双心多角形の中の円

長崎大学教育学部　数理情報講座　数学教室
松　田　康　雄

On the circles which pass the fixed points in the bicentric polygon

Yasuo Matsuda
Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要
In this paper we shall show that there are the circles with the same radius which pass the fixed points in the bicentric polygon. The radius and the center of the circles are determined by the circumscribed circle and the inscribed circle of the bicentric polygon. And more we shall show that this is also applied to some solids.

はじめに

n は3以上の整数とする。定円上に n 個の点があって，各点について２本ずつの弦で互いの点が結ばれている図形を考える。その弦がすべて別の定円と接するとき，この図形を「双心 n 角形」あるいは「双心多角形」，各点を「頂点」，弦を「辺」と呼ぶ。最初の定円（外接円）の中心(外心)を O，半径を R，別の定円（内接円）の中心(内心)を I，半径を r とする。線分 OI を $R:r$ に内分，外分する点をそれぞれ N，N′ とする。定数 ρ，ρ' を

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{1}{R} \quad , \quad \frac{1}{\rho'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{R} \tag{1}$$

によって定める。このとき次の定理１が成り立つ。

定理１．双心多角形の頂点を共有する２辺（およびその延長線）に接する半径 ρ，ρ' の円はそれぞれすべて点 N，N′ を通る。

本稿では定理１を証明し，その拡張を述べる。

なお，本稿では定理１の円を「夾円(きょうえん)」，半径 ρ，ρ' の円を区別するときはそれぞれ「小夾円」，「大夾円」と呼ぶ。

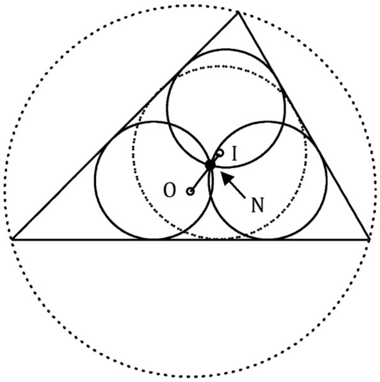

図１ 三角形の小夾円

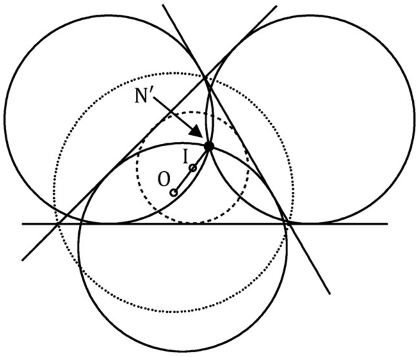

図２ 三角形の大夾円

１．定理１の証明

双心多角形の１つの頂点を A とし，A で隣り合う２辺（およびその延長線）に接する半径 ρ，ρ' の円の中心をそれぞれ C，C′ とする。C，C′, I はこの２辺のなす角の二等分線上にあり

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\rho}{r}\overrightarrow{\mathrm{AI}}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}'}=\frac{\rho'}{r}\overrightarrow{\mathrm{AI}} \tag{2}$$

が成り立つ。(図 3)点 N，N′ の定義から

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{r}{R+r}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\frac{R}{R+r}\overrightarrow{\mathrm{AI}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AN}'}=\frac{-r}{R-r}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\frac{R}{R-r}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$$

が成り立つ。(1)から $\rho=\frac{Rr}{R+r}$，$\rho'=\frac{Rr}{R-r}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\rho}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\frac{\rho}{r}\overrightarrow{\mathrm{AI}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AN}'}=-\frac{\rho'}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\frac{\rho'}{r}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$$

となる。(2)から

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\rho}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AN}'}=-\frac{\rho'}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}'}$$

となって

$$\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\frac{\rho}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{C'N'}}=-\frac{\rho'}{R}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CN}}\right|=\frac{\rho}{R}\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|=\frac{\rho}{R}\cdot R=\rho\ ,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{C'N'}}\right|=\frac{\rho'}{R}\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|=\frac{\rho'}{R}\cdot R=\rho'$$

が成り立つ。したがって，円 C，C′ はそれぞれ点 N，N′ を通る。各頂点に対して同じことが示されるので定理１が証明された。 □

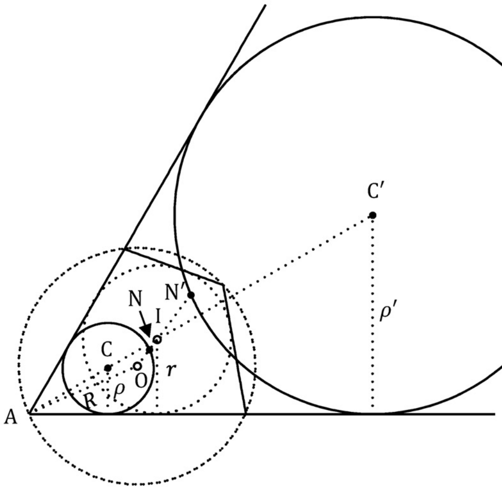

図 3 証明の説明図

２．双心多角形の夾円

次の系は定理１から自然に示される。（図 4, 5 は $n = 5$ の場合。注１）

系１．正 n 角形は双心 n 角形であり，１辺の長さが１のときの夾円は，半径 $\dfrac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}\left(1 \pm \cos\frac{\pi}{n}\right)}$ で正 n 角形の中心を通る。

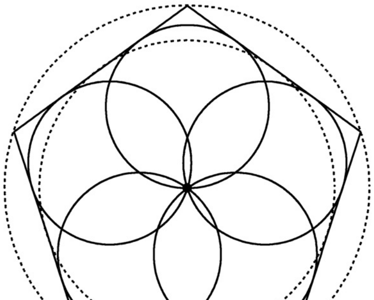

図 4 正五角形の小夾円

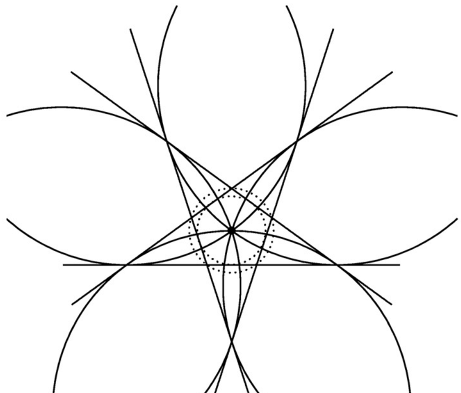

図 5 正五角形の大夾円

三角形は双心三角形である。

双心四角形は凸四角形に限る。（注２）

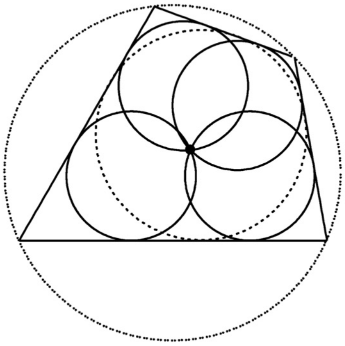

図 6 双心四角形の小夾円

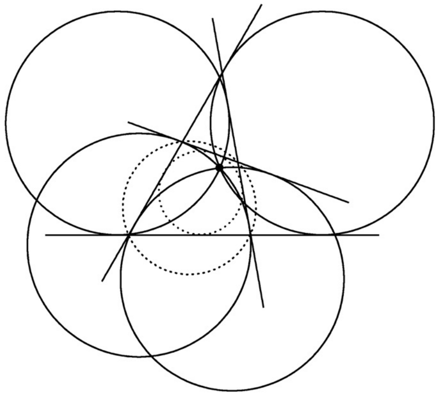

図 7 双心四角形の大夾円

双心 n 角形は，$n \geqq 5$ のとき，星型になる場合がある。この場合もやはり定理 1 が成り立つ。（図 8, 9）

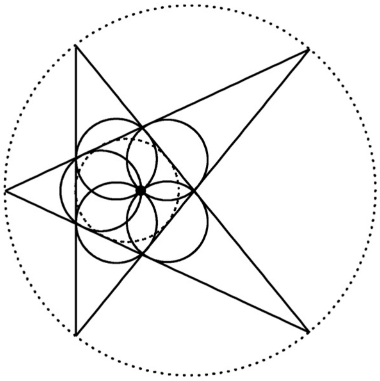

図 8 双心五角形の小夾円

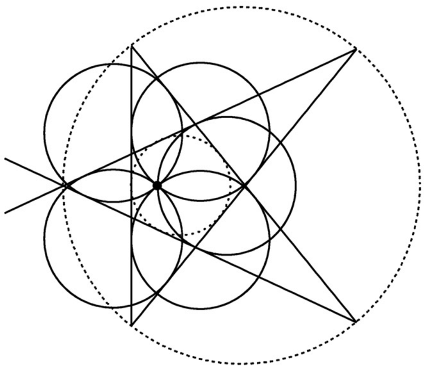

図 9 双心五角形の大夾円

さらに星型の双心多角形は図 10 のような違うパターンになることがあるがいずれも定理 1 が成り立つ。

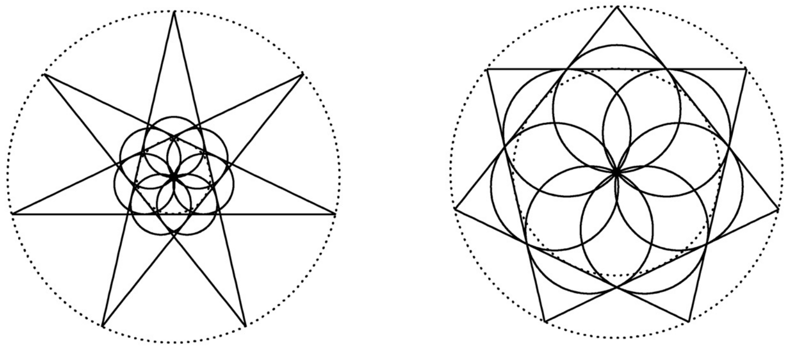

図 10　双心七角形（星型）の中の小夾円

双心 n 角形は，$n \geqq 6$ のとき，複数の図形の組合せになる場合がある。これは n より小さい角数の双心多角形の場合に帰着される。例えば，図 11 の双心六角形と 6 個の夾円は，外接円と内接円を共有する図 1 と図 12 の 2 個の双心三角形とその夾円 3 個ずつを合わせた図形と考えられる。（注３）

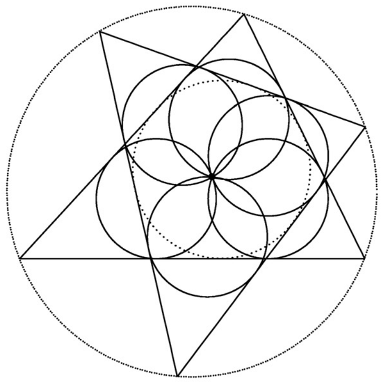

図 11　双心六角形の小夾円

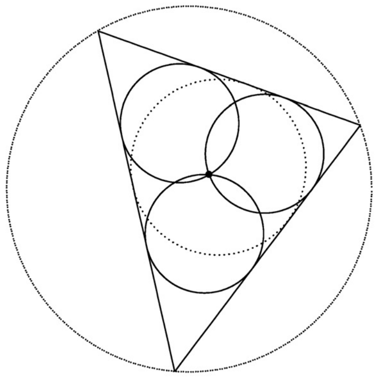

図 12　三角形の小夾円

３．夾円の位置

双心多角形の１つの頂点を A，A を端点とする辺を ℓ とする。WA, XO, OX′ を辺 ℓ と垂直な長さ R の線分，内接円 I と辺 ℓ の接点を Y，直線 WI と辺 ℓ の交点を Z とする。（図 13）このとき，点 N, N′ および，辺 ℓ に接する夾円の中心 C, C′ の位置に関して次の定理が成り立つ。（証明略。注１）

定理２．線分 OI と線分 XY の交点は点 N，線分 AI と線分 WY の交点は夾円の中心 C，直線 OI と直線 X′Y の交点は点 N′，点 Z を通り辺 ℓ に垂直な直線と直線 AI の交点は夾円の中心

C′である。

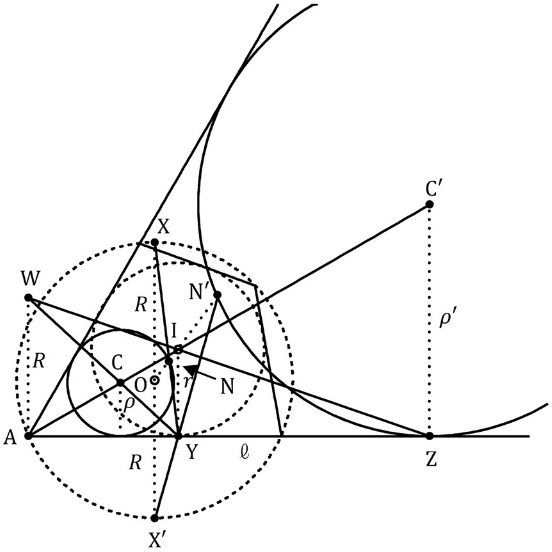

図 13 点 N および夾円の位置

４．三角形の場合の拡張

三角形の場合，傍接円を考えることによって定理１が拡張される。

三角形の１つの傍接円の中心(傍心)を J，半径を r' とする。線分 OJ を $R:r'$ に内分，外分する点をそれぞれ M，M′とし，定数 ρ，ρ' を $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{R}$ ，$\frac{1}{\rho'}=\left|\frac{1}{r'}-\frac{1}{R}\right|$ によってそれぞれ定める。このとき次の定理３が定理１と同様に示される。

定理３．三角形の２辺（またはその延長線）に接する半径 ρ，ρ' の３個の円はそれぞれすべて点 M，M′ を通る

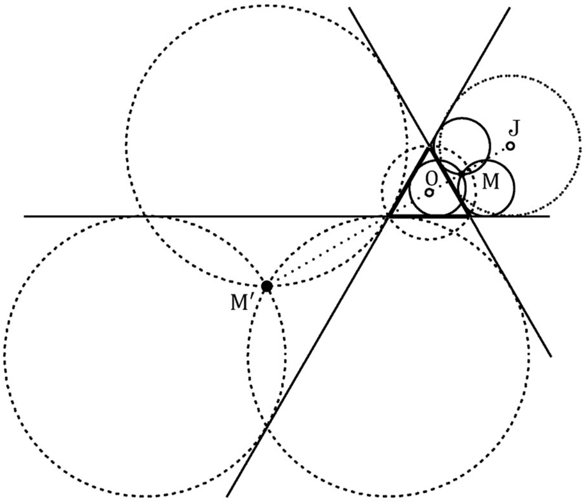

図 14　正三角形の場合の定理３の図

4．空間への拡張

外接球と内接球の両方をもつ立体に対して，次の定理４が定理１と同様に示される。

定理４．外接球と内接球の両方をもつ立体に対して，１つの頂点のまわりのすべての面（およびその延長面）に接する半径 $\rho\,(\rho')$ の球はすべて点 N (N′) を通る。

例２．１辺の長さが１の正四面体に対して，３面(およびその延長面）に接する半径 $\frac{\sqrt{6}}{16}$, $\frac{\sqrt{6}}{8}$ の 4 個ずつの球はすべて正四面体の中心を通る。（注４）

例３．１辺の長さが１の正六角形を底辺とし高さ $\sqrt{3}$ の正六角柱は外接球 $\left(R=\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ と内接球 $\left(r=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をもつ。頂点を共有する３面(およびその延長面）に接する半径 $\frac{7\sqrt{3}\pm3\sqrt{7}}{8}$ の 12 個ずつの球はすべて正六角柱の中心を通る。

例４．O (原点), $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$, $\mathrm{C}(0,0,c)$ $(a,b,c>0)$を頂点とする四面体は，中心 $\mathrm{O}'\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$，$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ の外接球をもち，中心 $\mathrm{I}\,(r,r,r)$ 半径 r $\left(\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{abc}\right)$ の内接球をもつ。ρ を(1)で定め，$\mathrm{N}\left(\rho\left(1+\frac{a}{2R}\right),\rho\left(1+\frac{b}{2R}\right),\rho\left(1+\frac{c}{2R}\right)\right)$ とする。中心 $\mathrm{C_O}\,(\rho,\rho,\rho)$，半径 ρ の球は原点 Oを含む３つの面に接し点Nを通る。同様に中心 $\mathrm{C_A}\left(\rho\left(1+\frac{a}{R}\right),\rho,\rho\right)$，$\mathrm{C_B}\left(\rho,\rho\left(1+\frac{b}{R}\right),\rho\right)$，$\mathrm{C_C}\left(\rho,\rho,\rho\left(1+\frac{c}{R}\right)\right)$，半径 ρ の球はそれぞれ点A, B, C を含む３つの面に接し点Nを通る。（図 15）

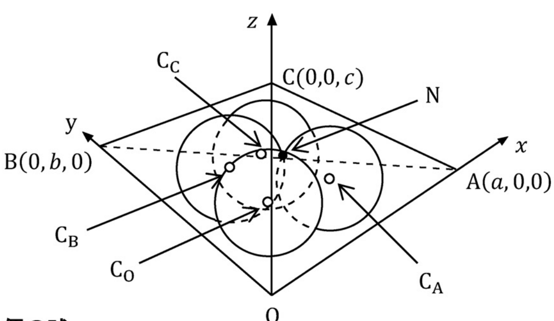

図 15　四面体の点 N を通る４個の球

５．研究の経緯

本研究のきっかけは次の和算の問題である。（[3]）

問題. 底辺 12，高さ 9 の直角三角形に同じ半径の円が図 16 のように２個入っている。この円の直径を求めよ。

この問題を当時の勤務高校で紹介したところ，ある生徒が問題の解答を含む次の補題を発見した。（図 17，[6]，注５）

補題. ３辺の長さが $a,b,c\ (a^2+b^2=c^2)$ の直角三角形の２辺に接する半径 $\frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$ の３個の円は１点で交わる。

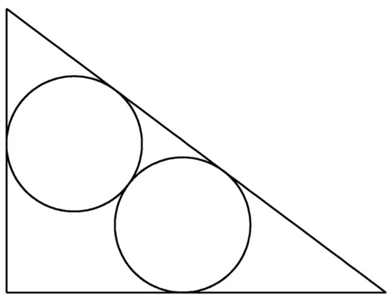

図 16　直角三角形の中の２個の等円

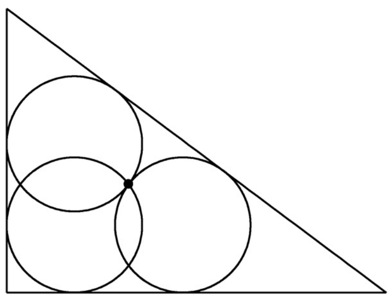

図 17　直角三角形の中の３個の等円

その生徒は続けて直角三角形だけでなく任意の三角形で定理１が成り立つことを証明した。（[7]～[9]）そして今回，筆者が証明を簡略化し，定理を三角形から双心多角形，さらに立体に拡張することができた。証明のポイントは，内心も夾円の中心も双心多角形の内角の二等分線上にあることの利用である。

注１.　図 18 のように３本の平行線の長さによって関係式 $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ が表される。（[11], [12]）これから図 13 のρ,ρ' が示される。また，図 19 から，図 4 において(1)の第１式が成り立つことが示される。

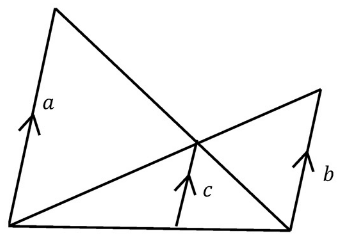

図 18　平行線による$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$の図

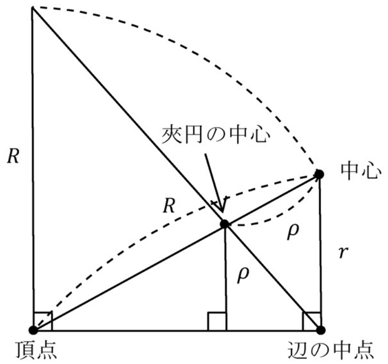

図 19　正多角形における$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{1}{R}$の図

注２． 四角形が円に内接する条件は対角が互いに補角をなすことである。また，四角形が円に外接する条件は対辺の長さの和が互いに等しいことである。([1]，[2] p.250, 257 等)

１組の対角が直角で，対角線が互いに直交する凧型や，等辺が上底と下底の和の半分に等しい等脚台形も双心四角形である。(図 20，21)

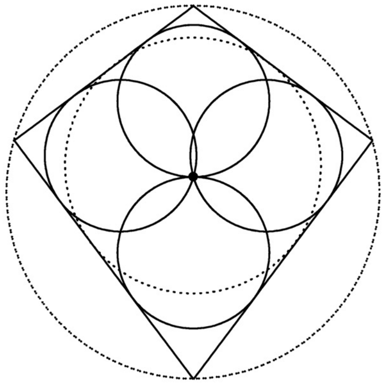

図 20　凧型四角形の中の小夾円

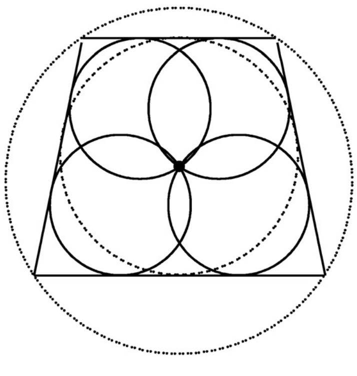

図 21　等脚台形の中の小夾円

注３． $\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$ が成り立つとき，円 O を外接円，円 I を内接円とする三角形が無数に存在する。（ポンスレの閉型定理 [2] p.207 ）

注４． １辺の長さが１の正六面体に対して，頂点を共有する３面(およびその延長面) に接する半径 $\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$ の８個ずつの球はすべて中心を通る。

1 辺の長さが 1 の正八面体に対して，頂点を共有する 4 面(およびその延長面）に接する半径 $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ の 6 個ずつの球はすべて中心を通る。

1 辺の長さが 1 の正 12 面体に対して，頂点を共有する 3 面(およびその延長面）に接する半径 $\frac{1}{16}\left\{\left(15+3\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\pm\left(11\sqrt{3}+5\sqrt{15}\right)\right\}$ の 20 個ずつの球はすべて中心を通る。

1 辺の長さが 1 の正 20 面体に対して，頂点を共有する 5 面(およびその延長面）に接する半径 $\frac{1}{8}\left\{\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\pm\left(7+3\sqrt{5}\right)\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\}$ の 12 個ずつの球はすべて中心を通る。

正多面体の外接球と内接球の半径は[5]から引用した。

注５．3 辺の長さが $a,b,c\ (a^2+b^2=c^2)$ の直角三角形において，$R=\frac{c}{2}, r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{2}$ なので，夾円の半径は $\rho=\frac{Rr}{R+r}=\frac{acc}{(a+b)(a+b+c)}$ となって補題が示される。$a=12, b=9, c=15$ とすると問題の答 $\frac{30}{7}$ が得られる。

文献.

[1] 安藤清・佐藤敏明，初等幾何学，森北出版，2012 年，111-116.
[2] 岩田至康，幾何学大辞典Ｉ，槇書店，1971 年.
[3] 冲方丁，天地明察，角川書店，2009 年，p.21.
[4] 繁木伸孝，明察！ピーター・フランクル氏！，初等数学 65 号，2011 年，40-41.
[5] 日本数学会編，岩波数学辞典 第 4 版，岩波書店，2007 年，p.641.
[6] 野相祥平，三角形の中の円，初等数学の会通信 36 号，2010 年，1-2.
[7] 野相祥平，三角形の中の円（続），初等数学の会通信 37 号，2010 年，1-3.
[8] 野相祥平，三角形の中の円，数学セミナー2011 年 3 月号，p.64，NOTE.
[9] 野相祥平・松田康雄，三角形と円様々，初等数学 66 号，2011 年，62-65.
[10] 前川太市，和算からの問題作り，初等数学 65 号，2011 年，1-2.
[11] 松田康雄，計算図表で遊ぶ，高校への数学 2009 年 8 月号，東京出版，52-53.
[12] 松田康雄，計算図表の話題，高校への数学 2015 年 9 月号，東京出版，58-59.
[13] 横田捷宏，第 65 号前川・繁木・野相問題について，初等数学 66 号，2011 年，81-83.