

## 鉄損を考慮した誘導モータの数学モデルとベクトル制御

辻 峰男\*・本城 隆\*\*  
泉 勝弘\*\*\*Mathematical Models and Vector Control System of Induction Motor  
Taking into Account Iron Loss

by

Mineo TSUJI\*, Takashi HONJO\*\* and Katsuhiko IZUMI\*\*\*

With the rapid development of microelectronics, it is possible to realize an advanced control algorithm for an induction motor drive system. From the viewpoints of high accuracy torque control and high efficiency, the iron loss has attracted special interest recently. In this paper, we develop the mathematical models for induction motors taking into account the iron loss. Representative models are derived from a  $d-q$  model that has an equivalent eddy current circuit to describe the iron loss. By using this model, we propose a new vector control method to improve the torque accuracy. Since this method includes a conventional slip-frequency type vector control block, it is easy to add this algorithm to conventional system. An efficiency maximizing method of this system is also presented by changing the flux command. Simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

## 1. まえがき

最近のマイクロエレクトロニクス技術の進歩は、高性能の制御アルゴリズムをオンラインで実現可能とし、モータのトルク制御技術に新しい可能性を提供している。また、エネルギー問題は世界的な課題で、特に電力消費のかなりの部分を占めるモータ応用製品の高効率化が強く望まれている。誘導モータは構造が簡単で安価であることから広く利用されており、トルク制御と省エネルギー制御の研究が、電気自動車など新しい応用を考えるうえでも注目を集めている。

高性能トルク制御や省エネルギー制御を実現するためには、誘導モータの精密な数学モデルを必要とし、トルク精度や効率に重大な影響を及ぼす鉄損を考慮する必要がある。しかし、定常状態のみならず過渡状態でも利用できる二軸理論では、一般に鉄損が無視されている。鉄損を考慮したモデルも幾つか提案されているが、各モデルの特徴や関連が不明確で、これから導

かれたベクトル制御や省エネルギー制御には、磁束制御が考慮されていないものやベクトル制御演算が一般の滑り周波数制御形のベクトル制御と大きく異なって複雑であるものなどがあり十分とは言い難い<sup>(1)(5)</sup>。

本稿では、鉄損を考慮した数学モデルの中で最も一般的と考えられる等価回路で表した $d-q$ モデルから、定常等価回路を含めた他の数学モデルを導出し、モデル相互の関連を明確にする。次に、鉄損を考慮した $d-q$ モデルから出発して、理論の一般性を保ちながら、鉄損を考慮していない従来の滑り周波数制御形のベクトル制御を包含した新方式を提案する。また、最大効率制御に関し、本方式に基づく磁束指令の制御法も提案する。

## 2. 誘導モータの数学モデル

本章では、誘導モータの基本モデルと鉄損を考慮したモデルについて述べる。

平成14年4月19日受理

\*電気電子工学科 (Department of Electrical and Electronic Engineering)

\*\*大学院生産科学研究科 (Graduate student, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science)

\*\*\*有明工業高等専門学校電気工学科 (Ariake National College of Technology)

## 2.1 基本モデル

$\omega = 0$  も含め任意の角速度  $\omega$  で回転する  $d$ - $q$  座標系で表された誘導機の電圧方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s P & -\omega L_s & MP \\ \omega L_s & R_s + L_s P & \omega M \\ MP & -(\omega - \omega_r) M & R_r + L_r P \\ (\omega - \omega_r) M & MP & (\omega - \omega_r) L_r \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\omega M \\ MP \\ -(\omega - \omega_r) L_r \\ R_r + L_r P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\alpha$ - $\beta$  静止座標系の場合には、(1)式で、 $\omega = 0$  とおき、 $d$ - $q$  量を  $\alpha$ - $\beta$  量に置き換えればよい。(例えば、 $e_{sd} \rightarrow e_{\alpha\alpha}$ ,  $e_{sq} \rightarrow e_{\alpha\beta}$ ,  $i_{sd} \rightarrow i_{\alpha\alpha}$  など)。(1)式で、二次電流の代わりに二次鎖交磁束を用いると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s P & -\omega \sigma L_s & MP/L_r \\ \omega \sigma L_s & R_s + \sigma L_s P & \omega M/L_r \\ -M/\tau_r & 0 & 1/\tau_r + P \\ 0 & -M/\tau_r & \omega - \omega_r \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\omega M/L_r \\ MP/L_r \\ -(\omega - \omega_r) \\ 1/\tau_r + P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} \quad (2)$$

但し、 $P = d/dt$

$$\phi_{rd} = M i_{sd} + L_r i_{rd}$$

$$\phi_{rq} = M i_{sq} + L_r i_{rq}$$

$$\tau_r = L_r / R_r, \quad \sigma = 1 - M^2 / (L_s L_r)$$

発生トルクは、極対数を  $p$  とすると

$$\begin{aligned} \tau_e &= pM (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \\ &= pM (i_{sq} \phi_{rd} - i_{sd} \phi_{rq}) / L_r \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

(2)式に、 $\phi_{rq} = 0$  を代入すると次式を得る。

$$\phi_{rd} = \frac{M i_{sd}}{1 + \tau_r P} \quad (4)$$

$$\omega = \omega_r + \frac{M i_{sq}}{\tau_r \phi_{rd}} \quad (5)$$

ベクトル制御では、逆に(4)、(5)式を満たすように制御することで、実際に  $\phi_{rq} = 0$  を達成しようとするもので、それが実現できると(3)式より、トルクは  $i_{sq}$ ,  $\phi_{rd}$  に比例する。

## 2.2 鉄損を考慮したモデル

図1に固定子鉄損を考慮するための等価うず電流回路をもった誘導機の巻線モデルを示す<sup>(1)</sup>。図で  $sd$ ,  $sq$  は固定子、 $rd$ ,  $rq$  は回転子、 $cd$ ,  $cq$  はうず電流回路を示す。

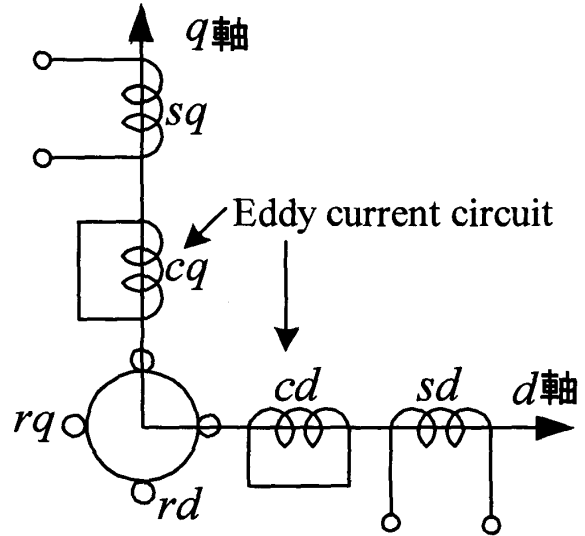


Fig. 1 Winding model of induction motor taking into account iron loss.

$\omega = 0$  も含め任意の角速度  $\omega$  で回転する  $d$ - $q$  座標系で表された図1の誘導機の電圧方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s P & -\omega L_s & MP \\ \omega L_s & R_s + L_s P & \omega M \\ MP & -(\omega - \omega_r) M & R_r + L_r P \\ (\omega - \omega_r) M & MP & (\omega - \omega_r) L_r \\ MP & -\omega M & MP \\ \omega M & MP & \omega M \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\omega M \\ MP \\ -(\omega - \omega_r) L_r \\ R_r + L_r P \\ -\omega M \\ MP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{cd} \\ i_{cq} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、回転子巻線と等価うず電流回路の抵抗及びインダクタンスは固定子側へ換算している。簡単のため、うず電流回路の漏れインダクタンスを無視し、

$$L_c = M \quad (7)$$

と仮定する。また、励磁電流及び鎖交磁束を次式で定義する。

$$i_{md} = i_{sd} + i_{rd} + i_{cd} \quad (8)$$

$$i_{mq} = i_{sq} + i_{rq} + i_{cq} \quad (9)$$

$$\phi_{sd} = l_s i_{sd} + M i_{md} \quad (10)$$

$$\phi_{sq} = l_s i_{sq} + M i_{mq} \quad (11)$$

$$\phi_{rd} = l_r i_{rd} + M i_{md} \quad (12)$$

$$\phi_{rq} = l_r i_{rq} + M i_{mq} \quad (13)$$

ここで、 $l_s$ 、 $l_r$ ：一次、二次漏れインダクタンス  
このとき、(6)式は、以下のように表せる。

$$e_{sd} = R_s i_{sd} + P \phi_{sd} - \omega \phi_{sq} \quad (14)$$

$$e_{sq} = R_s i_{sq} + P \phi_{sq} + \omega \phi_{sd} \quad (15)$$

$$0 = R_r i_{rd} + P \phi_{rd} - (\omega - \omega_r) \phi_{rq} \quad (16)$$

$$0 = R_r i_{rq} + P \phi_{rq} + (\omega - \omega_r) \phi_{rd} \quad (17)$$

$$0 = M P i_{md} - \omega M i_{mq} + R_c i_{cd} \quad (18)$$

$$0 = M P i_{mq} + \omega M i_{md} + R_c i_{cq} \quad (19)$$

モータが発生するトルクは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_e &= pM \{i_{rd}(i_{sq} + i_{cq}) - i_{rq}(i_{sd} + i_{cd})\} \\ &= p(\phi_{rq} i_{rd} - \phi_{rd} i_{rq}) \\ &= p(M/L_r) \{\phi_{rd}(i_{sq} + i_{cq}) - \phi_{rq}(i_{sd} + i_{cd})\} \end{aligned} \quad (20)$$

なお、(8)～(20)式は、 $i_{cd}$ 、 $i_{cq}$ をそれぞれ、 $-i_{cd}$ 、 $-i_{cq}$ と定義し直すことにより、文献(5)、(6)で用いられた式と一致する。文献(6)が参照している文献(8)では空間ベクトルによるモデルを使用している。なお、文献(5)が参照している文献(7)では、回転子鉄損や磁束の飽和も考慮されている。

$\alpha$ - $\beta$  静止座標系の場合には、上記の式で、 $\omega = 0$ とおき、文字 $d$ 、 $q$ をそれぞれ $\alpha$ 、 $\beta$ に置き換えればよい。

空間ベクトルを用いたモデルも容易に導出できる。空間ベクトルを次式で定義する。

$$\dot{e}_s = e_{sd} + j e_{sq} \quad (21)$$

$$\dot{i}_s = i_{sd} + j i_{sq} \quad (22)$$

$$\dot{i}_r = i_{rd} + j i_{rq} \quad (23)$$

$$\dot{\phi}_s = \phi_{sd} + j \phi_{sq} \quad (24)$$

$$\dot{\phi}_r = \phi_{rd} + j \phi_{rq} \quad (25)$$

$$\dot{i}_m = i_{md} + j i_{mq} \quad (26)$$

$$\dot{i}_c = i_{cd} + j i_{cq} \quad (27)$$

これを用いると、(14)～(19)式は次式となる。

$$\dot{e}_s = R_s \dot{i}_s + P \dot{\phi}_s + j \omega \dot{\phi}_s \quad (28)$$

$$0 = R_r \dot{i}_r + P \dot{\phi}_r + j(\omega - \omega_r) \dot{\phi}_r \quad (29)$$

$$0 = R_c \dot{i}_c + M P \dot{i}_m + j \omega M \dot{i}_m \quad (30)$$

なお、(10)～(13)式より

$$\dot{\phi}_s = l_s \dot{i}_s + M \dot{i}_m \quad (31)$$

$$\dot{\phi}_r = l_r \dot{i}_r + M \dot{i}_m \quad (32)$$

が成立する。

文献(8)では、これらの式にさらにヒステリシス損を別に考慮したモデルが用いられている。

### 2.3 鉄損を考慮した近似モデル

鉄損を考慮すると6次の微分方程式となるが、これを4次に近似することで制御に利用し易くなる。このためには、電源の周波数 $\omega$ に同期した回転座標系で、うず電流回路の過渡現象を無視し、(18)、(19)式の微分の項を0と考えればよい。

このとき漏れ磁束分を除いた鎖交磁束は(8)、(9)式より次式で与えられる。

$$M i_{md} = M_m (i_{sd} + i_{rd}) + a (i_{sq} + i_{rq}) \quad (33)$$

$$M i_{mq} = M_m (i_{sq} + i_{rq}) - a (i_{sd} + i_{rd}) \quad (34)$$

ここで、 $a = R_m / \omega$

$$R_m = \frac{R_c (\omega M)^2}{R_c^2 + (\omega M)^2} \quad (35)$$

$$M_m = \frac{M R_c^2}{R_c^2 + (\omega M)^2} \quad (36)$$

上式を用いて、(14)～(17)式の鎖交磁束を電流で表すと次式の電圧方程式が得られる<sup>1)</sup>。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + R_m + L'_s P & -\omega L'_s + a P \\ \omega L'_s - a P & R_s + R_m + L'_s P \\ \omega_s a + M_m P & -\omega_s M_m + a P \\ \omega_s M_m - a P & \omega_s a + M_m P \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ここで、 $L'_s = l_s + M_m$ 、 $L'_r = l_r + M_m$ 、 $\omega_s = \omega - \omega_r$ 、(37)式は、後述の直列励磁回路の定数を含む。なお、 $R_c = \infty$ で $R_m = 0$ のとき、上式は基本モデルに一致する。(37)式で、更に $a P = 0$ とした近似式が文献(9)で用いられている。

定常状態の等価回路は、(28)～(30)式で、 $\omega = 0$ の静止座標系で考え、改めて $P = j\omega$  ( $\omega$ ：電源角周波数)とおき、さらに空間ベクトルをフェーザに置き換えることで次式が得られる。

$$\dot{E}_s = R_s \dot{I}_s + j \omega \dot{\Psi}_s \quad (38)$$

$$0 = R_r \dot{I}_r + j(\omega - \omega_r) \dot{\Psi}_r \quad (39)$$

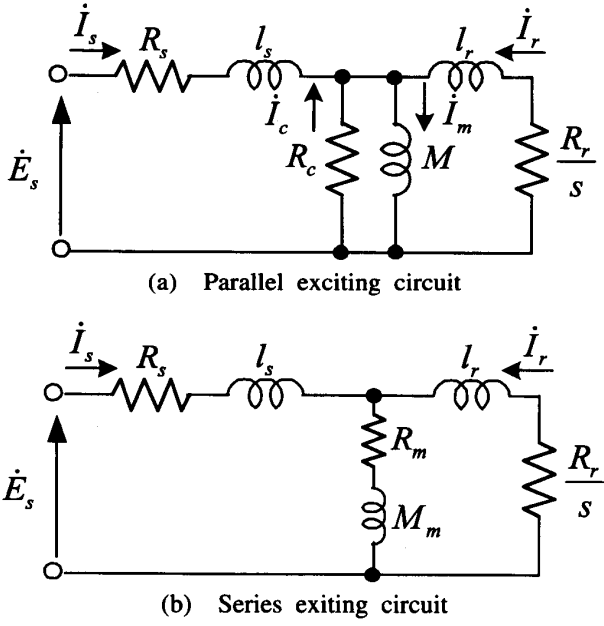


Fig. 2 Steady-state equivalent circuit.

$$0 = R_c \dot{i}_c + j\omega M \dot{i}_m \quad (40)$$

これより、図2(a)が得られる。励磁回路を直列回路に変換すると(b)が得られる。 $R_m$ ,  $M_m$ は、(35), (36)式で定義したものと一致する。直列回路の $R_m$ は、並列回路の $R_c$ に比べ周波数に対する変化が大きい<sup>(10)</sup>。なお、鉄損抵抗を固定子側のインダクタンスに並列に配置する4次のモデルも提案されている<sup>(11)</sup>。

### 3. 鉄損を考慮したベクトル制御

二次磁束に同期して回転するd-q座標系を選び、d軸を二次磁束の方向に一致させると

$$\phi_{rq} = 0 \quad (41)$$

とおける。(16)式に(8), (12)式を用いると

$$\phi_{rd} = \frac{M}{\tau_r P + 1} (i_{sd} + i_{cd}) \quad (42)$$

が得られる。また、(9), (13), (17)式より、次式が求まる。

$$\omega = \omega_r + \frac{M}{\tau_r \phi_{rd}} (i_{sq} + i_{cq}) \quad (43)$$

鉄損回路の過渡現象を無視し、(18), (19)式の微分項を0とおくと、鉄損回路の電流は次式で表せる。

$$i_{cd} = \frac{\omega M l_r}{R_c L_r} (i_{sq} + i_{cq}) \quad (44)$$

$$i_{cq} = -\frac{\omega M}{R_c L_r} \{ \phi_{rd} + l_r (i_{sd} + i_{cd}) \} \quad (45)$$

トルクは(20)式より

$$\tau_e = p (M/L_r) \phi_{rd} (i_{sq} + i_{cq}) \quad (46)$$

となる。これらの式から鉄損を考慮したベクトル制御を図3のように提案する。

### 4. 最大効率制御

定常状態で $R_c$ の鉄損と $R_s$ ,  $R_r$ の銅損の和を $P_{loss}$ とすると、 $P_{loss}$ は次式で与えられる。

$$P_{loss} = R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + R_r (i_{rd}^2 + i_{rq}^2) + R_c (i_{cd}^2 + i_{cq}^2) \quad (47)$$

である。定常状態で、(41)式が成立するとして、(47)式中の電流をすべて、 $i_{md}$ ,  $i_{mq}$ で表すと、次式を得る。

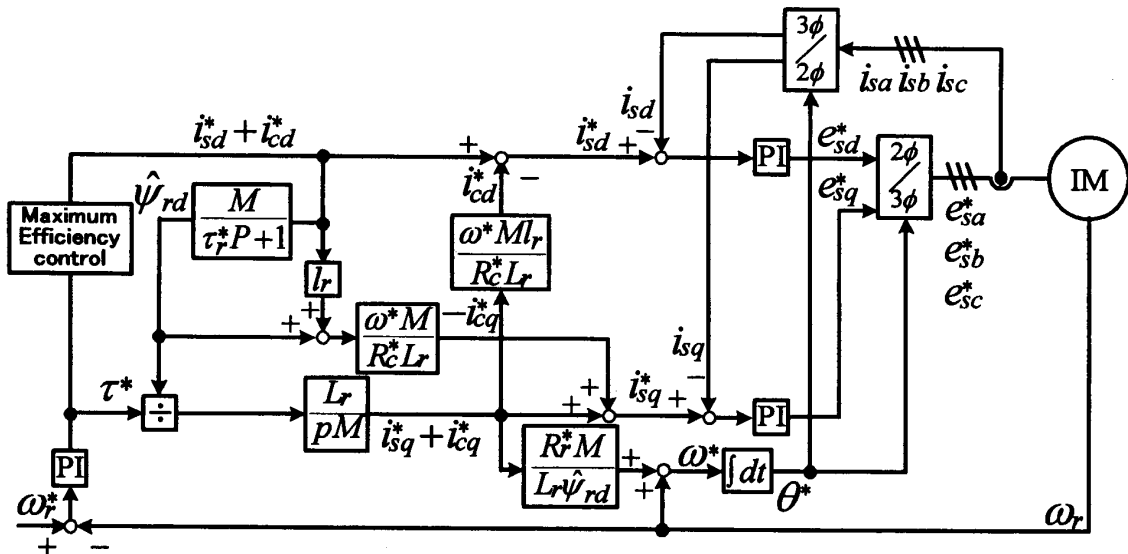


Fig. 3 Vector control system taking into iron loss.

$$P_{loss} = Ai_{md}^2 + Bi_{mq}^2 + 2R_s \frac{M}{l_r} \frac{\omega M}{R_c} i_{md} i_{mq} \quad (48)$$

ここで,

$$A = R_s \left\{ 1 + \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2 \right\} + R_c \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2$$

$$B = R_s \left\{ \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2 + \left( \frac{L_r}{l_r} \right)^2 \right\} + R_c \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2 + R_r \left( \frac{M}{l_r} \right)^2$$

発生トルクは、(41)式が成立するとき

$$\tau_e = p (M^2 / l_r) i_{md} i_{mq} \quad (49)$$

と表せる。(48)式の第3項は発生トルクに比例するので一定とし、損失を最小化するように電流を配分すると、次式を得る。

$$|i_{mq} / i_{md}| = \sqrt{A/B} \quad (50)$$

よって、磁束電流指令を次式で与えると効率は最大となる。

$$i_{sd} + i_{cd} = \sqrt{C \tau_e^* / p} / M \quad (51)$$

ただし、

$$C = \sqrt{\frac{R_s \left\{ \left( \frac{\omega M l_r}{R_c} \right)^2 + L_r^2 \right\} + R_c \left( \frac{\omega M l_r}{R_c} \right)^2 + R_r M^2}{R_s \left\{ 1 + \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2 \right\} + R_c \left( \frac{\omega M}{R_c} \right)^2}}$$

## 5. 解析結果

1.5kWの誘導モータで、回転速度指令のステップ変化に対するシミュレーション応答を中速及び高速運転に対しそれぞれ図4、図5に示す。図(a)は鉄損を制御器側に考慮していない場合で、図3で $R_c^* \rightarrow \infty$ に相当し、(b)は制御器側に鉄損を考慮した提案方式の結果である。実際の誘導モータは、(8)~(20)式により鉄損を厳密に考慮したモデルで計算している。なお、比較のため効率制御は省いている。制御器側に鉄損を考慮していない場合、トルクと二次磁束の波形において制御器の演算値と実際値に差が生じているが、(b)の提案方式では演算値と実際値がほとんど一致している。また、図4より図5の方が差が大きくなっており、高速時は鉄損の影響を受けやすいことがわかる。

図6は、回転数が(a)500rpmの時と(b)1700rpmでの負荷トルクに対する効率の定常特性である。最大効率制御は(51)式を用いて磁束電流指令値をトルク指令値によって変化させて解析した。磁束一定制御方式では、(a)、(b)とも低トルク領域で効率が悪化しているのに対し、最大効率制御による結果では全トルク領域で最大効率が得られている。

## 6. あとがき

鉄損を考慮した誘導モータの数学モデルに関し、系統的理論展開を行った。この結果、等価うず電流回路を有する $d-q$ モデルは一般的で、これらの解析・制御の出発点として有用であると考えられる。また、こ

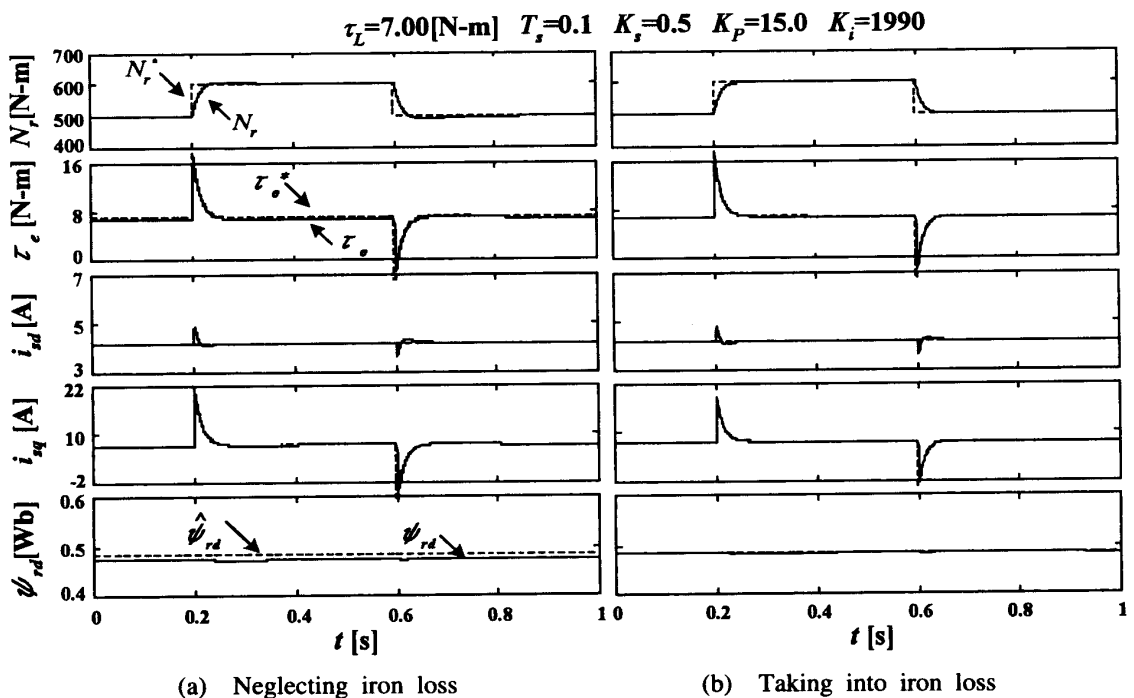
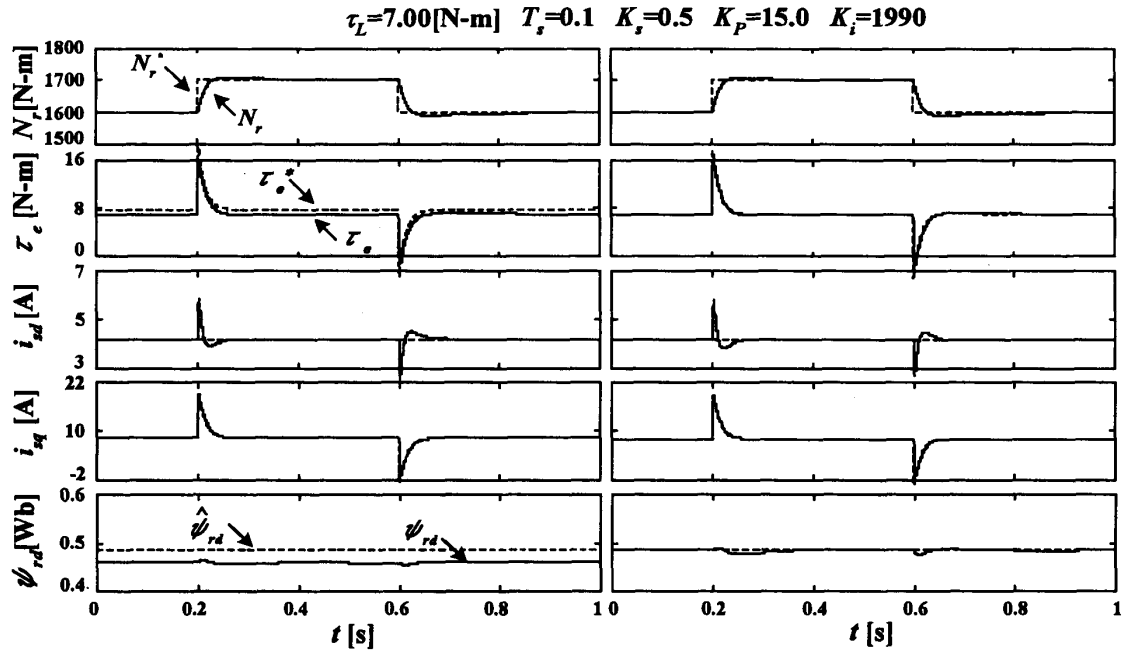


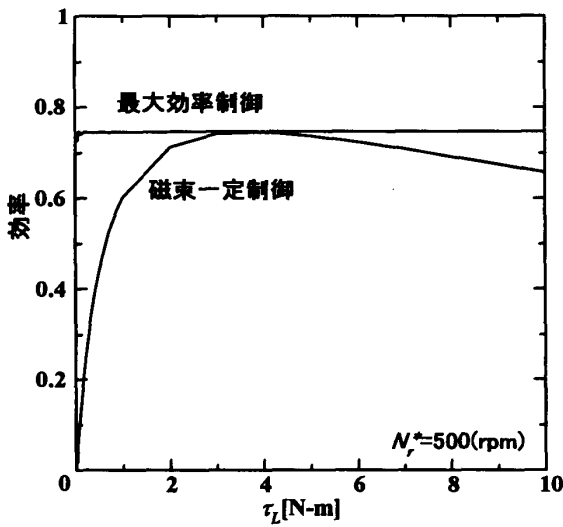
Fig. 4 Step responses for the step change of speed command ( $N_r^* = 500\text{rpm}$ ).



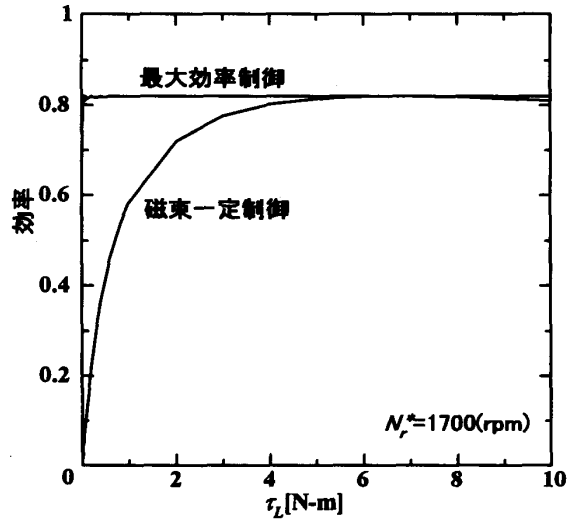
(a) Neglecting iron loss

(b) Taking into iron loss

Fig. 5 Step responses for the change of speed command ( $N_r^* = 1600\text{rpm}$ ).



(a)  $N_r^* = 500\text{rpm}$



(b)  $N_r^* = 1700\text{rpm}$

Fig. 6 Load torque versus efficiency characteristics.

のモデルに立脚し比較的簡単な構成のベクトル制御法を最大効率制御をも含めて提案し、シミュレーションによりその有効性を確認した。

参考文献

(1)水野・高山・市岡・寺島：「固定子鉄損を考慮した誘導電動機の非干渉制御法」電学論D, 109, 841(1989)  
 (2)金原・小山：「鉄損を考慮した誘導電動機の高効率・高応答ベクトル制御法」平成7年電気学会産

業応用部門大会, No.68, 201(1995)

(3)渡辺・笠：「鉄損を考慮したベクトル制御誘導電動機の最大効率制御」SPC-97-125, 53(1997)  
 (4)K. Matuse, shizumi, S. Katsuta, Taniguchi : "High-Response Flux Control of Direct-Field-Oriented Induction Motor with high Efficiency Taking Core Loss into Account" IEEE Trans. IA vol.35, 62 (1999)  
 (5)E.Levi : "Impact of Iron Loss on Behavior of Vector Controlled Induction Machines", IEEE

Trans. IA, vol.31, 1287(1995)

- (6) 岸本・松本・鎌倉・大上：「電圧形インバータによる誘導電動機駆動系の安定性解析」電学論 B, 106, 737(1986)
- (7) I.Boldea, S.A.Nasar：「Unifield Treatment of Core Losses and Saturation in the Orthogonal-Axis Model of Electric Machines」IEE Proceedings, vol.134, Pt.B, 355(1987)
- (8) 石田・上田：「鉄損と主磁束の飽和を考慮した電流形インバータ駆動誘導電動機系の安定性」電学論 B, 100, 461(1980)
- (9) J.Jung, K.Nam："A Vector Control Scheme for EV Induction Motors with a Series Iron Loss Model", IEEE Trans. IE vol.45, 617(1998)
- (10) 開道：「回転機における鉄損挙動について」電気学会回転機研究会資料, RM-00-119, 53(2000)
- (11) 新中：「固定子鉄損を含む誘導モータの新数学モデルの提案」電学論 D, 119, 142(1999)
- (12) 辻・久保田・内藤：「誘導電動機モデル及び高性能制御」平成13年電気学会産業応用部門大会シンポジウム S11-2, vol.3, 1127
- (13) 辻・本城・泉・山田：「鉄損を考慮した誘導モータベクトル制御の一方式」平成13年電気学会産業応用部門大会, No.129, vol.2, 711