２次曲線の曲率円

長崎大学教育学部　数理情報講座　数学教室
松　田　康　雄

On the circles of curvature for the quadratic curves

Yasuo Matsuda
Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要
The circles of curvature are the circles that approximate the curve at each point of the curve. The reciprocal of the radius of the circle of curvature is called the curvature of the curve. In this paper we shall show how to draw the circles of curvature for the quadratic curves. These methods are common to all quadratic curves except circle. And these methods make it easy to imagine the circle of curvature. In particular, we shall also show that the circle of curvature for the parabola is related to the circle passing through the focus of the parabola.

はじめに

曲線Cの各点における曲率円とは，その点でCと接し，Cの曲がり具合を最もよく表す円のことである。本稿の目的は２次曲線の曲率円を実際に見ることである。そのために曲率円の作図法を述べる。

媒介変数表示で表される曲線の曲率円の半径をρとすると

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}$$

である。([3], [4]等)

本稿では，２次曲線全体をCで表し，各曲線の名称および方程式を，$a, b > 0$として

$$\text{放物線}\ P : y = ax^2,\ \ \text{楕円}\ E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,\ \ \text{双曲線}\ H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

とする。各曲線上の点Pにおける曲率円の中心Cの座標と半径 ρ は表１のようになる。特に，楕円 E で$a = b = r$とすると，楕円Eは半径rの円となり，曲率円の半径は$\rho = r$ となる。

３種類の２次曲線の曲率円をそれぞれいくつかずつ書くと図１～３のようになる。

表１　２次曲線の曲率円の半径

曲線	放物線 P	楕円 E	双曲線 H
P	(t, at^2)	$(a\cos t, b\sin t)$	$(a\cosh t, b\sinh t)$
C	$\left(-4a^2t^3, 3at^2+\frac{1}{2a}\right)$	$\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t\right)$	$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cosh^3 t, -\frac{a^2+b^2}{b}\sinh^3 t\right)$
ρ	$\frac{(1+4a^2t^2)^{3/2}}{2a}$	$\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$	$\frac{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{3/2}}{ab}$

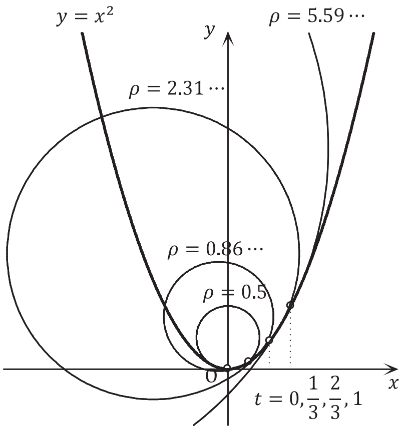

図１　放物線の曲率円

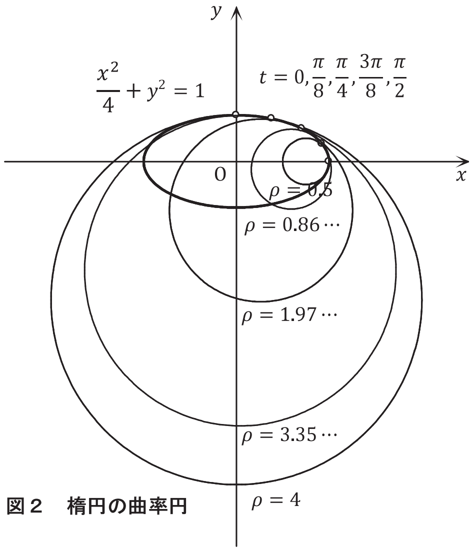

図２　楕円の曲率円

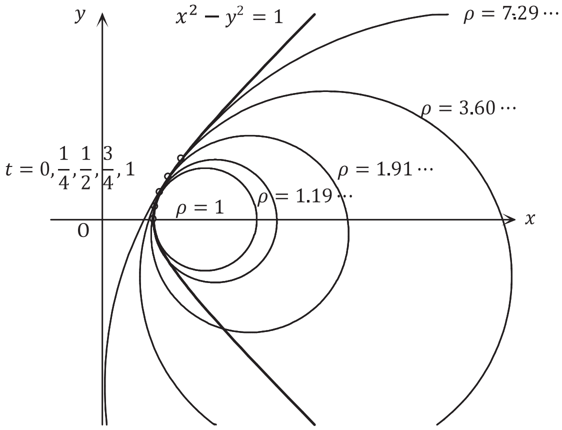

図３　双曲線の曲率円

１．頂点における曲率円

２次曲線Cの頂点における曲率円の中心 C の座標および半径 ρ は表２のようになる。

表２　２次曲線Cの頂点における曲率円

曲線	放物線 P	楕円E		双曲線 H
頂点	$(0,0)$	$(a,0)$	$(0,b)$	$(a,0)$
C	$\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$	$\left(\dfrac{a^2-b^2}{a},0\right)$	$\left(0,-\dfrac{a^2-b^2}{b}\right)$	$\left(\dfrac{a^2+b^2}{a},0\right)$
ρ	$\dfrac{1}{2a}$	$\dfrac{b^2}{a}$	$\dfrac{a^2}{b}$	$\dfrac{b^2}{a}$

楕円Eと双曲線Hの頂点における曲率円に関して定理１が成り立つ。これから，図４，５のように曲率円が作図できる。（証明略）放物線に関しては後述する。

定理１． $\mathrm{D}(a,b)$ とする。

(1) 楕円 E の頂点 $\mathrm{A}(a,0),\mathrm{B}(0,b)$における曲率円の中心は，線分ABと垂直で点Dを通る直線と，それぞれ x 軸，y 軸との交点である。

(2) 双曲線 H の頂点$(a,0)$における曲率円の中心は，漸近線 $y=\frac{b}{a}x$ と垂直で点D を通る直線と x 軸との交点である。

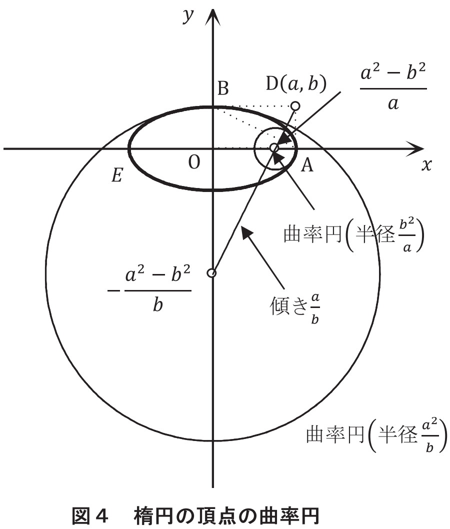

図４　楕円の頂点の曲率円

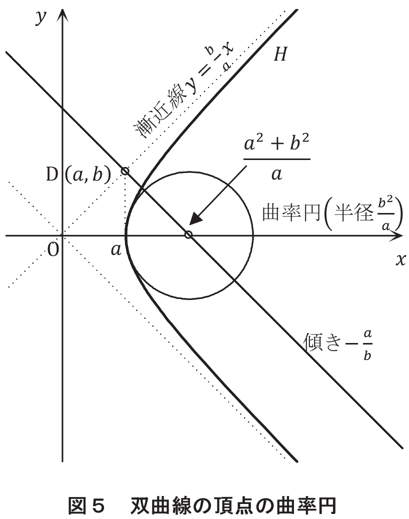

図５　双曲線の頂点の曲率円

２．頂点以外の点における曲率円

２次曲線C上の頂点以外の点Ｐにおける接線をl，法線をn，点Ｐを通りCの軸に平行な直線をk，kに関してlと対称な直線をm，mとCの交点をQとする。点Rを，法線n上に$\angle \mathrm{PQR} = 90°$となるようにとる。このとき次の定理が成り立つ。

定理２． ３点P, Q, Rを通る円は点Ｐにおける２次曲線Cの曲率円である。（線分PRは曲率円の直径である。）

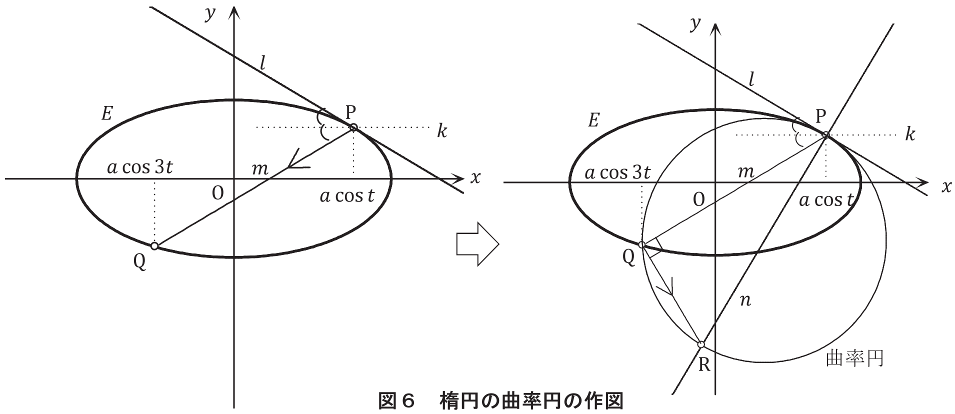

図６　楕円の曲率円の作図

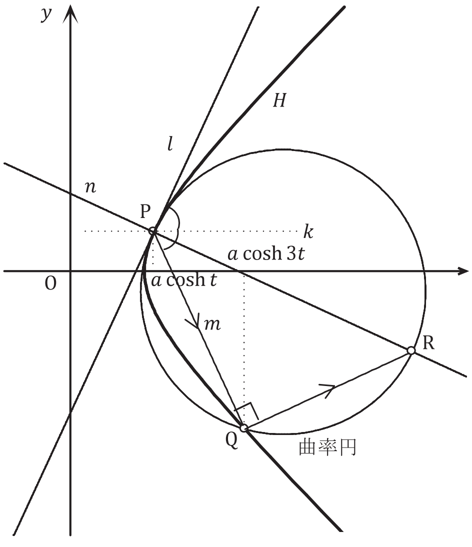

図７　双曲線の曲率円の作図

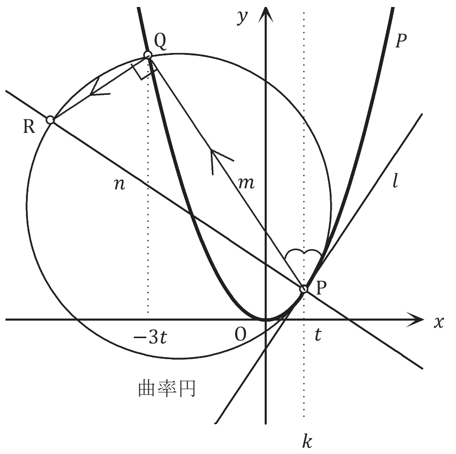

図８　放物線の曲率円の作図

定理２の証明

例えば，楕円 E上の点 $\mathrm{P}(a\cos t, b\sin t)$ における接線の方程式は $\frac{a\cos t}{a^2}x+\frac{b\sin t}{b^2}y=1$ から，傾きは $-\frac{b}{a\tan t}$ なので，直線 mの方程式は $y=\frac{b}{a\tan t}x-\frac{b\cos 2t}{\sin t}$ である。

直線 mと楕円 E上の交点 Q の座標は $(a\cos 3t, -b\sin 3t)$ となる。

法線 nの方向ベクトルを$\vec{n}$ とすると，$\vec{n}=(-b\cos t, -a\sin t)$ である。

法線 n 上に点 R' を線分 PR' が曲率円の直径となるようにとると，その座標は$\overrightarrow{\mathrm{PR}'}=\frac{2\rho}{|\vec{n}|}\vec{n}$ から求められる。曲率円の中心 C は線分PR'の中点である。

2 次曲線 Cに対する点$\mathrm{P, Q, R', C}$ の座標および $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}'}$ の成分は表３のようになる。

表３　点 $\mathrm{P, Q, R'}$ の座標および $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}'}$ の成分

曲線	放物線 P	楕円 E	双曲線 H
P	(t, at^2)	$(a\cos t, b\sin t)$	$(a\cosh t, b\sinh t)$
m	$y=-2atx+3at^2$	$y=\frac{b}{a\tan t}x-\frac{b\cos 2t}{\sin t}$	$y=-\frac{b}{a\tanh t}x+\frac{b\cosh 2t}{\sinh t}$
Q	$(-3t, 9at^2)$	$(a\cos 3t, -b\sin 3t)$	$(a\cosh 3t, -b\sinh 3t)$
$\vec{n}$	$(-2at, 1)$	$(-b\cos t, -a\sin t)$	$(b\cosh t, -a\sinh t)$
R' (R)	$\left(-t-8a^2t^3, 5at^2+\frac{1}{a}\right)$	$(-a\cos t+\frac{2(a^2-b^2)}{a}\cos^3 t,$ $-b\sin t-\frac{2(a^2-b^2)}{b}\sin^3 \mathrm{t})$	$(-a\cosh t+\frac{2(a^2+b^2)}{a}\cosh^3 t,$ $-b\sinh t-\frac{2(a^2+b^2)}{b}\sinh^3 t)$
C	$\left(-4a^2t^3, 3at^2+\frac{1}{2a}\right)$	$\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t\right)$	$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cosh^3 t, -\frac{a^2+b^2}{b}\sinh^3 t\right)$
$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$	$4t(1, -2at)$	$2\sin 2t\,(a\sin t, b\cos t)$	$2\sinh 2t\,(-a\sinh t, b\cosh t)$
$\overrightarrow{\mathrm{QR}'}$	$\frac{1-4a^2t^2}{a}(2at, 1)$	$\frac{2(a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t)}{ab}$ $(b\cos t, -a\sin t)$	$-\frac{2(a^2\sinh^2 t-b^2\cosh^2 t)}{ab}$ $(b\cosh t, a\sinh t)$

表３から $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}'}=0$ が示される。点 P が頂点でないとき$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$は零ベクトルではないので$\angle\mathrm{PQR}'=\frac{\pi}{2}$となる。したがって，点 Q は曲率円の周上にあって，点R′と点R が一致することが示され，定理２が証明された。 □

３．放物線の曲率円と焦点円

放物線Pの曲率円は特別な作図法がある。放物線Pとその上の点P で接し焦点F$\left(0,\frac{1}{4a}\right)$を通る円を，放物線$P$の「焦点円」と呼ぼう。定理３が成り立つ。

定理３． 放物線P上の点P における曲率円は，点P を中心として焦点円を４倍に拡大した円である。

証明． 点P が放物線Pの頂点(原点 O)の場合，焦点円は中心$\left(0,\frac{1}{8a}\right)$，半径 $\frac{1}{8a}$ で，曲率円は表２から，中心C $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，半径 $\rho=\frac{1}{2a}$ なので定理が成り立つ。

点P が頂点以外の場合，曲率円と直線 $x=-3t$ の交点でQでない方をS とする。中心 C および点 Q のy座標から S $\left(-3t,-3at^2+\frac{1}{a}\right)$ である。$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=4\,\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ より定理３が示される。 □

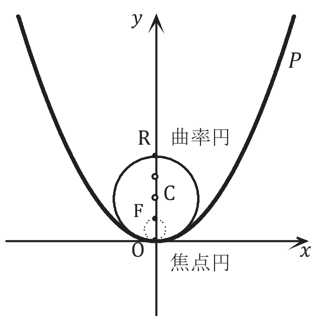

図９　放物線の頂点の曲率円

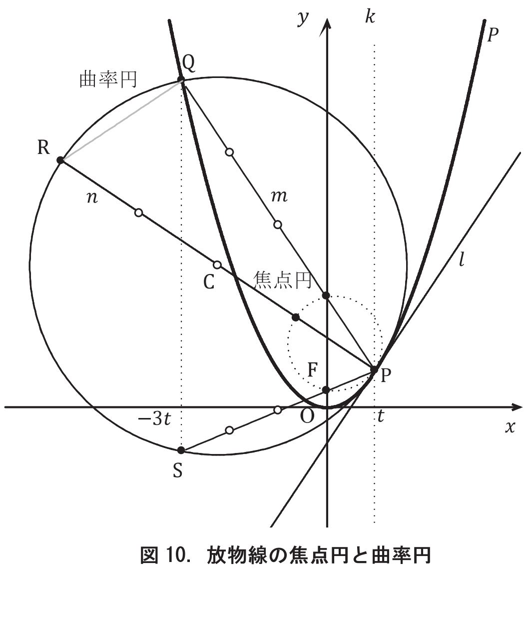

図 10．放物線の焦点円と曲率円

４． 直角双曲線の曲率円

直角双曲線 H_0 ：$x^2 - y^2 = a^2\,(a > 0)$）の曲率円に関しても，特別な作図法が可能である。

定理４． 直角双曲線 H_0上の点P と，点 P における法線 n とH_0 との交点を直径の両端とする円を，点P における接線 l に関して対称移動した円が，点P におけるH_0 の曲率円である。

証明． 点 P $(a\cosh t\,, a\sinh t)$ におけるH_0 の法線 n の方程式は，$\vec{n} = a(\cosh t\,, -\sinh t)$ より

$$y = -\tanh t\;\; x + 2a\sinh t$$

である。H_0 との交点で P でない方の点をR" とすると，そのx座標は $3a\cosh t - 4a\cosh^3 t$ である。また，点Rのx座標は$-a\cosh t + 4a\cosh^3 t$である。したがって，点 P が線分RR" の中点であることが示され定理 4 が証明された。 □

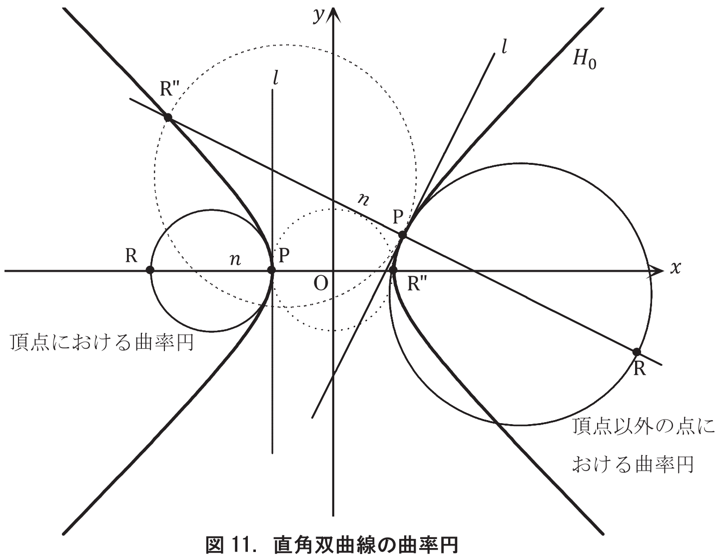

図 11. 直角双曲線の曲率円

５． ２次曲線と曲率円の交点

２次曲線とその曲率円の交点の x 座標に関して次の定理が成り立つ。

定理５． ２次曲線の方程式と，頂点以外の点P における曲率円の方程式から yを消去してできる x の 4 次方程式は，点 P のx 座標の 3 重解と，その t を$-3t$ にかえた単解をもつ。

証明． 放物線 P 上の点 $\mathrm{P}(t, at^2)$ における曲率円の方程式は，表 3 から

$$(x+4a^2t^3)^2+\left(y-3at^2-\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{(1+4a^2t^2)^3}{4a^2}$$

である。これと放物線 P の方程式 $y=ax^2$ からyを消去してできるxの 4 次方程式は

$$a^2x^4-6a^2t^2x^2+8a^2t^3x-3a^2t^t=0\ ,\ (x-t)^3(x+3t)=0$$

となる。したがって，3 重解 $x=t$（点 P のx座標）と単解$x=-3t$（点 Q のx座標）をもつ。(図８参照）ただし，点P が頂点(原点 O)のときに限り 4 重解$x=0$をもつ。

同様に，楕円 E 上の点 $\mathrm{P}(a\cos t, b\sin t)$ における曲率円の方程式と楕円 E の方程式からyを消去してできるxの 4 次方程式は

$$(x-a\cos t)^3(x-a\cos 3t)=0$$

となる。したがって，3 重解$x=a\cos t$（点 P のx座標)と，その t を$-3t$にかえた単解$x=a\cos 3t$(点 Q のx座標）をもつ。(図６参照）ただし，点P が頂点のとき，そのx座標の 4 重解をもつ。

双曲線 H 上の点 P $(a\cosh t, b\sinh t)$ における曲率円の方程式と双曲線 H の方程式からyを消去してできるxの 4 次方程式は

$$(x-a\cosh t)^3(x-a\cos\mathrm{h}3t)=0$$

となる。したがって，3 重解 $x=a\cosh t$（点 P のx座標)と，その t を$-3t$にかえた単解$x=a\cosh 3t$(点 Q のx座標）をもつ。(図７参照)ただし，点 P が頂点のとき，すなわち $t=0$ のとき 4 重解 $x=a$ をもつ。　□

おわりに

定理５の４次方程式の中の３重解というのが曲率円の所以と思われる。定理２のおかげで，2 次曲線の曲率円を少しは見ることができるようになった。頂点と頂点以外の点を区別せずに同じ方法で曲率円を作図できるのは，今のところ放物線と直角双曲線だけである。さらに統一的な作図法の追求が今後の課題である。

文献.

[1] 岩合一男他，曲線・グラフ総覧，聖文社，1971 年.
[2] 岩田至康，幾何学大辞典１，槙書店，1971 年，p.527.
[3] 加須栄篤，ベクトル解析，共立出版，2019 年，129-134.
[4] 日本数学会編，岩波数学辞典 第４版，岩波書店，2007 年，p.285.
[5] 藤田宏他訳，図説数学の事典，朝倉書店，1992 年，676-677.
[6] 松田康雄，曲率円を見ると，初等数学 90 号，2021 年，73-77.
[7] 横田捷宏，放物線の内接円，同心円及び曲率円の関係について，初等数学 70 号，2012 年.