

カージオイドの研究

長崎大学教育学部 数理情報講座 数学教室

松田 康雄

On the study of Cardioid

Yasuo Matsuda

Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要

Cardioid is one of the cycloid curves. It is a curve with various construction methods and characteristics. The diversity seems to be based on the parallelograms and isosceles trapezoids in the structural drawing. Investigating the structure of Cardioid leads to knowing the structure of other cycloid curves. In this paper investigate the structure of Cardioid in as elementary a way as possible. For example, consider the tangent line of Cardioid graphically without using the differentiation.

はじめに

円Cが円Oに外接，内接して回転するとき，円Cの周上の定点Pの軌跡はそれぞれ「外，内サイクロイド」，総称して「サイクロイド曲線」と呼ばれる曲線になる。特に円Oと円Cの半径が等しいときの外サイクロイドは「カージオイド(心臓形)」と呼ばれる曲線になる。この曲線はサイクロイド曲線の中でも最も多くの特徴をもつものである。本稿ではその性質や特徴を，できるだけ初等的に記述したものである。

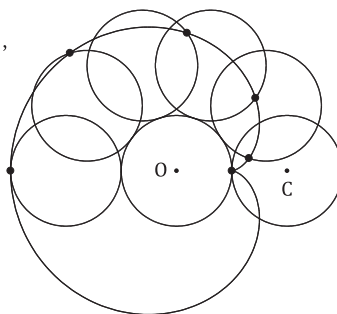


図1 カージオイド

1. カージオイドの構造

カージオイドの構造に関して以下のような定理が成り立つ。

定理1 (内サイクロイドとしてのカージオイド)

円Cの半径が円Oの半径の2倍のときの内サイクロイドはカージオイドである。(図2)

定理2 (リマソンとしてのカージオイド)

円の周上の定点Aと周上の動点Qを結ぶ直線上に $PQ = k$ (一定) となるようにとった点Pの軌跡をリマソンという。一定値 k が円の直径と等しいときのリマソンはカージオイドである。(図3, [12])

定理3 (垂足曲線としてのカージオイド)

円の周上の定点から、その円の接線に下した垂線の足の軌跡(垂足曲線)はカージオイドである。(図4)

定理4 (直線群の包絡線としてのカージオイド(1))

円周上に2点を取り、一つの点をもう一つの点の2倍の速さで円周上を同じ向きに動かす。この2点を結んだ線分の包絡線はカージオイドである。(図5)

定理5 (直線群の包絡線としてのカージオイド(2))

定円にその2倍の半径の円が外接するとき、その定直径の包絡線はカージオイドである。(図6)

定理6 (火線としてのカージオイド)

光線が定曲線に当たって反射したときの反射光線の包絡線を火線という。円周上の定点から出て、その円周に反射した光線の火線はカージオイドである。(図7)

定理7 (円群の包絡線としてのカージオイド)

円の周上に中心があり、その円周上の定点を通る円群の包絡線はカージオイドである。(図8)

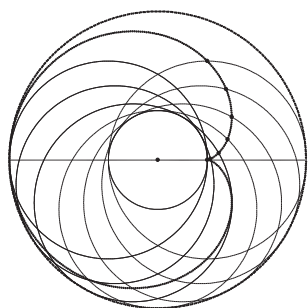


図2 定理1の図

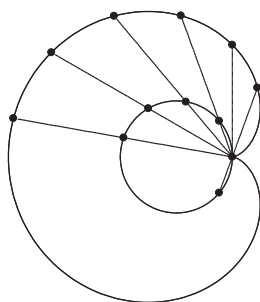


図3 定理2の図

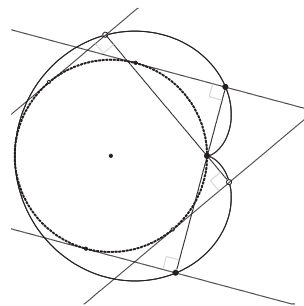


図4 定理3の図

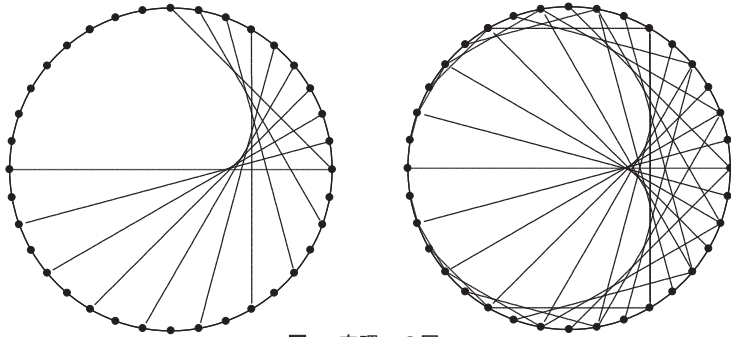


図5 定理4の図

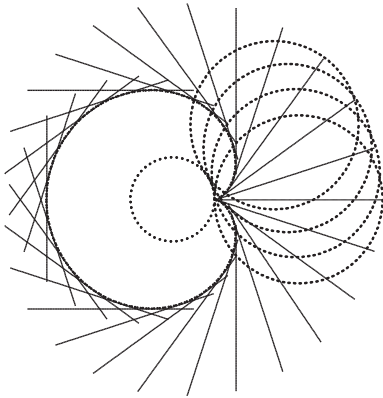


図6 定理5の図

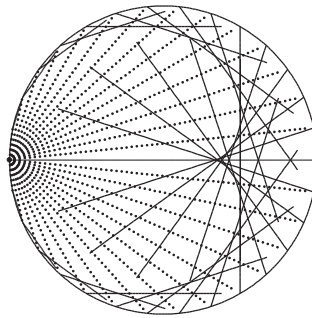


図7 定理6の図

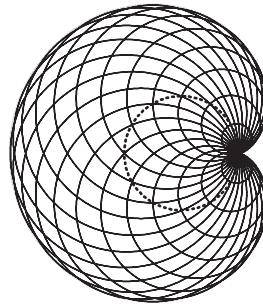
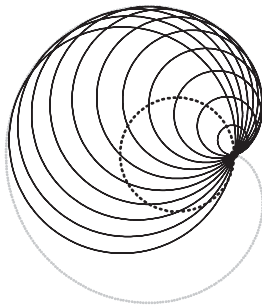


図8 定理7の図

2. カージオイドの構造図と定理の証明

半径1の円Oに半径1の円Cが外接してできるカージオイド上の点をP, 尖点(点Pの最初の点)をA, 円Oと円Cの接点をT, $\angle TOA = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とする。

$$\widehat{AT} = \widehat{PT} \quad (1)$$

なので, $\angle PCT = \theta$ より

$$\triangle OAT \equiv \triangle CPT \quad (2)$$

である。直線PAと円Oの交点をQとすると,

$$\text{四角形OAPCは等脚台形, 四角形OQPCは平行四辺形} \quad (3)$$

である。(線分PAQの長さ) = OC = 2 = (円Oの直径) なので定理2が示される。

直線OQと円Oの交点をRとすると, 点P,Rは, 中心Q, 半径2の円Qの周上にある。

$\angle RQP = \angle OCP = \theta$, $\angle ROA = \angle ROC + \angle COA = \theta + \theta = 2\theta$ より, $\widehat{PR} = \widehat{AR}$ となって定理1が示される。

直線AOと円Oの交点をB, 直線BRと円Cの交点をSとすると, 点B,R,Sと点Q,A,Pは直線OCに関してそれぞれ対称な位置にある。 $BS = QP = 2$ なので, Sは半径2の円Bの周上の点で, $\angle BSP = \angle APS = \frac{\pi}{2}$ 。直線SPは点Sにおける円Bの接線で, 点Pは点Aからこの接線に下した垂線の足であるから定理3が示される。

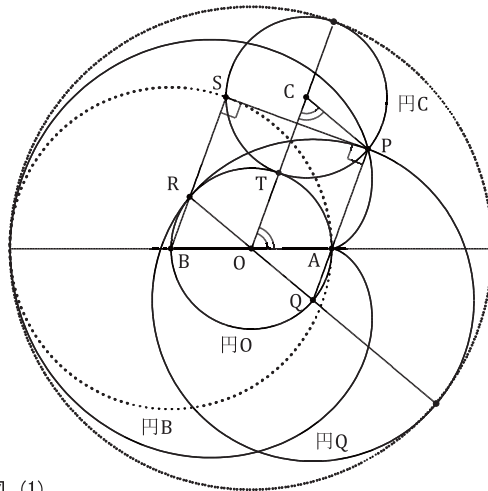


図9 カージオイドの構造図 (1)

直線OC, OQと, 半径3の大円Oの交点をそれぞれ E,Fとする。 $\angle OEP = \frac{1}{2}\angle TCP = \frac{1}{2}\theta$ 。ま

た, $\angle TPE = \frac{\pi}{2}$ で, 円Cが点Tにおいて回転する瞬間の回転の中心は点Tとみなせるので, 直線PEは, 点Pにおけるカージオイドの接線とみなせる。([6] の発想)

$\angle EOF = \pi - \theta$ なので, 3点E,P,Fは同一直線上にある。 $\angle BOF = 2\theta = 2\angle EOA$ なので定理4が示される。

線分EFと半径2の円Eの交点をKとすると, $\angle TEK = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle TOA$ なので, $\widehat{KT} = \widehat{AT}$ となり

定理 5 が示される。

直線AOと大円Oの交点で点Bの側にあるものを点Dとすると、 $\angle DEO = \frac{1}{2}\theta = \angle OEF$ なので

定理 6 が示される。

(2)より、 $TA = TP$ でこれを半径とする円Tは、尖点Aを通り点Pで直線EFと接するので定理 7 が示される。 □

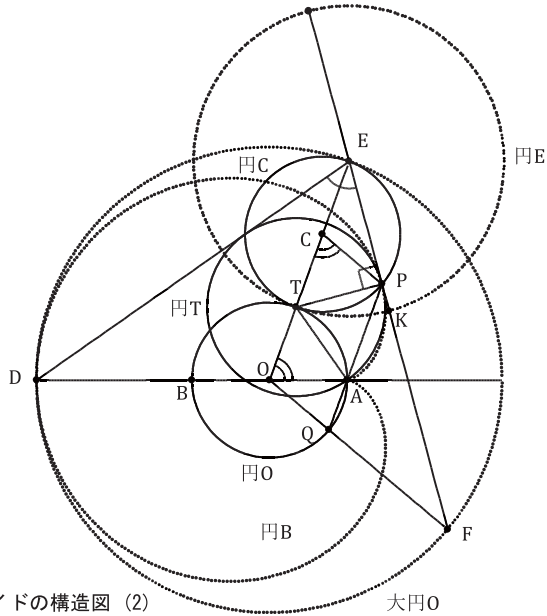


図 10 カージオイドの構造図 (2)

3. カージオイドの性質

カージオイド上の 2 点 P_1, P_2 を 3 点 P_1, A, P_2 が一直線上にあるようにとるとき、次の定理が成り立つ。

定理 8 ([3] 781, 785)

- (a) 線分 P_1P_2 の長さは一定である。
- (b) P_1, P_2 における接線の交点の軌跡は大円Oである。
- (c) P_1P_2 の中点の軌跡は円Oである。
- (d) P_1, P_2 における法線の交点の軌跡は円Oである。

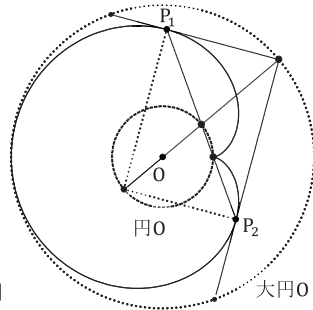


図 11 定理 8 の図

証明. 点 O に関して対称な位置にある 2 つの円 C_i ($i = 1, 2$) を, $\angle C_1OA = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) と
なるようにとり, 円 O , 大円 O との接点をそれぞれ T_i, E_i とする. 円 C_1 上に点 P_1 を $\angle P_1C_1T_1 =$
 θ , 円 C_2 上に点 P_2 を $\angle P_2C_2T_2 = \angle C_2OA = \pi - \theta$ となるようにとり. P_i はカージオイド上の点
で, (3) から, 3 点 P_1, A, P_2 は一直線上にあり, 四角形 $P_1C_1C_2P_2$ は平行四辺形になる. $P_1P_2 =$
 $C_1C_2 = 4$ なので (a) が示される.

直線 P_1E_1 と直線 P_2E_2 の交点を L とすると, $\angle E_1LE_2 = \pi - \angle OE_1L - \angle OE_2L = \pi - \frac{1}{2}\theta -$
 $\frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2}$ なので L は大円 O の周上の点であり, (b) が示される.

線分 P_1P_2 の中点を M とおくと $OM = 1$ より点 M は円 O の周上の点であり, (c) が示される.

直線 P_1T_1 と直線 P_2T_2 の交点を N とすると, $\angle T_1NT_2 = \frac{\pi}{2}$ なので N は円 O の周上の点であ
り, (d) が示される. □

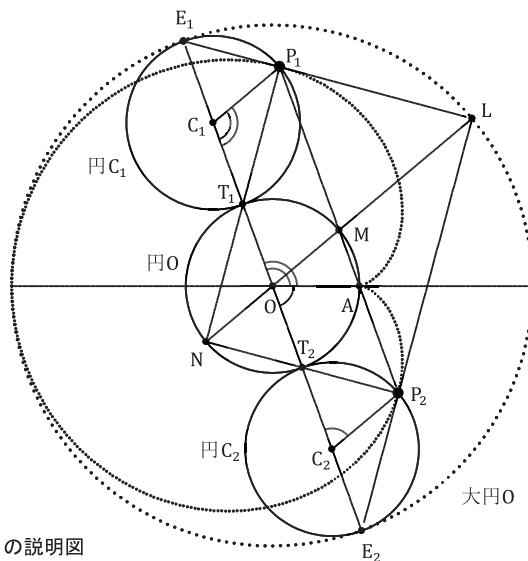


図 12 定理 8 の説明図

4. カージオイドと放物線

カージオイドと放物線は次の定理のように反転図形としての関係がある。([5])

定理 10. カージオイドの尖点 A を反転の中心とする反転図形は放物線である。

証明. (2) より $TP = TA$ で $\angle PTA = \theta$ より $\triangle TAP \sim \triangle OAT$ で

$$\angle TPA = \angle TAP \left(= \frac{\pi - \theta}{2} \right) \tag{4}$$

である。

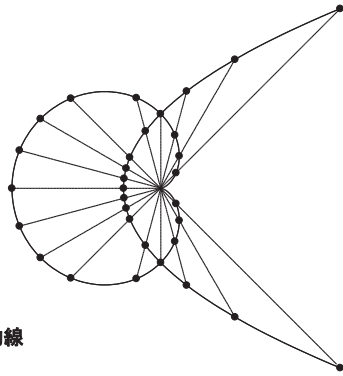


図 13 カージオイドと反転図形の放物線

次に、点 A を中心とする反転を考える。この反転によって移された点を' を付けて表し、 $AP \cdot AP' = 4$ 等とする。円 O の反転図形は、点 B における円 O の接線 (ℓ とする) である。T' は ℓ 上の点である。また、 $AP \cdot AP' = AT \cdot AT'$ なので、方べきの定理の逆から、4 点 P, P', T', T は同一円周上にある。したがって

$$\angle TT'P' = \angle TPA \left(= \frac{\pi - \theta}{2} \right) \tag{5}$$

である。(4), (5) から、 $\angle P'T'A = \angle P'AT' = \angle T'AB$ より $P'T' = P'A$ であり、また、 $P'T' \parallel OA$ なので、 $P'T' \perp \ell$ となる。したがって、点 P' の軌跡は、A を焦点、 ℓ を準線とする放物線である。□

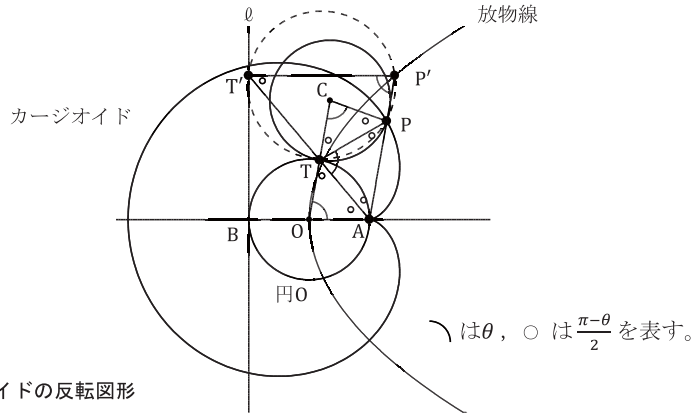


図 14 カージオイドの反転図形

カージオイドと放物線に関して次の定理が成り立つ。

定理 11. 点Aを焦点として，定点Dを通る放物線の頂点Pの軌跡はカージオイドである。
([3], 784)

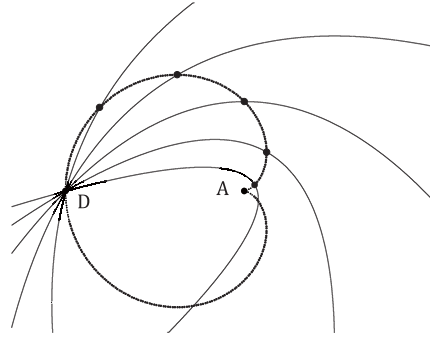


図 15 放物線の頂点とカージオイド

証明. 点Xを $XD \parallel OC$ ， $DX = 4(= DA)$ となるようにとる。点Xを通り直線DXと垂直な直線Lに，点Aから下した垂線の足をY，点Aから直線DXに下した垂線の足をZとする。(3)から四角形OAPCは等脚台形なので， $AP = 2(1 - \cos \theta)$ 。また， $AY = ZX = DX - DZ = 4 - 4 \cos \theta$ より， $AY = 2AP$ で，点Pは線分AYの中点である。点Aを焦点，直線Lを準線とする放物線は点Dを通り，点Pはその頂点である。□

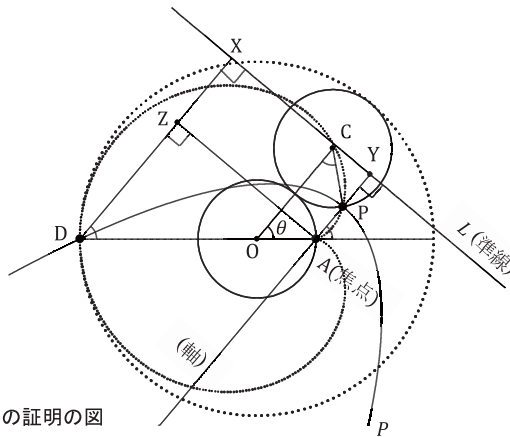


図 16 定理 11 の証明の図

おわりに

カージオイドは多彩な性質をもつことが知られているが、それは(1)に由来する (3) の性質に起因すると思われる。カージオイドを考察することによって、他のサイクロイド曲線の性質も理解できる場合が多い。

カージオイドとは不思議と放物線と縁がある。根源的な理由をさらに追求したい。

文献・参考資料

- [1] 磯田正美他, 曲線の事典, 共立出版, 2009年, p.109.
- [2] 岩合一男他, 曲線・グラフ総覧, 聖文社, 1971年.
- [3] 岩田至康, 幾何学大辞典 6, 槇書店, 1986年.
- [4] 林幹雄, 複素数の幾何学, 共立出版, 1963年.
- [5] 高橋光重, 課題 41-1 研究, 初等数学 42号, 2001年, 104-106.
- [6] バケリマン・ボルチャンスキー, 北原泰彦・富田幸子訳, 反転・包絡線, 東京図書数学新書, 1972年.
- [7] ダン・ペドウ, 磯田浩訳, 図形と文化, 法政大学出版局りぶりあ選書, 1985年.
- [8] J.S.マダチ, 数学プロムナード, 啓学出版, 1987年, 96-98.
- [9] 松田康雄, カージオイド考, 初等数学 18号, 1989年, 32-35.
- [10] 松田康雄, 浮かベリマソン, 初等数学 35号, 1998年, 103-104.
- [11] 松田康雄, カージオイド譚, 初等数学 45号, 2002年, 67-69.
- [12] 松田康雄, カージオイド考, 日本数学協会論文集第5号, 2009年, 14-18.
- [13] 松田康雄, 心臓形と放物線, 初等数学 87号, 2019年, 68-69.
- [14] 松田康雄, カージオイドの反転図形が放物線であること, 数学セミナー2021年7月号 NOTE, p.53,
- [15] 松田康雄, 楽しむ初等数学, 九州大学出版会, 2022年.

