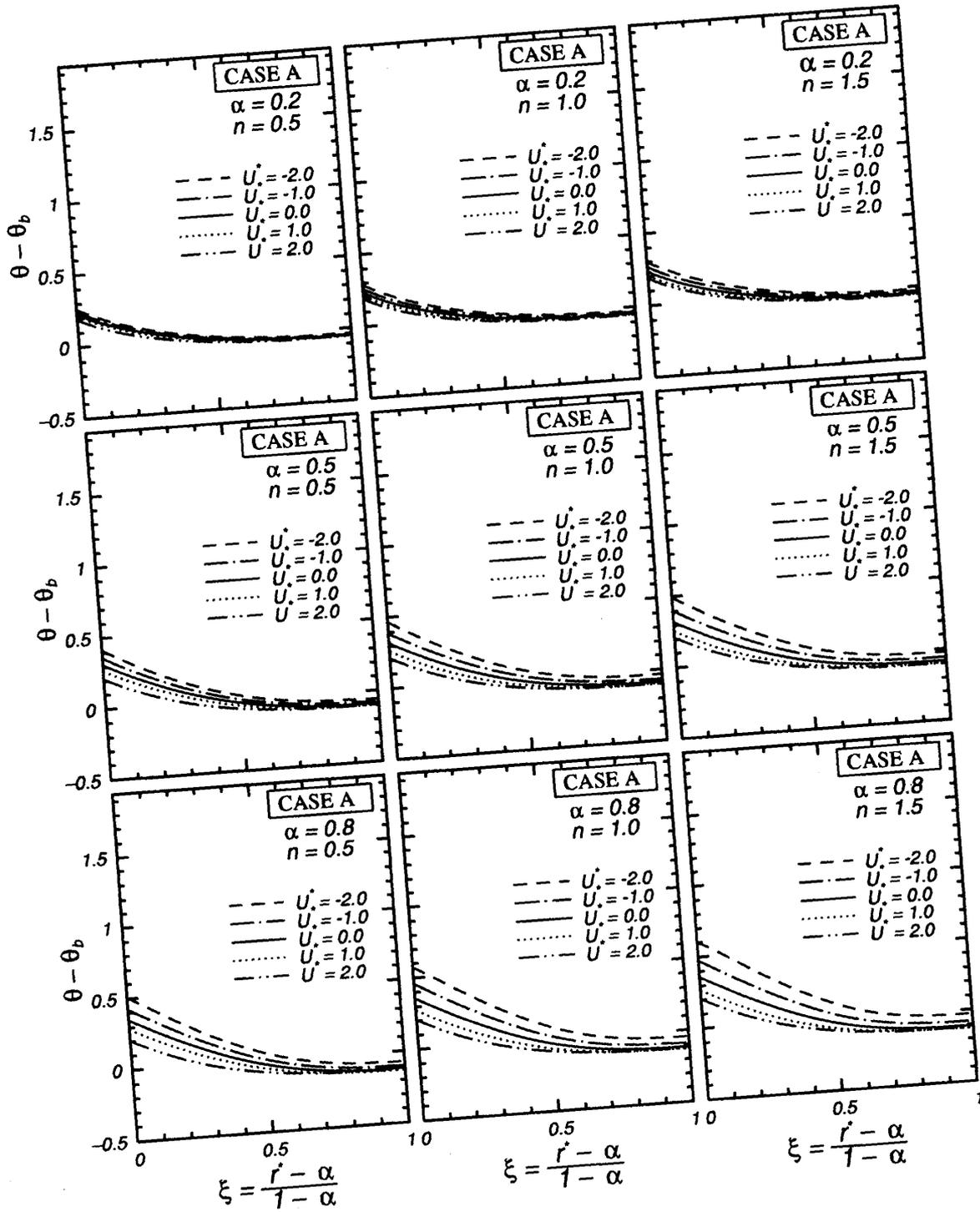
$$\theta_o - \theta_b = \left[ \frac{2}{1 - \alpha^2} \right] \int_{\alpha}^1 r^* u^* (\theta_o - \theta) dr^* \quad (19)$$

## 3. 計算結果と考察

Fig. 2(a)と(b)は、それぞれ、**CASE A** と **CASE B** の場合について、環状部断面の温度分布に及ぼす内管の相対速度  $U^*$  の影響を半径比  $\alpha=0.2, 0.5, 0.8$  の場合と流れの指数  $n=0.5, 1.0, 1.5$  の場合をまとめて示したものである。縦軸は無次元温度差  $\theta - \theta_b$ 、横軸は半径方向の無次元座標  $\xi$  であり、横軸の左端 ( $\xi=0$ ) は内管表面、右端 ( $\xi=1$ ) は外管表面を表す。 $n=1$  はニュートン流体の場合に相当する。

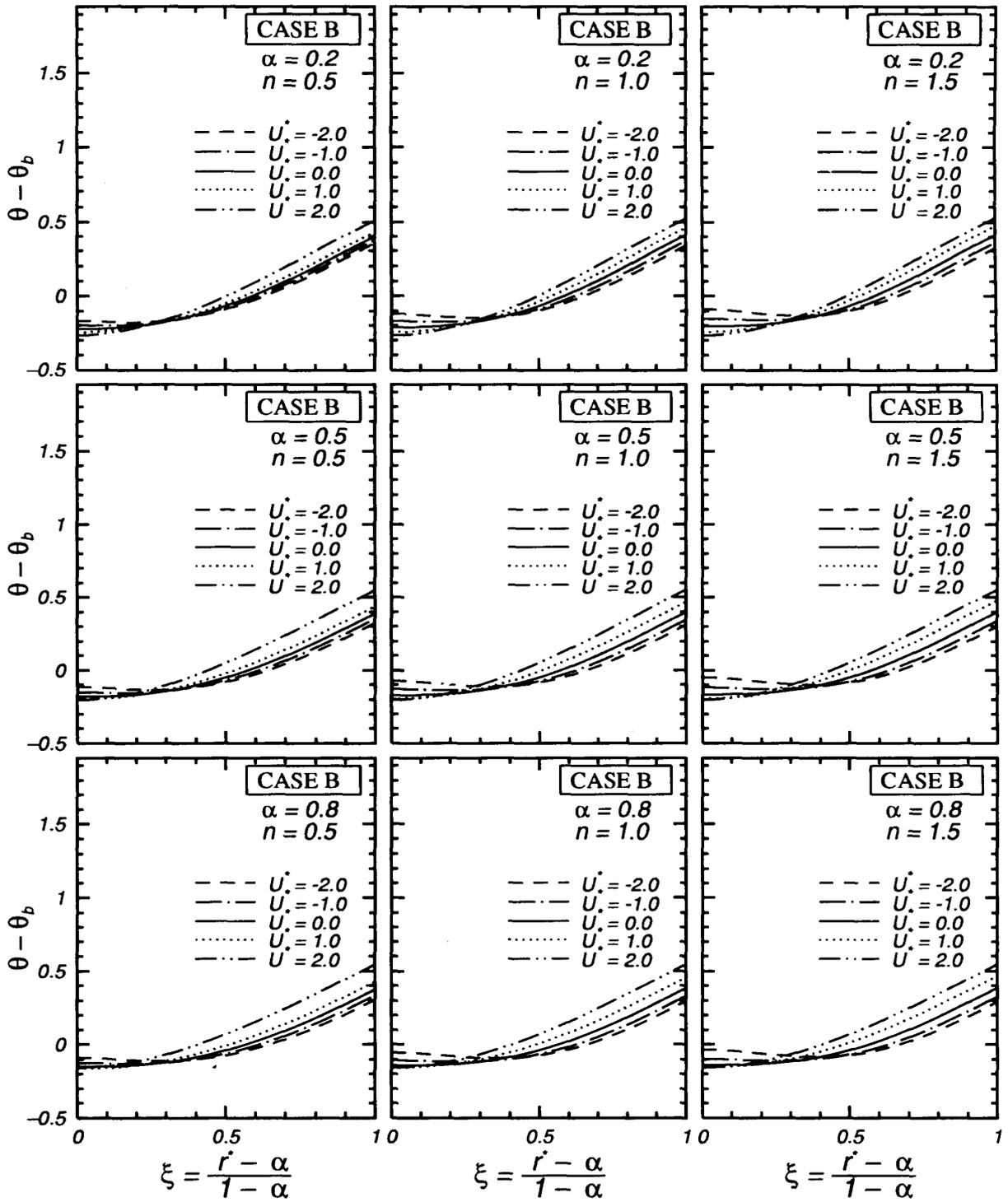
Fig. 3(a)と(b)は、それぞれ、**CASE A** と **CASE B** の場合について、 $n=0.5, 1.0, 1.5$  の場合のヌセルト数  $Nu_{ii}^{(2)}$  と  $Nu_{oo}^{(2)}$  に及ぼす内管の相対速度  $U^*$  の影響を示したものである。内管の相対速度が  $U^*=0$  の場合、つまり内管が静止している場合には本解析結果は Capobianchi & Irvine<sup>8)</sup> の数値解と0.3%以内の精度で良く一致している。**CASE A** の場合には、 $U^*$  が大きくなると  $Nu_{ii}^{(2)}$  は増加するが、**CASE B** の場合には、 $U^*$  に関して逆の傾向を示す。

Fig. 4(a)と(b)は、それぞれ、**CASE A** と **CASE B** の場合について、ヌセルト数  $Nu_{ii}^{(2)}$  と  $Nu_{oo}^{(2)}$  に及ぼす流体の指数  $n$  の影響を示している。これらの図から、ヌセルト数  $Nu_{ii}^{(2)}$  と  $Nu_{oo}^{(2)}$  に及ぼす  $n$  の影響は  $\alpha$  や  $U^*$  の大きさにかかわらず、小さいことが明らかである。



(a) CASE A

Fig. 2 Effect of  $U^*$  on temperature profile



(b) CASE B

Fig. 2 Effect of  $U^*$  on temperature profile

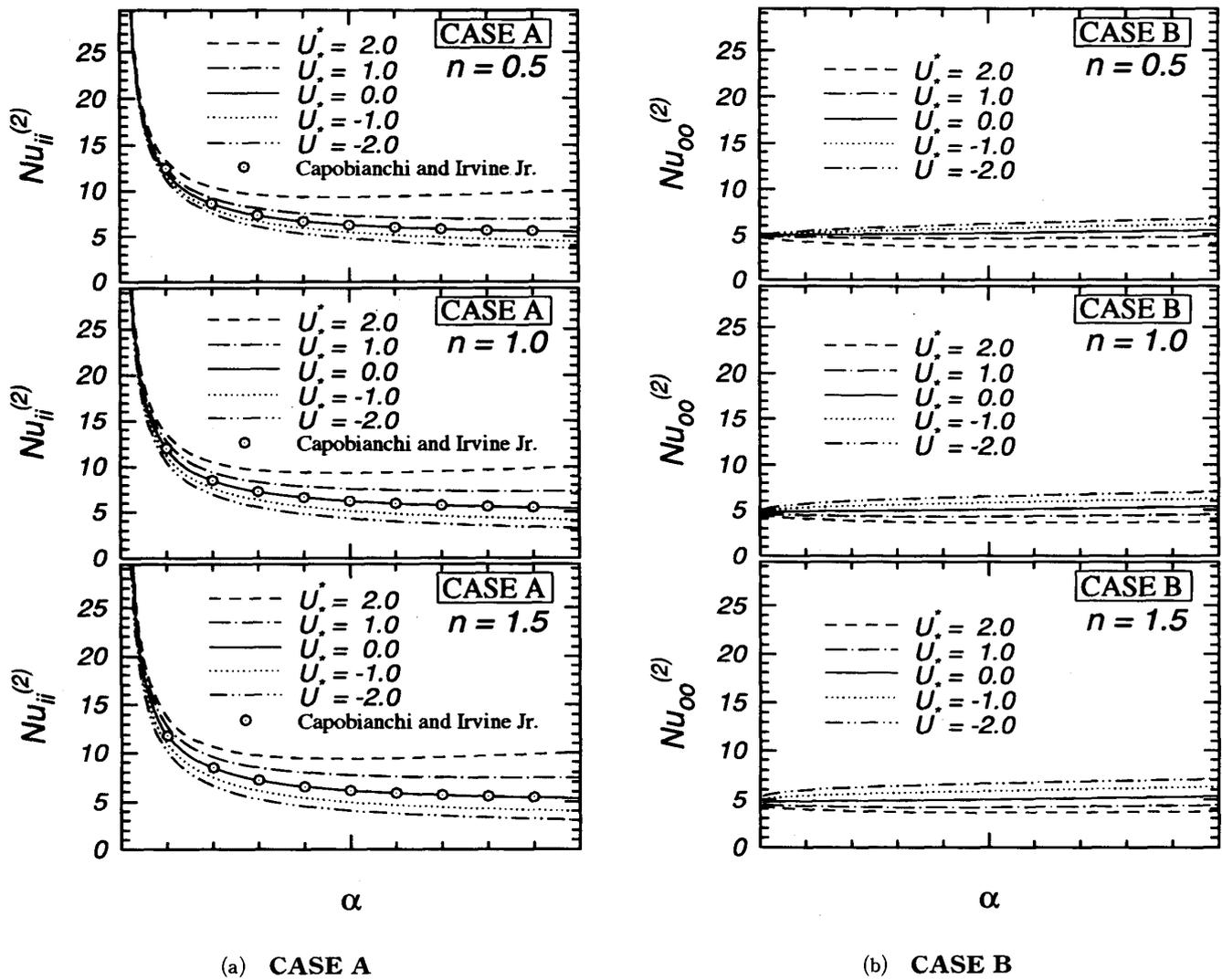
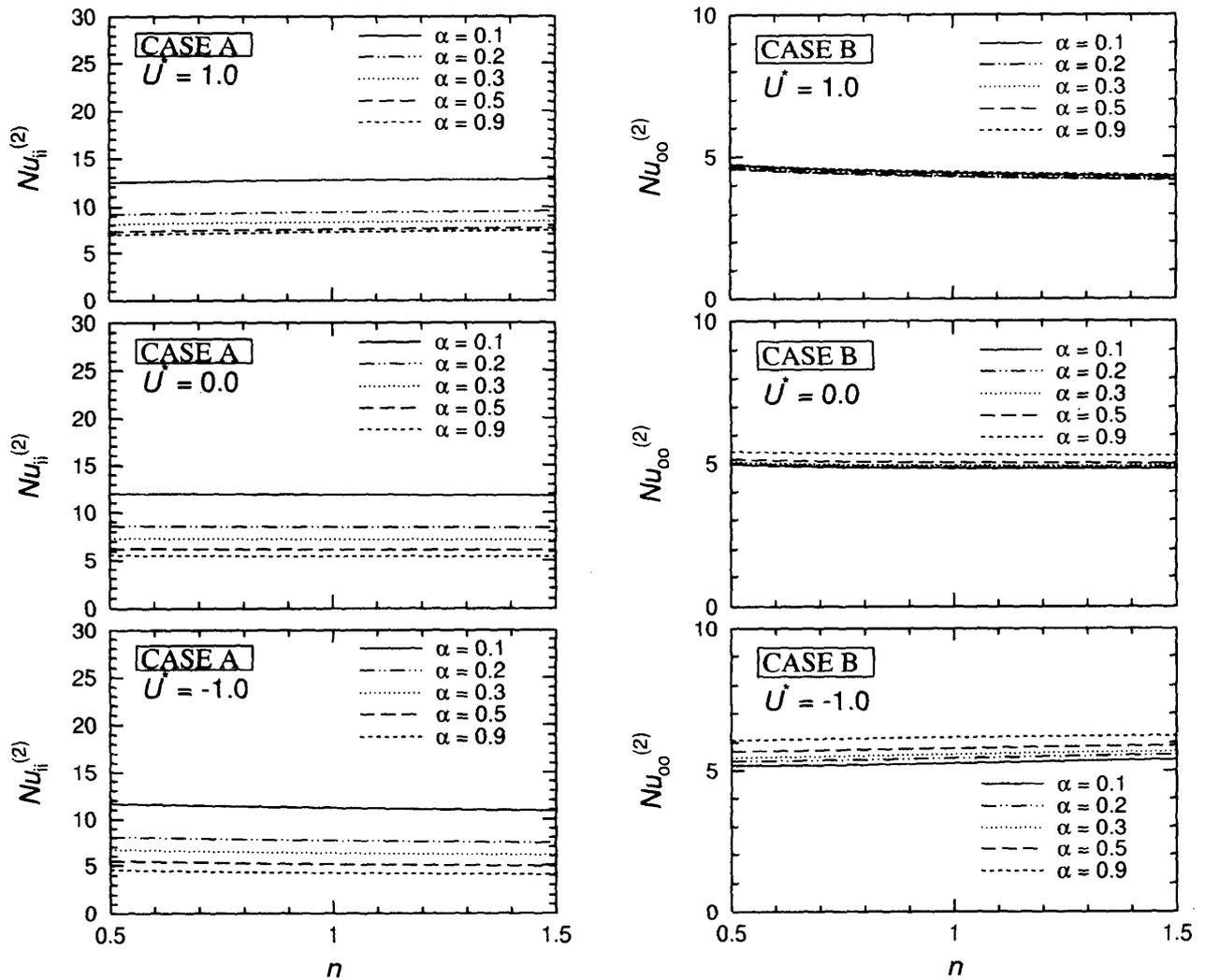


Fig. 3 Effect of  $U^*$  on Nusselt numbers,  $Nu_{ii}^{(2)}$  and  $Nu_{oo}^{(2)}$

4. むすび

内管が軸方向に運動する同心環状流路内を流れる非ニュートン流体の流体力学および熱的に十分発達した層流熱伝達を、指数法則 (power-law model) を用いて得られた速度<sup>6)</sup>を用いて解析した。流体の温度

分布とヌッセルト数に及ぼす内管と外管の半径比 $\alpha$ 、流れの指数  $n$  および内管の相対速度  $U^*$  の影響を、パラメーター $\alpha$ ,  $n$  および  $U^*$  の広い範囲にわたって明らかにした。



(a) CASE A

(b) CASE B

Fig. 4 Effect of  $U^*$  on Nusselt numbers,  $Nu_{fi}^{(2)}$  and  $Nu_{oo}^{(2)}$

参考文献

- 1) T. Shigechi, *et al.*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, (1990), 2029.
- 2) T. Shigechi & Y. Lee, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**, (1991), 2593.
- 3) Y. Lee & T. Shigechi, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**, (1992), 3488.
- 4) T. Shigechi, *et al.*, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **115**, (1993), 1061.
- 5) T. Shigechi, *et al.*, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **118**, (1996), 205.
- 6) 茂地 他, 長崎大学工学部研究報告, **27**, (1997), 199.
- 7) R. B. Bird, *et al.*, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons(1960), 11.
- 8) M. Capobianchi & T. F. Irvine Jr., *Wärme-und Stoffübertragung*, **27**, (1992), 209.