対称的な漸化式と交代的な漸化式

長崎大学教育学部　数理情報講座　数学教室

松　田　康　雄

On the symmetric and the alternative recurrent formula

Yasuo Matsuda

Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要

We shall call the following recurrent formula

$$a_{n+2} - ka_{n+1} + a_n = 0 \quad , \; a_{n+2} - ka_{n+1} - a_n = 0$$

(k is a positive constant number) *the symmetric recurrent formula* , and *the alternativec recurrent formula* each other. The radii of the circles which are tangential to each other and to the hyperbola are derived from these recurrent formula. Fibonacci sequence , Lucus sequence and the solutions of Pell's equation are also derived from these recurrent formula. In this paper we shall consider the relations among the radii, Fibonacci and Lucus sequence, and the solutions of Pell's equation using these recurrent formula as an intermediary.

はじめに

数列 $\{a_n\}$に対する 3 項間の漸化式

$$a_{n+2} - ka_{n+1} + a_n = 0 \quad , \; a_{n+2} - ka_{n+1} - a_n = 0 \qquad (k \text{ は定数})$$

をそれぞれ「対称的な漸化式」，「交代的な漸化式」と呼ぼう。本稿は，対称的な漸化式と交代的な漸化式を通していくつかの数学的な事項の関連を考察する。

なお，2 番目の交代的な漸化式で定まる数列の 1 項おきの数列は，対称的な漸化式

$$b_{n+2} - (k^2 + 2)b_{n+1} + b_n = 0$$

を満たす。

1．フィボナッチ数列とリュカ数列

フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ とリュカ数列$\{l_n\}$

$f_{-1} = 1, f_0 = 0, f_1 = 1, f_2$ 以降は 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,⋯ ,

$l_{-1} = -1, l_0 = 2, l_1 = 1, l_2$ 以降は 3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,⋯

はどちらも交代的な漸化式

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \tag{1}$$

を満たす。また，1 項おき，2 項おきの数列はいずれもそれぞれ次のような対称的，交代的な漸

化式を満たす：

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 \tag{2}$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} - a_n = 0 \tag{3}$$

２．ペル方程式

ペル方程式は

$$x^2 - Ny^2 = 1 \tag{4}$$

あるいは

$$x^2 - Ny^2 = (-1)^n \tag{5}$$

（N は平方因数を含まない 2 以上の整数，n は整数）の形をした方程式で，整数解を求めるものである。ペル方程式(4)には必ず最小の正の解の組が必ず存在してそれを $\binom{x}{y} = \binom{s}{t}$ とおく。

（表１）0 以上の解を小さい順に並べて $\binom{x}{y} = \binom{x_n}{y_n}$（$n$ は 0 以上の整数）とすると，これは次の対称的な漸化式によって定まる：

$$\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{0}, \binom{x_1}{y_1} = \binom{s}{t}, \quad \binom{x_{n+2}}{y_{n+2}} = 2s\binom{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \binom{x_n}{y_n} \tag{6}$$

特に，$\frac{s-1}{2}$ が平方数の場合，ペル方程式(5) に解が存在して，次の交代的な漸化式によって定まる：

$$\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{0}, \ \binom{x_1}{y_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{s-1}{2}} \\ \sqrt{\frac{s+1}{2N}} \end{pmatrix}, \ \binom{x_{n+2}}{y_{n+2}} = \sqrt{2(s-1)}\binom{x_{n+1}}{y_{n+1}} + \binom{x_n}{y_n} \tag{7}$$

表１．ペル方程式の最小正の解の組

N	2	3	5	6	7	10
s	3	2	9	5	8	19
t	2	1	4	2	3	6

例１． ペル方程式

$$x^2 - 3y^2 = 1 \tag{8}$$

の解の漸化式と解は次のようになる：

$$\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{0}, \binom{x_1}{y_1} = \binom{2}{1}, \ \binom{x_{n+2}}{y_{n+2}} = 4\binom{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \binom{x_n}{y_n}, \tag{9}$$

$$\binom{x_2}{y_2} \text{ 以降は } \binom{7}{4}, \binom{26}{15}, \binom{97}{56}, \binom{362}{209}, \cdots$$

例２．ペル方程式 $$x^2-5y^2=(-1)^n \tag{10}$$

は $s=9$ で $\frac{s-1}{2}=4$ が平方数なので，(7)から解の漸化式と解は次のようになる：

$$\binom{x_0}{y_0}=\binom{1}{0},\binom{x_1}{y_1}=\binom{2}{1},\ \binom{x_{n+2}}{y_{n+2}}=4\binom{x_{n+1}}{y_{n+1}}+\binom{x_n}{y_n}, \tag{11}$$

$$\binom{x_2}{y_2}\text{以降は}\binom{9}{4},\binom{38}{17},\binom{161}{72},\binom{682}{305},\ \cdots$$

３．双曲線の中の円の半径

中心がy軸上にある円

$$C_n：\ x^2+(y-c_n)^2={r_n}^2 \quad (n\text{は整数、}c_n<c_{n+1}, r_n>0)$$

は，双曲線

$$x^2-ay^2=b\ \ (a>0, b\neq 0)$$

と接し， C_n と C_{n+1} が互いに外接するとする。円$\{C_n\}$全体を「双曲線の中の円」と呼ぼう。次の定理が成り立つ。（証明略）

定理１．円 C_n の半径$\{r_n\}$，中心のｙ座標$\{c_n\}$ はどちらも次の対称的な漸化式を満たす:

$$a_{n+2}-2(2a+1)a_{n+1}+a_n=0 \tag{12}$$

なお，r_0 を定めると，c_0, r_1, c_1 が次のように定まる：

$$c_0=\sqrt{\frac{a+1}{a}(r_0^2-b)}\ ,\ \ r_1=(2a+1)r_0+2ac_0,\ \ c_1=r_0+c_0+r_1 \tag{13}$$

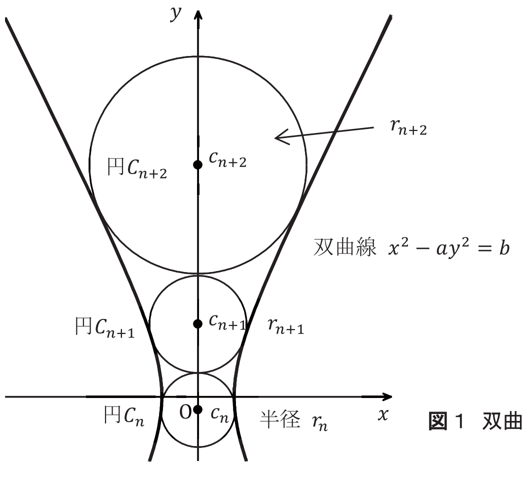

図１ 双曲線の中の３個の円

４．ペル方程式とフィボナッチ数列

ペル方程式(10) の解 とフィボナッチ数列$\{f_n\}$およびリュカ数列$\{l_n\}$ に関して次の定理が成り立つ。

定理２．ペル方程式(10) の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ とフィボナッチ数列 $\{f_n\}$，リュカ数列 $\{l_n\}$ の間に次の関係式が成り立つ：

$$x_n = \frac{1}{2}(f_{3n-1} + f_{3n+1}) = \frac{1}{2} l_{3n} \quad , \quad y_n = \frac{1}{2} f_{3n} = \frac{1}{10}(l_{3n-1} + l_{3n+1})$$

証明．漸化式(11)と(3) が一致し，$n = 0, 1$ のとき

$$f_{-1} + f_1 = 1 + 1 = 2 = 2x_0 \ , \ f_2 + f_4 = 1 + 3 = 4 = 2x_1 \ ,$$
$$l_0 = 2 = 2x_0 \ , \ l_3 = 4 = 2x_1 \ ,$$
$$f_0 = 0 = 2y_0 \ , \ f_3 = 2 = 2y_1 \ ,$$
$$l_{-1} + l_1 = -1 + 1 = 0 = 10y_0 \ , \ l_2 + l_4 = 3 + 7 = 10 = 10y_1$$

とそれぞれが一致することから示される。 □

５．フィボナッチ数列と双曲線の中の円

フィボナッチ数列 $\{f_n\}$，リュカ数列 $\{l_n\}$ と双曲線の中の円 C_n の半径 $\{r_n\}$，中心の y 座標 $\{c_n\}$ に関して次の定理が成り立つ。

定理３．$n \geqq 0$，$r_0 = 1$ とする。

(a) 双曲線 $H_x : x^2 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{4}{5}$ の中の円 C_n に関して，$r_n = f_{2n+1}$，$c_n = l_{2n+1}$ である。

(b) 双曲線 $H_y : x^2 - \frac{1}{4}y^2 = -\frac{4}{5}$ の中の円 C_n に関して，$r_n = f_{2n+2}$，$c_n = l_{2n+2}$ である。

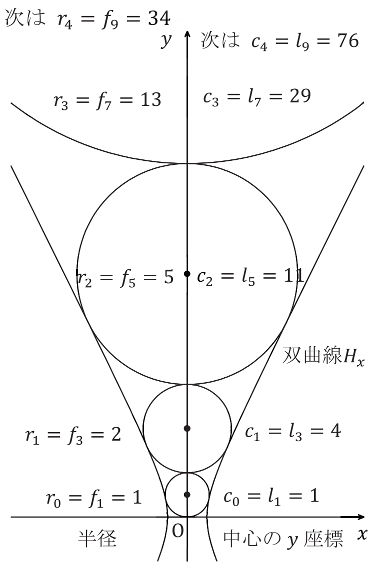

図２　定理３(*a*)の図

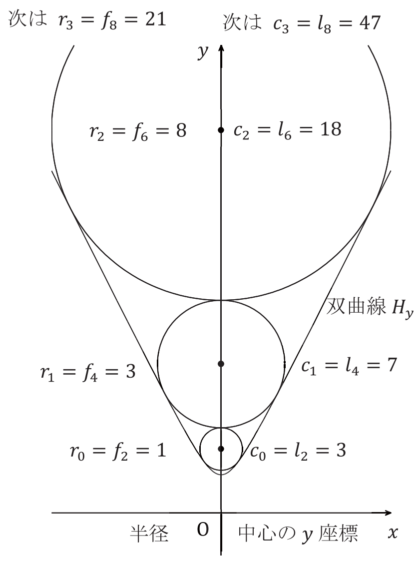

図３　定理３(*b*)の図

証明. (a) $a=\frac{1}{4}$ のとき，$\{f_{2n+1}\}$，$\{l_{2n+1}\}$ の漸化式(2) と，$\{r_n\}$，$\{c_n\}$ の漸化式（12）は一致する。 $b=\frac{4}{5}, r_0=1=f_1$ とすると，(13) から

$$c_0=\sqrt{5\left(1-\frac{4}{5}\right)}=1=l_1 \ , \ r_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2=f_3,\ c_1=1+1+2=4=l_3$$

なので示される。(b) も同様に示される。 □

６．ペル方程式と双曲線の中の円

ペル方程式の解と双曲線の中の円 C_n の半径 $\{r_n\}$ に関して次の定理が成り立つ。

定理４．ペル方程式(4)の解 $x=x_n$ ，$y=y_n$ はそれぞれ双曲線 H_x： $x^2-\frac{s-1}{2}y^2=1$ ，

H_y： $x^2-\frac{s-1}{2}y^2=-\frac{1}{N}$ の中の円 C_n の半径 r_n と一致させることができる。

証明. $a=\frac{s-1}{2}$ のとき，$\{x_n\}$ の漸化式(6) と，$\{r_n\}$ の漸化式（12）は一致する。

$b=1$，$r_0=1=x_0$ とすると(13)から，$c_0=0$，$r_1=s=x_1$ なので，双曲線 H_x の中の円の半径に関して $r_n=x_n$（$n\geqq 0$） が成り立つ。

$b=-\frac{1}{N}$，$r_0=0=y_0$ とすると， $c_0=\sqrt{\frac{s+1}{(s-1)N}}=\sqrt{\frac{s^2-1}{(s-1)^2N}}=\sqrt{\frac{t^2}{(s-1)^2}}=\frac{t}{s-1}$，$r_1=t=y_1$ なので，双曲線 H_y の中の円の半径に関して $r_n=y_n$（$n\geqq 1$）が成り立つ。 □

例３．ペル方程式（8）の解 x_n, y_n は，それぞれ双曲線 H_x： $x^2-\frac{1}{2}y^2=1$ ，

H_y： $x^2-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{3}$ の中の円 C_n の半径 r_n と一致させることができる。

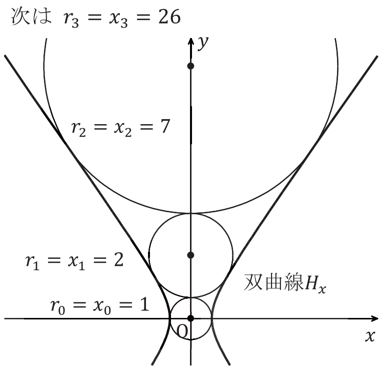

図４　例３の図（1）

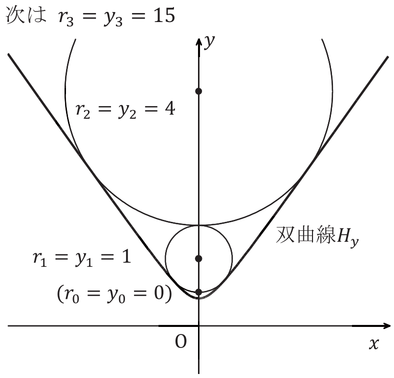

図５　例３の図（2）

おわりに

同じ3項間の漸化式をもつ2つの数列は，初項と第2項が一致すればすべての項が一致する。これから，フィボナッチ数列，ペル方程式の解，双曲線の中の円の半径がそれぞれ関連していることが分かった。特に，フィボナッチ数列やペル方程式の解を双曲線の中の円の半径として視覚化できた。また，本稿で扱ったペル方程式は最も単純な場合であり，さらに複雑な性質をもつことが知られている。それを対称的な漸化式や交代的な漸化式を通して表現しその性質を調べることが今後の課題である。

文献.

[1] ジョセフ・シルバーマン，鈴木治郎訳，はじめての数論，東京図書，2008年，第30章.
[2] 一松信，整数とあそぼう，日本評論社，2006年，64-67.
[3] 松田康雄, 双曲線と円の間, 久留米工業高等専門学校紀要 第30巻第1号, 2014年, 11-14.
[4] 松田康雄，ペル方程式の解，九州数学教育会情報　第174号，2014年，　14-17.
[5] 松田康雄，準ペル方程式の解，久留米工業高等専門学校紀要 第31巻第1号，2015年，11-14.
[6] 松田康雄，応用ペル方程式，初等数学83号，2018年，74-78.
[7] 松田康雄，応用ペル方程式(続)，初等数学84号，2018年，83-87.
[8] 松田康雄，対称的な漸化式，久留米工業高等専門学校紀要 第34巻，2019年,1-8 .
[9] 松田康雄，楽しむ初等数学，九州大学出版会，2022年.
[10] 村上雅人，なるほど整数論，海鳴社，2014年，p.280.