実践報告

2020 年度数学教育実践の報告

松田康雄（長崎大学教育学部）

はじめに

2020 年度数学教育実践として，以下の 3 つの内容を報告する。

１．令和 2 年度学部と附属学校との共同研究

・・・ 数学の公募問題による数学的活動の促進

２．教材の一工夫　・・・　２次曲線の分類

３．和算の教材化

１．令和 2 年度学部と附属学校との共同研究

「令和 2 年度 附属学校との共同研究」として，附属中学校の久間裕希先生，入江康介先生，橋本聡先生方と共に「数学の公募問題による数学的活動の促進」を実施した。

１．実施内容

① 予備知識がいらず．色々な解法が考えられる数学の問題を定期的に出題する。

② 参加は任意。解答を募り，解答レポートを添削し返却する。

③　出題して 1 月後位に解答を掲示するが，その際優秀な解答やユニークな解答を公表する。

２．実施のねらいと目的：

① 時間をかけて問題を考えることにより思考力と持久力を鍛える。

② 答だけでなく答に至った過程を書くことにより表現力を高める。

③ 解答と解法を公表することにより，色々な考え方や発想を知る。

④ 数学をより好きになる一つのきっかけにする。

「数学チャレンジ」と銘打って 6 回実施した。残念ながら解答者は表 1 のように多くはなかった。

表１　数学公募問題の解答者数

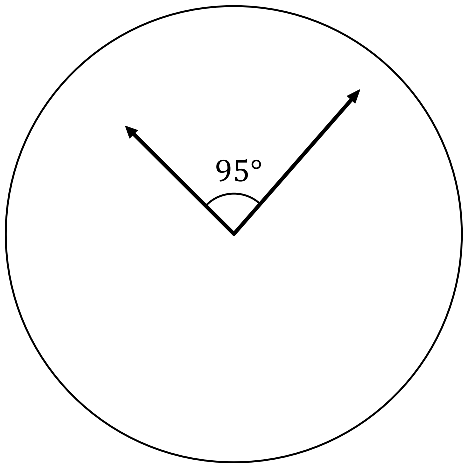
回数	1	2	3	4	5	6
解答者数	4	1	0	0	2	0

反省点と今後の課題：少ない参加者のレポートであったが，内容はきちんとしていて，考える，工夫する，表現するといった姿勢が感じられた。

問題の掲示場所が中学校校舎の 4 階であったために目立たなかった。学校行事や係活動で忙しい生徒が多いので，問題が授業内容と結びついていたり，時事問題とリンクしてあれば生徒が問題に取り組んだかもしない。

最も解答が多かった問題を紹介する。

問題. 時計はちょうど何時何分かを指している。その時刻を答えよ。なお，時計は回転していて 12 が真上とは限らない。



○ 解答は，学年・組・氏名を書いて，レポートにまとめて提出して下さい。
答だけでなく，答に至った過程を－必要なら図，式，表，グラフなどを使って－書いて下さい。後日添削して返却します。

解答例. 時計の長針，短針は 60 分間にそれぞれ $360°, 30°$ 回転するので 1 分間に$6°, 0.5°$ 回転する。したがって，1 分間に長針は短針より$5.5°$ 多く回転する。10 分後に短針と長針との間の角度は $95 + 5.5 \times 10 = 150\ (°)$ になり，これは 7 時の角度である。したがって，この時計は <u>6 時 50 分</u>を指している。 □

講評. 4 名から解答がありました。

2 年 F さんは 1 分間の針の角度の差 0.5° を元に計算していました。

3 年 K さんは数表を作っていました。

3 年 K さんと M さんは未知数を用いた方程式を作って考えました。

各人工夫して考え，それ表現するという姿勢が見られて素晴らしいと感じました。

問題は 95° でしたが，できたら一般化して，○° のとき □時△分という公式作りにチャレンジしてほしいと思います。

問題の一般化を補足に書いた。

２．教材の一工夫

「解析幾何Ⅱ」の授業で実施した「2 次曲線の分類」に関する教材の一工夫を述べる。

問題．2 次曲線

$$ax^2+2dxy+by^2+2ex+2fy+c=0 \tag{1}$$

（a,b,d のいずれかは 0 でない）を分類せよ。

テキスト[2]では，２乗の項を表す行列 $\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$ の固有値を求めて，分類する方法が書かれている。しかし，具体的な曲線の計算法はざっとしか書かれていない。今回の授業では 2 次曲線の分類より，具体的に標準形になおす方法を重点的に教えることにした。その方法を以下の 2 つの手順にまとめ，「解析幾何Ⅱ」の授業で実施した。

手順 1．$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ から$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を定め $\begin{cases} x\to x-p \\ y\to y-q \end{cases}$ を(1)に代入して

$$ax^2+2dxy+by^2+g=0 \tag{2}$$

の形に変形する。$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないときは手順 2 に進む。

手順 2．$\tan 2\theta=\frac{2d}{a-b}$ を満たす$\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{3}$$

を(2)に代入する。特に $a=b$ のときは，$\tan 2\theta=\infty$ より$2\theta=\frac{\pi}{2}$と考え，$\theta=\frac{\pi}{4}$とする。

$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するときは，楕円，双曲線または 2 直線

$$pX^2+qY^2=r \tag{4}$$

となる。$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないときは放物線になり，頂点が原点になるように平行移動して

$$Y=sX^2 \ \text{or}\ X=tY^2 \tag{5}$$

となる。

(1) は (4), (5) を原点の周りにθ 回転して，(4)の場合はx軸方向にp，y軸方向にq だけ平行移動したものである。

例２．$8x^2-12xy+17y^2-44x+58y+53=0 \tag{6}$

について。$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -22 \\ 29 \end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -22 \\ 29 \end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -200 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$\begin{cases} x \to x+2 \\ y \to y-1 \end{cases}$ を(6)に代入して，

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 - 20 = 0 \ . \qquad (7)$$

$\tan 2\theta = \dfrac{-12}{8-17} = \dfrac{4}{3}$ より

$$\cos\theta = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \sin\theta = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\ . \qquad (8)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を (7) に代入して

$$\tfrac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ (\text{楕円}) \qquad (9)$$

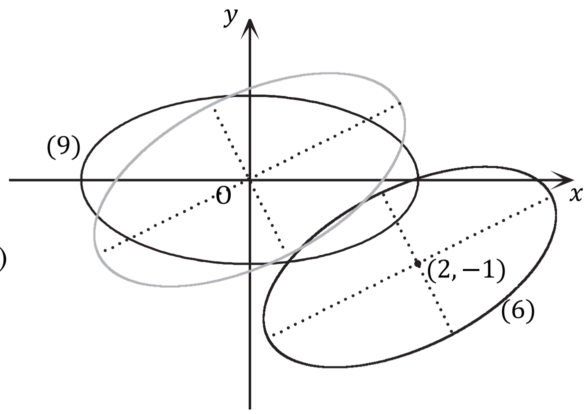


図１ 例の２次曲線（楕円）

(9)を原点の周りに $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ 回転したものが (7)，それをx軸方向に2，y軸方向に-1 平行移動したものが(6)である。（図１）

授業アンケート：・演習が多く良かった。・提出した課題のフィードバックが早かった。・図形について考えることができた。・教科書を使う機会が少なかった。・説明・表現が分かりにくかった。

反省点と今後の課題：演習，課題および試験の結果から，上記の方法で２次曲線の方程式を標準形になおすことはかなり定着したと思われる。ただ，時間の関係もあって，２次曲線の分類を詳しく教えることができなかったことは反省点である。実際に教えてみて，(8)で $\tan 2\theta$ から $\cos\theta$ ，$\sin\theta$ を計算することが意外に難しいことが分かった。そこで，この部分は予め値を提示することにした。次に教えるときは，答えを出した後，パワーポイント等で図形の位置関係を実際に見せたい。

３．和算の教材化

和算をテーマにした授業や講座について報告する。

１．座標幾何学Ⅰ（１年生対象），解析幾何学Ⅱ（２年生対象），幾何学Ⅱ（３年生対象），教職実践演習（４年生対象）で１コマずつ「和算」をテーマにした授業を行った。そのときに扱った円の半径に関する問題を紹介する。

和算の公式：図２の円の半径に関して $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ が成り立つ。（[4]公式 41）

問題. 図３において，大円の直径が225，小円の直径が100のとき，甲円，乙円，丙円，丁円の直径を求めよ。

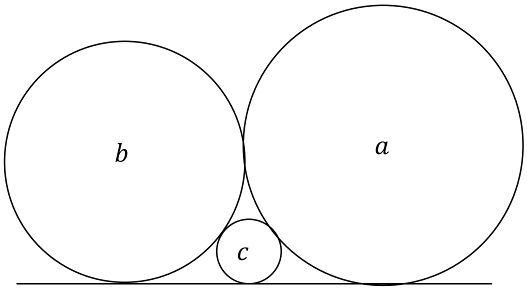


図２ 和算の公式

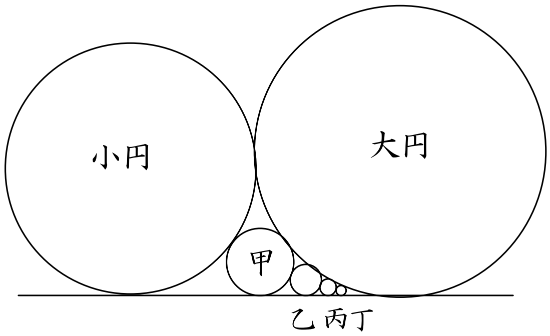


図３ 和算の問題の図

解答. $\frac{1}{\sqrt{甲}}=\frac{1}{\sqrt{大}}+\frac{1}{\sqrt{小}}=\frac{1}{\sqrt{225}}+\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ より 甲＝36．

$\frac{1}{\sqrt{乙}}=\frac{1}{\sqrt{甲}}+\frac{1}{\sqrt{大}}=\frac{1}{\sqrt{36}}+\frac{1}{\sqrt{225}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$ より 乙＝$\frac{900}{49}$．同様に，丙＝$\frac{100}{9}$ 丁＝$\frac{900}{121}$．□

公式を使って，次々に計算できる感覚をつかんで和算の追体験をすることが狙いである。演習，課題および試験の結果から計算法はある程度定着していたと思われる。

２．一関市博物館主催「和算に挑戦」に参加した。これは和算の普及を目的に，初級，中級、上級問題を出題して全国から解答を募集するものである。数学の授業（解析幾何学Ⅰ，Ⅱ）の一環として参加した。解答集に，団体参加学校として「長崎大学」，中級問題の正解者として参加者 15 名中 11 名の名前が記載された。([7])

３．令和２(2020)年度公開講座「和算入門講座」(令和 2(2020)年 12 月 5 日(金)17：00～18：30）において和算の歴史や問題演習を行った。参加者は５名であった。

アンケート：・和算を通して歴史を知ることができた。・計算パズルが楽しかった。
・和算で古典を学ぶことは有効ではないかと思った。・入門なので歴史をもっと詳しく教えてもらいたかった。

反省点と今後の課題：どの授業，講座も１回限りで系統性がなかった。
全体を通して，「裁ち合わせ」が参加者の興味をひいたようである。これは図形を並び替えて別の図形を作るものである。([8]) 今後、教材化を試みたい。来年度からも，和算の内容を普段の授業にもできるだけ取り入れていきたい。

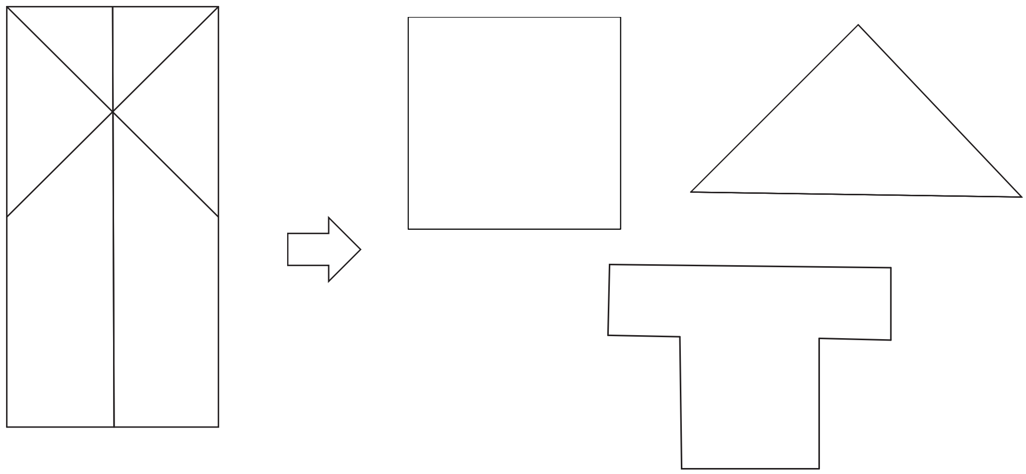


図 4 裁ち合わせ

おわりに

令和 2(2020) 年 4 月から長崎大学に勤めることになって，いきなりのオンライン授業であった。オンライン授業のシステムが整えられていたことと同僚の先生方の助けのおかげで，授業自体はスムーズに実施できたと思う。パワーポイントで教材の準備をしたので板書の時間が節約できた。節約した時間を発問，考える時間に当てることができた。ただ学生にとっては板書を写しながら考える時間が減ったかもしれない。新しい間の取り方を今後追求したい。教材および授業法を今後も工夫，改善していきたい。

補足. 時計の針の角度から時刻が次のように計算できる。([6])

計算法 : 時計の針の角度 $N°$ $(N = 0,1,\cdots,359)$ に対して，$131N$ を360で割った余りを計算する。その余りを 2 倍して 60 で割った商が「時」，余りが「分」である。

例. $N = 95$ のとき，$131N$を360で割った余りは205. $205 \times 2 = 410$ を 60 で割った商は 6，余りは50なので 6 時 50 分。

文献・参考資料

[1] 安藤忠次，線形代数と解析幾何，森北出版，1990 年，86-93.

[2] 石原繁，竹村由也，解析幾何，森北出版，2015 年.

[3] 鈴木七緒，詳解幾何・解析演習，共立出版，1976 年，178-181.

[4] 深川英俊 校注，算法助術，朝日新聞事業本部，2005 年

[5] 藤井康生，米光丁，「拾璣算法」現代解と解説，1997 年.

[6] 松田康雄，時計の針の角度，高校への数学 2005 年 4 月号，東京出版.

[7] 令和二年度一関市博物館交流連携事業「和算に挑戦」解答集.

[8] 和算ドリル，サライ 2017 年 5 月号付録，小学館.