

## 繊維強化型積層板の自由振動特性に関する研究

森田 千尋\* ・山下 祐介\*\* ・松田 浩\*\*\*  
崎山 毅\*\*\* ・黄 美\*\*\* ・胡 夏夏\*\*\*\*

## Study on Characteristic of Vibration of Laminated Composite Plates

by

Chihiro MORITA\* ・ Yusuke YAMASHITA\*\* ・ Hiroshi MATSUDA\*\*\*

Takeshi SAKIYAMA\*\*\* ・ Mei HUANG\*\*\* and Xiaxia HU\*\*\*\*

In this paper, a discrete method for analyzing the free vibration problem of laminated composite plates is proposed. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The characteristic equation of the free vibration is derived by applying the Green function which is obtained as a discrete solution of differential equations governing the flexural behavior of the laminated composite plates under the action of a concentrated load. By applying the characteristic equation, the behavior of the free vibration of the laminated composite plates can be analyzed efficiently without a calculation by trail and error method.

The vibration frequencies and modes were obtained by this method, and compared with the other analytical results and experimental results by laser holography.

## 1. はじめに

繊維強化型複合材料 (FRP)は、比強度、比剛性および軽量性に優れており、航空機産業などの分野で発達してきている。この材料は、樹脂と繊維を組み合わせることによって、単独では持ち得なかった性能を得ることができ、組み合わせる種類によって幅広い性能が得られることから、tailor-madeの材料とも言える。土木工学分野においても、プレストレスコンクリート緊張ケーブルやグラウトアンカー、コンクリート補強などへの用途が一般的なものとなりつつあり、さらに積極的な利用方法として、鉄やコンクリートに代わる一次土木構造材料としての用途が注目されている<sup>1)</sup>。

繊維強化型複合材料の一次土木構造材料としての適用は、土木構造物の軽量化によるコストダウン、長寿命化による維持管理労力の軽減などの利点が期待できる一方、土木工学分野では経験の少ない異方性材料で

あること、土木での長期的耐久性データが少ないこと、弾性係数が比較的小さいことなど、解決すべき課題も多い。

そこで本論文では、繊維強化型積層板の自由振動問題に着目して、まず、グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法<sup>2)</sup>を提示し、本解析法による結果と既往の結果を比較することにより、本解析法の妥当性を検証する。

さらに、レーザーホログラフィーを用いた振動実験により、振動数、振動モードなどの自由振動特性を明らかにするとともに、本解析結果と比較し、積層順序などが片持ち積層板の自由振動特性に及ぼす影響を明らかにすることを目的としている。

## 2. 解析手法

## 2.1 基礎微分方程式

平成14年 4月19日受理

\* 大学院生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

\*\* 大学院博士前期課程環境システム工学専攻 (Graduate Student, Department of Structural Engineering)

\*\*\* 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

\*\*\*\* 外国人客員研究員 (JSPS Postdoctoral Fellowship, Visiting Researcher)

図1に示す積層板は、 $N$ 層のラミナから成り、各ラミナは均質な直交異方性材料とし、密度および厚さは同じであり、それぞれ完全に密着しているものと仮定する。図1に示すように、材料の直交異方性主軸を(1, 2, 3)で表わし、主軸1と2はそれぞれ $x$ 軸と $y$ 軸に対し傾き $\theta$ (プライ配向角)だけ傾いているものとする。

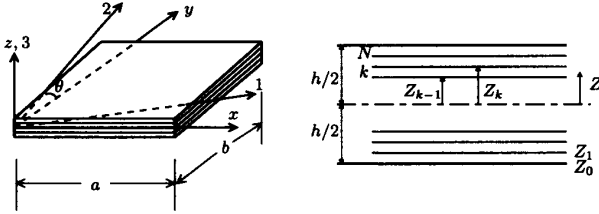


図1：積層板

板厚中央面に対して面内変位成分を $u$ ,  $v$ , および垂直方向の変位成分を $w$ とし、面内力を $N_{xy}$ ,  $N_y$ および $N_x$ , せん断力を $Q_y$ ,  $Q_x$ , ねじりモーメントを $M_{xy}$ , 曲げモーメントを $M_y$ ,  $M_x$ , たわみ角を $\theta_y$ ,  $\theta_x$ とすれば、横荷重 $q_z$ を受ける積層板の曲げに関する基礎微分方程式は、一次せん断変形理論に基づいて、次の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (5)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$M_y = B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$Q_y = kA_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + kA_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (9)$$

$$Q_x = kA_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + kA_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (10)$$

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + A_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$+ B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$N_y = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$N_{xy} = A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (13)$$

ここで、 $q_z = q_z(x, y)$ : 垂直方向荷重強度,  $k = 5/6$ : せん断修正係数であり,  $A_{ij}$ : 面内剛性,  $B_{ij}$ : カップリング剛性,  $D_{ij}$ : 曲げ剛性は次式で与えられる。

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

なお、 $\bar{Q}_{ij}$ は文献[2]に示すとおりである。

## 2.2 離散化グリーン関数

本論文においては、グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法を提示する。

まず、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、積層板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数を求める。さらに、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用して固有値解析を行う。

次の無次元量 $X_1 \sim X_{13}$

$$X_1 = \frac{a^2 Q_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_2 = \frac{a^2 Q_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_3 = \frac{a M_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_4 = \frac{a M_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_5 = \frac{a M_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x,$$

$$X_8 = \frac{w}{a}, \quad X_9 = \frac{v}{a}, \quad X_{10} = \frac{u}{a},$$

$$X_{11} = \frac{a^2 N_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_{12} = \frac{a^2 N_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_{13} = \frac{a^2 N_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

および、 $x$ ,  $y$ に関して、 $x = a\eta$ ,  $y = b\zeta$ なる無次元量 $\eta$ ,  $\zeta$ を導入すると、無次元化された離散化グリーン関数は、任意の点 $x = x_0$ ,  $y = y_0$  ( $x_0/a = \eta_0$ ,  $y_0/b = \zeta_0$ ) に作用する単位荷重 $P_1$ により、次のように表わされる。

$$X_s(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_1 a^2}{D_0} W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (14)$$

ここで、式(14)は、任意の点  $(\eta_0, \zeta_0)$  に単位荷重  $P_1$  が作用した場合  $(q_z(\eta, \zeta) = P_1 \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0))$  の垂直方向変位である。

無次元化されたグリーン関数を求めるため、式(1)~(13)を無次元化すると次のように書き表わされる。

$$\sum_{s=1}^{13} \{ F_{1ts} \frac{\partial X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} X_s \} + \frac{P_1 a^2}{D_0} \delta_{i3} \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0) = 0 \quad (15)$$

( $t = 1 \sim 13$ )

ここで、 $F_{1ts}$ 、 $F_{2ts}$ 、 $F_{3ts}$ は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり、 $\delta(\eta - \eta_0)$ 、 $\delta(\zeta - \zeta_0)$ ：ディラックのデルタ関数、 $\delta_{i3}$ ：クロネッカーのデルタである。

図2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ  $m$ 、 $n$ 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点  $(i, j)$  に関連する矩形領域  $0 \leq \eta \leq \eta_i$ 、 $0 \leq \zeta \leq \zeta_j$  に注目し、これを  $[i, j]$  と表記することとする。また、◎印を付けた交点を任意領域  $[i, j]$  の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別する。

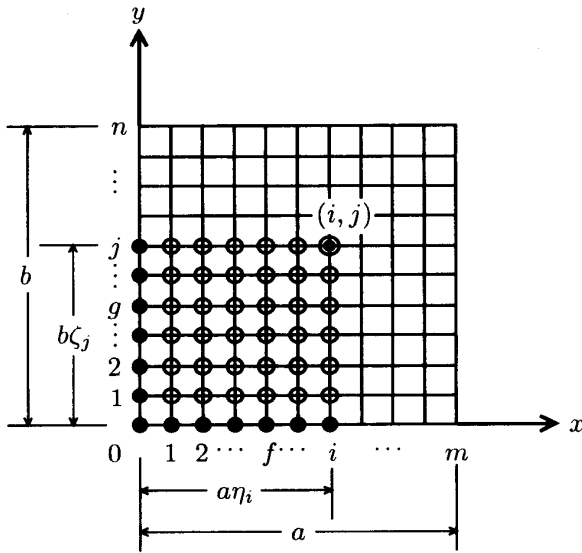


図2：積層板の離散点

基礎微分方程式(15)における  $F_{1ts}$ 、 $F_{2ts}$ 、 $F_{3ts}$ が変数係数であることに注意し、領域  $[i, j]$  において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、板の縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{k=0}^i a_{pijkd} X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} X_{s0l} \right\} + q_{pij} \quad (16)$$

( $r=1,3,4,6,7,8,9,10,11,12$ ,  $s=2,3,5,6,7,8,9,10,11,13$ )

式(16)は板の離散表示された離散解である。この式に含まれる境界従属点の諸量  $X_{rk0}$ 、 $X_{s0l}$ はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域  $[i, j]$  の主要点における諸量  $X_{pij}$ を、この領域の境界従属点における諸量  $X_{rk0}$ 、 $X_{s0l}$ に関係づける要素  $a_{pijkd}$ 、 $b_{pijld}$ は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の導入過程の詳細は、文献[2]を参照されたい。

### 2.3 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1)~(13)の近似解(16)に含まれる積分定数  $X_{rk0}$ 、 $X_{s0l}$ は、具体的には、それぞれ板の  $y=0$ 、 $x=0$  なる辺上における断面力および変形を表わす。  $y=0$  において  $Q_x$ 、 $M_x$ 、 $N_x$ 、 $x=0$  において  $Q_y$ 、 $M_y$ 、 $N_y$  は積分定数として存在しないため、各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、板の境界条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x=a$ 、 $y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

図3に、片持ち板の場合の積分定数と境界条件を示す。隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められ、□で囲まれている。

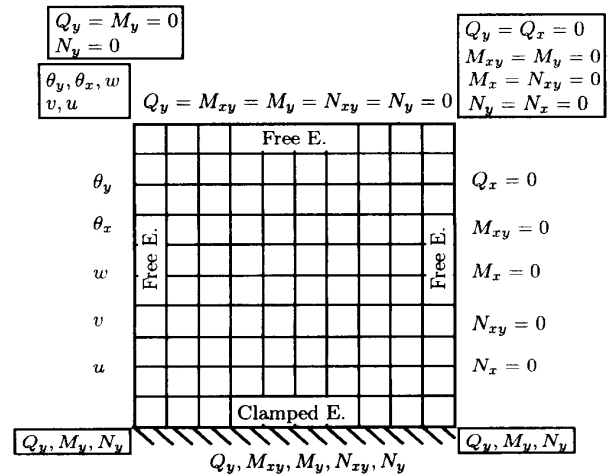


図3：積分定数と境界条件

### 2.4 固有振動数方程式

積層板の自由振動を支配する運動方程式は、式(3)の荷重強度を単位面積当りの慣性力とすればよく、次式となる。

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = -\rho h \omega^2 \bar{w} \quad (17)$$

ここで、 $\rho$ ：積層板の材料密度、 $\omega$ ：固有円振動数であり、 $\bar{Q}_x$ 、 $\dots$ 、 $\bar{N}_x$ は前述の単位荷重を受ける場合の

断面力および変形と区別している。

同様に次の無次元量 $Y_1 \sim Y_{13}$

$$Y_1 = \frac{a^2 \bar{Q}_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_2 = \frac{a^2 \bar{Q}_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_3 = \frac{a \bar{M}_{xy}}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_4 = \frac{a \bar{M}_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_5 = \frac{a \bar{M}_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_6 = \bar{\theta}_y, \quad Y_7 = \bar{\theta}_x,$$

$$Y_8 = \frac{\bar{w}}{a}, \quad Y_9 = \frac{\bar{v}}{a}, \quad Y_{10} = \frac{\bar{u}}{a},$$

$$Y_{11} = \frac{a^2 \bar{N}_{xy}}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_{12} = \frac{a^2 \bar{N}_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_{13} = \frac{a^2 \bar{N}_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

を導入すると、積層板の自由振動を支配する偏微分方程式は、次のように表わされる。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ G_{1s} \frac{\partial Y_s}{\partial \xi} + G_{2s} \frac{\partial Y_s}{\partial \eta} + G_{3s} Y_s \right\} = 0 \quad (18)$$

( $t = 1 \sim 13$ )

まず、無次元化した式(17)の両辺に $Y_8$ を乗じ、全領域において面積分を行い、2重積分することにより順次展開する。周辺の境界条件を考慮するといずれの境界条件の場合も整理され、次式となる。

$$Y_8(\eta_0, \zeta_0) = \mu \lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta) h^* d\eta d\zeta \quad (19)$$

ここで、

$$\mu = \frac{b}{a}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}, \quad h^* = \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

である。

次に、式(19)に等間隔の数値積分を適用すると次式が求まる。

$$Y_{8fg} = \mu \lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} W_{fgij} Y_{8ij} h^* \quad (20)$$

( $f = 0 \sim m, g = 0 \sim n$ )

ここで、 $\beta_{mi}, \beta_{nj}$ は数値積分における重み係数である。

式(20)を整理すると積層板の固有振動数方程式は次式となる。

$$|\bar{W} - \Lambda| = 0 \quad (21)$$

ここで、 $B_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj}$ ,

$$[\bar{W}] = \begin{bmatrix} B_{00}W_{0000} & B_{01}W_{0001} & \cdots & B_{mn}W_{00mn} \\ B_{00}W_{0100} & B_{01}W_{0101} & \cdots & B_{mn}W_{01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00}W_{mn00} & B_{01}W_{mn01} & \cdots & B_{mn}W_{mnmn} \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1/(\mu \lambda^4 h_{00}^*) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{01}^*) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{mn}^*) \end{bmatrix}$$

である。

### 3. 実験方法

実験は、防振台上において試験片の固定部を軟鋼製の治具に固定し、後方からスピーカーによって音圧を与えて加振する。試験片に貼付した圧電素子出力の極大点の加振周波数を測定し、試験片の共振周波数とする。

固有振動数の測定は、試験片に貼り付けたひずみゲージの出力最大点をオシロスコープで判定し、そのときの加振周波数を試験片の固有振動数として測定する。

共振時の振動モードは、レーザーホログラフィー(He-Ne レーザー)を用いた時間平均法によって測定する。図4にそのブロックダイアグラムを示す。すなわちHe-Ne レーザー光をビームスプリッターによって2つに分け、一方を振動している試験片に当て、その反射光を物体光として写真乾板上に当てる。もう一方は参照光として直接写真乾板に当て、両者を乾板上で干渉させる。これにより、試験片の振幅分布が干渉縞の等高線として現れるので、その様子を写真乾板にホログラムとして記録する。この場合、干渉縞の間隔はアンプの出力で変化するので、各モードに応じた最適の出力値を選ぶ。次に、共振時における振動の分布とし

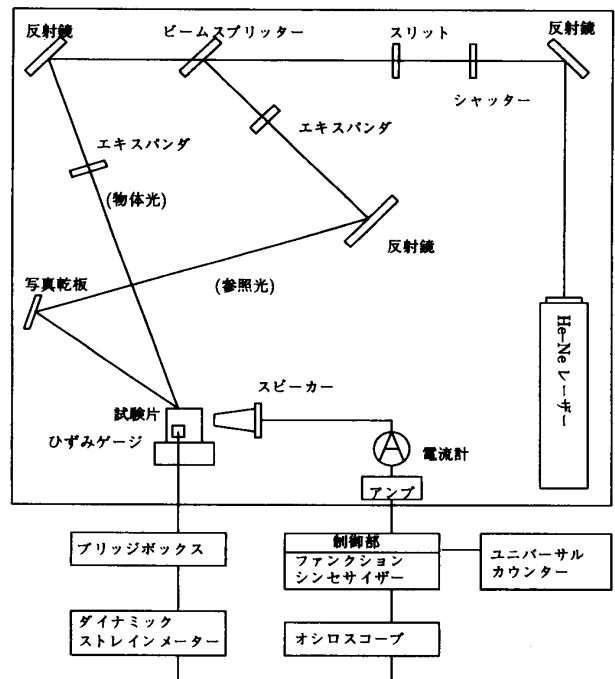


図4：ブロックダイアグラム

て乾板に記録されたホログラムをデジタルカメラに撮影する。撮影は、乾板に対しカメラの角度を若干仰角にとり、乾板のガラス面の反射光に注意して行った。なお、使用したHe-Ne レーザー源（日本科学製 NEO-30MS）は、発振波長 $0.6328\mu\text{m}$ 、出力30mWである。

#### 4. 解析結果および実験結果

実験に用いた試験片を写真1に示す。試験片の裏面に共振点測定用のひずみゲージを貼り付け、表面は振動モード測定時の直反射を防ぐため、つや消しの白色アクリルラッカーを極く薄くスプレー塗装した。

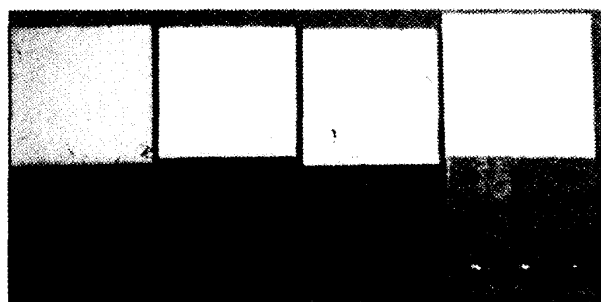


写真1：試験片

実験および解析に使用したアルミニウム合金、CFRP（Carbon Fiber Reinforced Plastic、以下CFRPと略記）試験片の材料特性および諸元を表1に示す。なお、CFRP試験片には、東邦テナックス（株）製の材料プリプレグ（Q-1111、CFAW:150g/m<sup>2</sup>、RC:30%）を使用している。

表1：試験片の材料特性および諸元

	$a \times b \times h(\text{mm})$	$E_L(\text{GPa})$	$E_T(\text{GPa})$	$G_{LT}(\text{GPa})$	$\nu_{LT}$	$\rho(\text{kN/m}^3)$
アルミニウム	90 × 90 × 1	69.58	69.58	26.09	0.333	26.46
CFRP	80 × 80 × 1	149	9.2	4.8	0.3	15.78

##### 4.1 アルミニウム合金の結果

はじめに、本解析法の収束性および精度を検討するために、等質・等方性の材料である片持ちアルミニウム板の振動解析および実験を行った。板の縦横の分割数 $m=n=6, 8, 10$ とした場合の6次までの振動数およびRichardsonの補外公式によって求めた推定収束値（8分割と10分割）、Claassenによる解<sup>9)</sup>および実験値を表2に示す。

本解析法による数値解析結果は、分割数の増加とともに一様に収束し、比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られている。さらにRichardsonの補外公式による推定収束値は、比較解に極めて近づくことが示されている。

実験結果との比較においては、1次の振動数においては多少誤差があるものの、高次の振動数はほぼ実験

においても妥当な値が得られている。

表2：片持ちアルミニウム板の振動数

$m = n$	$f(\text{Hz})$					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
6	106.5	260.3	713.1	909.2	1027	1837
8	106.1	257.8	681.4	870.9	982.4	1743
10	105.9	256.5	667.4	854.1	962.8	1701
Ex. v.*	105.5	254.2	642.5	824.2	928.0	1626
Claassen <sup>9)</sup>	105.6	255.2	644.1	826.5	932.2	1606
Experiment	155.5	244.8	589.7	806.6	870.5	1542

\* Ex. v, Extrapolated value [8-10].

図5には、本解析法による6次までの振動モードと、レーザーホログラフィーを用いた振動モードを示している。振動モードにおいては、解析と実験はほぼ同様な結果が得られている。

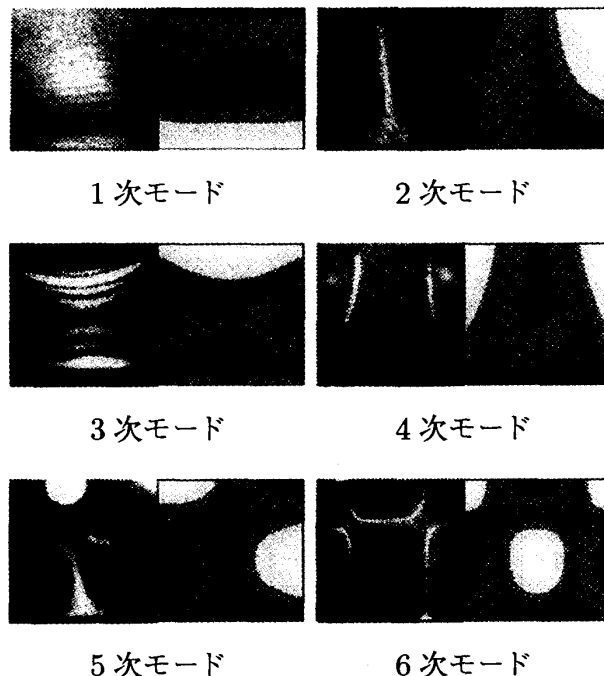


図5：アルミニウム合金の振動モード図  
（左図：実験結果 右図：本解析結果）

##### 4.2 CFRPの結果

つづいて、本解析法の異方性材料での収束性および精度を検討するために、片持ち積層板の振動解析および実験を行った。用いた積層板は全て4層とし、 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 、 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  および  $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$  の3種類を対象として解析及び実験を行った。板の縦横の分割数 $m=n=6, 8, 10$ とした場合の6次までの振動数およびRichardsonの補外公式によって求めた推定収束値（8分割と10分割）、有限要素法（FEM）による解および実験値を表3～5に示す。

本解析法による数値解析結果は、分割数の増加とともに一様に収束し、比較的粗い分割による解析におい

表 3 : CFRP [0°/90°/0°/90°] の振動数

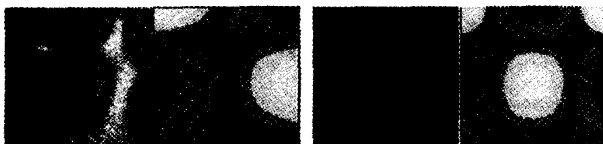
$m = n$	$f(\text{Hz})$					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
6	165.2	244.6	1142	1223	1254	1964
8	164.6	242.8	1087	1170	1197	1867
10	164.3	242.1	1064	1147	1172	1824
Ex. v.*	163.8	240.9	1023	1106	1128	1748
FEM	163.8	240.8	1029	1111	1135	1762
Experiment	98.0	198.0	—	982.0	1252	1600

\* Ex. v, Extrapolated value [8-10].



1 次モード

2 次モード



5 次モード

6 次モード

図 6 : CFRP [0°/90°/0°/90°] の振動モード図  
(左図: 実験結果 右図: 本解析結果)

表 4 : CFRP [0°/90°/0°/90°] の振動数

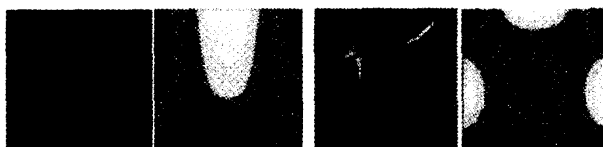
$m = n$	$f(\text{Hz})$					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
6	103.9	202.7	719.2	886.2	1650	2069
8	103.5	200.9	684.9	847.0	1577	1970
10	103.3	200.1	669.9	829.7	1545	1926
Ex. v.*	102.9	198.7	643.2	798.9	1488	1848
FEM	103.0	198.9	648.2	805.5	1495	1830
Experiment	93.1	269.0	—	—	1097	1562

\* Ex. v, Extrapolated value [8-10].



1 次モード

2 次モード



5 次モード

6 次モード

図 7 : CFRP [0°/90°/0°/90°] の振動モード図  
でも、実用上、十分の精度をもつ解が得られている。  
さらにRichardsonの補外公式による推定収束値は、  
比較解に極めて近づくことが示されている。

表 5 : CFRP [90°/0°/0°/90°] の振動数

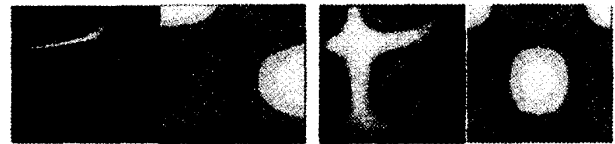
$m = n$	$f(\text{Hz})$					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
6	230.6	293.9	847.6	1591	1671	2070
8	229.7	292.0	814.5	1516	1593	1967
10	229.3	291.2	800.0	1483	1559	1921
Ex. v.*	228.6	289.8	774.2	1424	1499	1839
FEM	228.5	290.0	777.9	1434	1508	1854
Experiment	135.0	269.0	—	—	1582	1795

\* Ex. v, Extrapolated value [8-10].



1 次モード

2 次モード



5 次モード

6 次モード

図 8 : CFRP [90°/0°/0°/90°] の振動モード図

実験結果との比較においては、概ね妥当な値が得られているものの、判断しにくい振動数も存在しており、異方性材料の試験片を実験する上での課題である。

図 6~8 には、本解析法による 1 次、2 次、5 次および 6 次の振動モードと、レーザーホログラフィーを用いた振動モードを示している。これらのモードは解析と実験はほぼ一致しているものの、実験においては確定しにくいモード (3 次、4 次) も現われてきており、等質・等方性の振動モードよりも異方性が強くなると、実験では判断しにくいモードも出現する。積層順序の違いによる振動モードの影響については、逆対称積層 [0°/90°/0°/90°] にすると、等質・等方性の振動モードと同じ出現順序であるが、対称積層の [0°/90°/90°/0°] とすることで、4 次と 5 次の出現順序が入れ替わり、[90°/0°/0°/90°] とすることで、3 次と 4 次の出現順序が入れ替わってくる。

### 5. まとめ

本研究では、繊維強化型積層板の自由振動問題の一解析手法として、グリーン関数を用いた固有値解析法を提示した。本解析法は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、積層板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数が得られ、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これ

に数値積分を適用した固有値解析法である。

本解析法による解析結果と、既往の解およびFEMによる解との比較により、本解析法による数値解は、一様に収束性を持つこと、また、比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られていることなどが確認された。

また、レーザーホログラフィーを用いた振動実験により、振動数、振動モードを明らかにした。しかしながら、等質・等方性の試験片では解析結果とほぼ同じような振動数、振動モードを確認することができたが、FRPになると、3次、4次の振動数、振動モードは確認しにくく、今後の実験においての検討課題である。

積層順序による影響は、対称および逆対称積層にすることで、振動モードの発現順序を変えることができるため、特定の振動モードを抑えることが可能である。このことを利用して、構造物に不利な振動を受ける箇所を積層構造にすることにより、構造物の耐風安定性などを高めることができるものと思われる。

## 6. 謝辞

本研究を遂行するにあたり、東邦テナックス（株）

永田康久氏には実験試験体を提供戴き、実験方法などについて懇切丁寧にご教示戴きました。ここに、記して深謝申し上げます。また、実験および解析に協力戴きました大学4年生(研究当時)の畑瀬晋也氏、坂口宗則氏に感謝申し上げます。

なお、本研究は平成13年度科学研究補助金（奨励研究A）による研究成果の一部をまとめたものであり、ここに謝意を表わします。

## 参考文献

- [1] 建設省土木研究所：繊維強化プラスチックの土木構造材料への適用に関する共同研究報告書(I)——次構造材料としてのFRPの適用事例調査——，1998
- [2] 森田千尋，松田浩，崎山毅，佐治孝記，浦田英知，黄美：クロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に関する一解析法，構造工学論文集，Vol.44A，pp.11-20，1998
- [3] R. W. Claassen and C. J. Thorne：Vibration of a rectangular cantilever plates，J. Aerospace Sci.，Vol.29，No.11，pp.1300-1305，1962