第１章　ディジタル制御とは？

1.1　数列

ディジタル制御の話を始める前に**数列**(sequence, progression)の復習をしよう。**公比**(common ratio) p の**等比数列**(geometric sequence)

$$x_{k+1} = p\,x_k \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{1-1}$$

を考える。このとき，

$$x_k = p^k\,x_0 \tag{1-2}$$

と表せる。$k \to \infty$ のとき，x_k がどうなるか考えると，以下のことが判る。

$|p| < 1$　のとき　$x_k \to 0$　（収束，安定）

$p = 1$　のとき　$x_k \to x_0$　（収束，安定限界）
$p = -1$　のとき　$x_k \to \pm x_0$　（振動，安定限界）

$|p| > 1$　のとき　$x_k \to \infty$　（発散，不安定）

<u>ディジタル制御系は数列として捉(とら)えることができる</u>。すなわち，k 番目の値と $(k+1)$ 番目の値がどのように関係するかが問題となる。この場合，値が無限大になることは避けなければならない。制御ではこれを不安定という。従って，(1-1)の安定条件は，

$$|p| < 1 \qquad (\ -1 < p < 1\ ) \tag{1-3}$$

である。

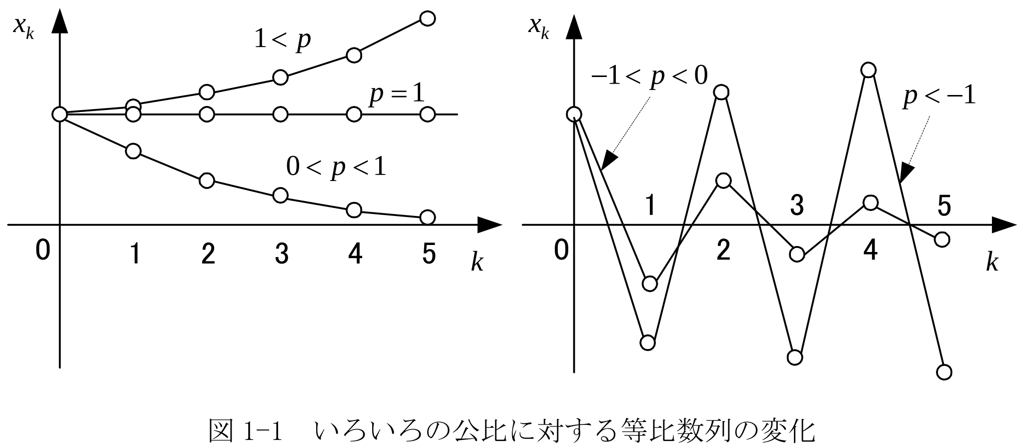


図 1−1　いろいろの公比に対する等比数列の変化

今度は次式で表現される数列（一般には**差分方程式**(difference equation)という）を考える。

$$x_{k+1} = p\,x_k + q \qquad (k = 0,1,2,3\cdots) \tag{1-4}$$

ここで，p,q は一定値とする。$k = 0,1,2,3\cdots$ を代入して，次式が得られる。

$$x_1 = p\,x_0 + q$$

$$x_2 = p\,x_1 + q = p^2 x_0 + pq + q$$

$$x_3 = p\,x_2 + q = p^3 x_0 + p^2 q + pq + q$$

同様にして

$$x_k = p^k x_0 + (p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1)q = p^k x_0 + \frac{1-p^k}{1-p}q \qquad (p \neq 1) \tag{1-5}$$

(1-5)で，$k \to \infty$ のとき，$|p| < 1$ であれば,

$$x_{\infty} = \frac{q}{1-p} \tag{1-6}$$

となる。これは，(1-4)で，$x_{k+1} = x_k = x_\infty$ と置くことでも得られる。従って，(1-4)においても，x_∞ が一定値に収束する（安定である）ための条件は，p の絶対値が 1 以下であることである。実際のシステムでは，q は入力または指令値に相当する。

○　**等比数列の公式**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad r \neq 1 \qquad n+1 \text{は項数}$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1 \qquad \text{無限等比級数}$$

1.2　z 変換

いま，ある数列（≡は定義を表す）

$$\{x(k)\} \equiv \{x(0), x(1), x(2), \cdots\} \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad \text{『定義』} \tag{1-7}$$

に対し，複素数 z を用いて，数列 $\{x(k)\}$ の**z変換**(z-transform)を次式で定義する。

$$Z\{x(k)\} \equiv X(z) \equiv x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots \tag{1-8}$$

複素数 z は z 変換 $X(z)$ が収束するように選ぶものとする。定義は覚えるしかない。定義が

判らないとか難しいと言って逃げていたらダメです。数列の最初から順番に $1,\ z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}\cdots$ を掛けて加えるだけである。この定義を用いると，数列

$$\{x(k+1)\} \equiv \{x(1), x(2), x(3), \cdots\} \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad \text{『定義』} \tag{1-9}$$

に対する z 変換は次式で与えられる。（初項が何から始まるかがポイント！）

$$Z\{x(k+1)\} = x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + x(4)z^{-3} + \cdots \tag{1-10}$$

(1-8)を用いると，

$$Z\{\, x(k+1)\} = z\, X(z) - z\, x(0) \tag{1-11}$$

が成り立つ。一方，数列

$$\{x(k-1)\} \equiv \{x(-1), x(0), x(1), x(2)\cdots\} \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \text{『定義』} \tag{1-12}$$

に対する z 変換は，$x(k) = 0\ :\ k < 0$ と定義し（ディジタル制御では負の時間の信号は 0 と考えるということ），$\{x(k-1)\} \equiv \{0, x(0), x(1), x(2)\cdots\}$ だから，次式で与えられる。

$$Z\{x(k-1)\} = x(0)z^{-1} + x(1)z^{-2} + x(2)z^{-3} + \cdots = z^{-1}X(z) \tag{1-13}$$

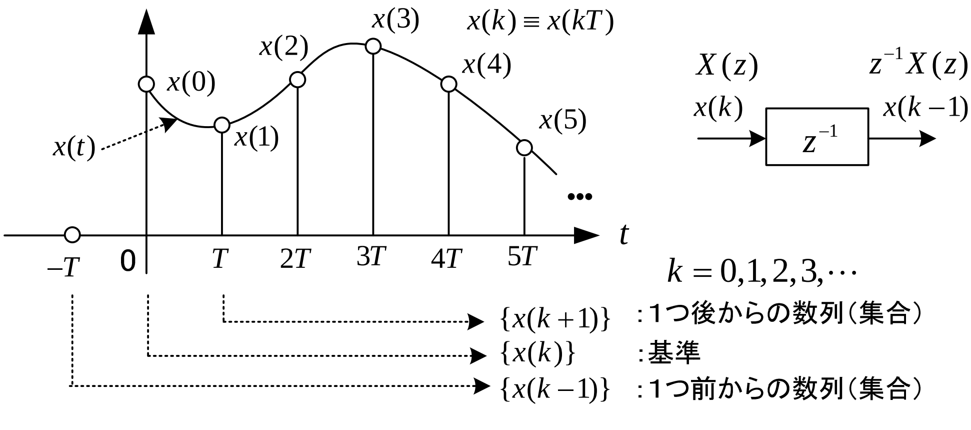


図 1-2　サンプリングした値と数列の関係

制御においては，周期 T ごとにデータが検出されたり出力されたりする。この周期 T を**サンプリング周期**(sampling period)と呼ぶ。連続量 $x(t)$ に対し，$t = kT$ における値を $x(k)$ と書く。この関係を図 1-2 に示す。ディジタル制御系は差分方程式で表され，時間的に

$k=0,1,2,\cdots$ と変化すると考えてよく，　$\{x(k-1)\}$ の k 番目の要素 $x(k-1)$ は $\{x(k)\}$ の k 番目の要素 $x(k)$ より 1 サンプリング周期分データが古く，それが(1-13)になるので， z^{-1} には**1 サンプリング周期遅らせる（古いデータにする）**という意味があることが判る。

z 変換は，一つの値に対する変換ではなく，数列全体すなわち全ての値に対する変換であることを忘れないでおこう。だから $x(1)$ の z 変換と言っても意味がない。

[例題 1-1]　値が全て 1 である数列　$\{x(k)\}=\{1,\ 1,\ 1,\ \cdots\}$　の z 変換を求めよ。

(解）定義より，

$$Z\{x(k)\}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

但し，収束するように z を選ぶものとする。ラプラス変換の場合と同様，z 変換を用いるときに，z 変換の収束条件を気にすることはまずないだろう。

＊　$\{x(k)\}=\{1,\ 0,\ 0,\ 0,\cdots\}$ の z 変換は 1，　$\{x(k)\}=\{0,\ 1,\ 0,\ 0,\cdots\}$ の z 変換は z^{-1} である。従って，1 の z 変換と言う表現はあいまいである。通常，これは $\{x(k)\}=\{1,1,1,\cdots\}$ の z 変換を意味するのだろうが。

[例題 1-2]　数列

$$\{x(k)\}=\{1,\ p,\ p^2,\ p^3,\cdots\}$$

すなわち，　$x(k)=p^k$　$(k=0,1,2,\cdots)$ の z 変換を求めよ。

(解）定義より，

$$Z\{x(k)\}=1+pz^{-1}+p^2z^{-2}+p^3z^{-3}+\cdots=\frac{1}{1-pz^{-1}}=\frac{z}{z-p}$$

（注）この式を，p で微分すると，　$x(k)=k\,p^{k-1}$　$(k=0,1,2,\cdots)$ の z 変換が得られる。

$$Z\{0,1,2p,3p^2,4p^3,\cdots\}=z^{-1}+2p\,z^{-2}+3p^{\,2}z^{-3}+\cdots=\frac{z}{(z-p)^2}$$

[例題 1-3]　数列

$\{x(k+2)\}=\{x(2),\ x(3),\ x(4),\ \cdots\}$　　$(k=0,1,2,\cdots)$

の z 変換を $X(z)$ を用いて表せ。

(解）定義より，

$$Z\{x(k+2)\}=x(2)+x(3)z^{-1}+x(4)z^{-2}+x(5)z^{-3}+\cdots=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$$

1.3　z 変換による差分方程式の解法

次に示すかんたんな**差分方程式**(difference equation)を z 変換で解いてみよう。

$$x(k+1) = p\,x(k) + q \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{1-14}$$

なお，　$x_{k+1} = p\,x_k + q$　のように書くこともある。上式は以下の意味がある。

$$x(1) = p\,x(0) + q,\ x(2) = p\,x(1) + q,\ x(3) = p\,x(2) + q,\cdots \tag{1-15}$$

z 変換の定義より，

$$Z\{x(k+1)\} = x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + x(4)z^{-3} + \cdots$$

$$Z\{x(k)\} \equiv X(z) \equiv x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots$$

$$Z\{q,q,q,\cdots\} = q + q\,z^{-1} + q\,z^{-2} + q\,z^{-3} + \cdots$$

これらの式を用いると，(1-15)より，**数列**（成分ではなく）の z 変換には以下の関係が導ける。

$$Z\{x(k+1)\} = p\,Z\{x(k)\} + Z\{q,q,q,\cdots\} \tag{1-16}$$

(1-11)の公式を用いると，

$$z\,X(z) - z\,x(0) = p\,X(z) + \frac{q\,z}{z-1}$$

従って，この式から $X(z)$ を求め，**逆z変換**(inverse z-transform)すると $x(k)$ が求まる。この解き方は後述の例題 1-4 で詳しく述べる。 $q = 0$ の場合には，次式となる。

$$X(z) = \frac{z}{z-p}\,x(0)$$

$x(0)$ は定数だから，例題 1-2 を逆に考えて，一般解は次式となる。

$$x(k) = p^k\ x(0) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

当然の結果であるが，z 変換で求めたことに意味がある。また，ある成分について書かれた（1-14）の関係式が，数列全体に及ぶ z 変換に対しても同じ関係式で成り立つ（(1-16）式）ことを良く考えて欲しい。$1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}\cdots$ と順番に掛けて加えたものが z 変換だから，任意の順番のところで成り立つと z 変換したものにも成り立つということを。

[例題 1-4] 次の差分方程式を解け。

$$x(k+2)-x(k+1)+0.24x(k)=1,\quad x(0)=1,\ x(1)=2\quad (\ k=0,1,2,\cdots) \qquad ①$$

(解)　①を数列で表して，それを z 変換すると，次式を得る。

$$Z\{x(k+2)\}-Z\{x(k+1)\}+0.24Z\{x(k)\}=Z\{1,1,1,\cdots\} \qquad ②$$

故に，

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)-\{zX(z)-zx(0)\}+0.24X(z)$$

$$=(z^2-z+0.24)X(z)-z^2-z$$

$$=\frac{z}{z-1} \qquad ③$$

よって，$X(z)=\dfrac{z^3}{(z-0.6)(z-0.4)(z-1)}$ ④

$X(z)/z$ を作り（これがコツ），これを**部分分数展開**すると次式となる。

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-0.6)(z-0.4)(z-1)}=\frac{25}{6}\frac{1}{z-1}-\frac{9}{2}\frac{1}{z-0.6}+\frac{4}{3}\frac{1}{z-0.4} \qquad ⑤$$

両辺に z をかけて，

$$X(z)=\frac{25}{6}\frac{z}{z-1}-\frac{9}{2}\frac{z}{z-0.6}+\frac{4}{3}\frac{z}{z-0.4} \qquad ⑥$$

逆変換して，

$$x(k)=\frac{25}{6}-\frac{9}{2}(0.6)^k+\frac{4}{3}(0.4)^k\quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad ⑦$$

＊なお，⑤式の $\dfrac{a}{z-p}$ 係数 a は，重根でなければ，以下の公式が使える。

$$a=(z-p)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p} \qquad ⑧$$

[問題 1-1]　　z 変換を用いて，次の差分方程式を解け。

$x(k+2)+4x(k+1)+3x(k)=1,\quad x(0)=0,\ x(1)=0\quad (k=0,1,2,\cdots)$

（答）

$$Z\{x(k+2)\}+4Z\{x(k+1)\}+3Z\{x(k)\}=Z\{1,1,1,\cdots\}$$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+4\{zX(z)-zx(0)\}+3X(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{8}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{z+3}$$

$$x(k)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(-1)^k+\frac{1}{8}(-3)^k\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

[問題 1-2]　z 変換を用いて，次の差分方程式を解け。ただし，$p \neq 1$とする。

$x(k+1) = p\,x(k) + q$ ，　$x(0) = 1$　$(k = 0,1,2,\cdots)$

（答）　$Z\{x(k+1)\} - p\,Z\{x(k)\} = Z\{q,q,q,\cdots\}$

$$zX(z) - zx(0) - p\,X(z) = q\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-1+q}{(z-p)(z-1)} \qquad x(k) = \frac{q}{1-p} + \frac{1-p-q}{1-p}p^k$$

z 変換に関する重要な定理を以下にまとめておく。

1.　**定義**　$Z\{x(k)\} \equiv X(z) \equiv x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots$

2.　$Z\{x(k-1)\} = z^{-1}X(z) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

$Z\{x(k+1)\} = z\,X(z) - z\,x(0) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

$Z\{x(k+2)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

3. **数列の z 変換**

数列	$X(z)$
$\{x(k)\} = \{1,\ 0,\ 0,\ 0,\cdots\}$ $k=0$ のとき 1	1
$\{x(k)\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 0,\cdots\}$ $k=1$ のとき 1	z^{-1}
$\{x(k)\} = \{0,\ \cdots,\ 0,1,0,\ \cdots,0\}$ $k=j$ のとき 1	z^{-j}
$\{x(k)\} = \{1,1,1,\ \cdots\}$ 一般項　$x(k)=1$	$\frac{z}{z-1}$
$\{x(k)\} = \{1,\ p,\ p^2,\ p^3,\cdots\}$ 一般項　$x(k)=p^k$	$\frac{z}{z-p}$

4. **線形性**(linearity)

2 つの数列$\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$の線形結合の z 変換

$$Z\{a\,x(k) + b\,y(k)\} = a\,Z\{x(k)\} + b\,Z\{y(k)\} \qquad (1\text{-}17)$$

ただし，a,b は定数。

5. **初期値の定理**(initial value theorem)

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad (1\text{-}18)$$

6. 最終値の定理(final value theorem)

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \tag{1-19}$$

初期値の定理は定義より明らかである。

<u>線形性の証明</u>

$$\{x(k)\}\equiv\left\{x(0),\ x(1), x(2), x(3), \cdots\right\},\quad \{y(k)\}\equiv\left\{y(0),\ y(1), y(2), y(3), \cdots\right\}$$

及び

$$Z\{x(k)\}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+\cdots$$

$$Z\{y(k)\}=y(0)+y(1)z^{-1}+y(2)z^{-2}+y(3)z^{-3}+\cdots$$

と定義されている。よって,

$$\{a\,x(k)+b\,y(k)\}=\{a\,x(0)+b\,y(0), a\,x(1)+b\,y(1), a\,x(2)+b\,y(2),\cdots\}$$

であるから,

$$\begin{aligned}Z\{a\,x(k)+b\,y(k)\}&=a\,x(0)+b\,y(0)+(a\,x(0)+b\,y(0))z^{-1}\\&\quad+(a\,x(2)+b\,y(2))z^{-2}+(a\,x(3)+b\,y(3))z^{-3}+\cdots\\&=a\,Z\{x(k)\}+b\,Z\{y(k)\}\end{aligned}$$

<u>最終値の定理の証明</u>

$$Z\{x(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\,z^{-k}=X(z) \qquad ①$$

である。また,

$$Z\{x(k+1)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k+1)\,z^{-k}=z\,X(z)-z\,x(0) \qquad ②$$

②－①　より

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(k+1)\,z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\,z^{-k}=(z-1)X(z)-z\,x(0) \qquad ③$$

両辺を $z\to 1$ とすると,③は次式となる。

$$\text{左辺}=\lim_{z\to 1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x(k+1)\,z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\,z^{-k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k+1)-\sum_{k=0}^{\infty}x(k)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k}x(k+1)-\sum_{k=0}^{k}x(k)\right)=\lim_{k\to\infty}\ x(k+1)-x(0) \qquad ④$$

$$\text{右辺}=\lim_{z\to 1}((z-1)X(z)-z\,x(0))=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)-x(0) \qquad ⑤$$

④,⑤より, $\lim_{k\to\infty}x(k+1)=x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

（注意） $X(z)=\dfrac{A}{(z-1)B}$ 　となっているかもしれないので, $\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ で z に 1 を代入して 0 になるとしてはいけない。例題 1-4 の⑥,⑦式で定理を確認せよ。

1.4　かんたんなディジタル制御系

RL 回路の電流をコンピュータで制御する**ディジタル制御系**(digital control system)を考えることにより，**ディジタル制御**(digital control)とはどんなものか体験していただこう。

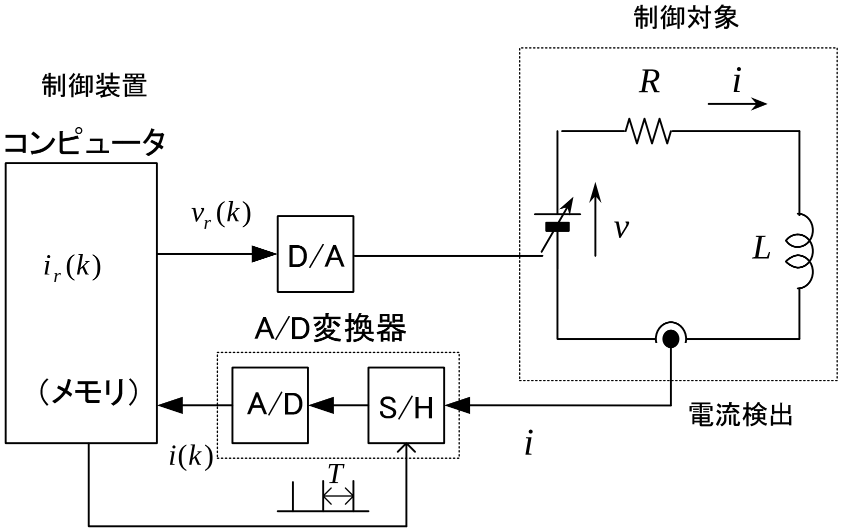


図 1-3　コンピュータ制御系(ディジタル制御系)の構成

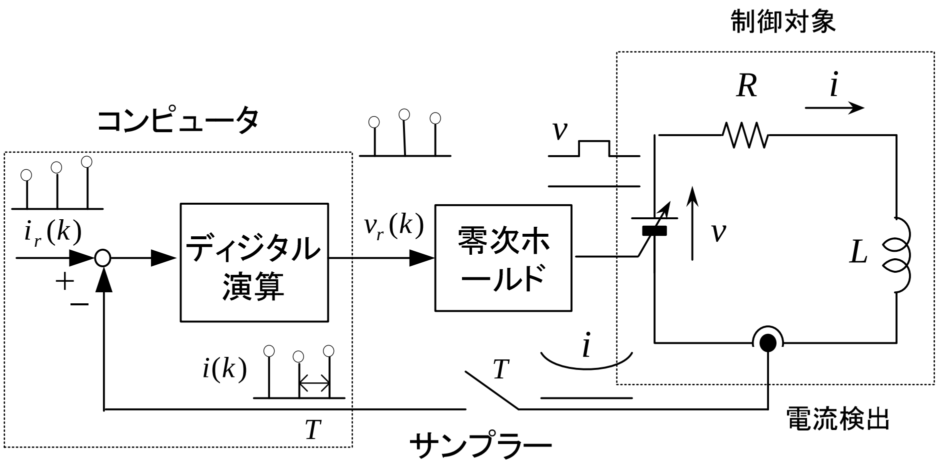


図 1-4 コンピュータ制御系(ディジタル制御系)のモデル

RL 回路の電流をホール素子で検出し，それを**A/D変換器**(A/D converter)によりコンピュータへ取り込む。取り込んだ値はコンピュータのメモリへ保存される。A/D 変換器の中には**サンプルホールド回路**(S/H)(sample hold circuit)があり，ある瞬間の値が保持され（ちょうど写真のように）それがディジタル量に変換される。この動作は**サンプリング周期** T ごとに行われ，**サンプラー**(sampler)として表わしている。なお，ディジタル量の精度は A/D 変換器のビット数で決まる。例えば 8 ビットデータに変換するなら四捨五入の様にして 256 通りの

数値のいずれかに割り当てられる。これを**量子化**(quantization)という。本テキストでは，十分なビット数があり量子化は考えず，時間的な動作のみを検討する。コンピュータでは，検出した $i(k)$ とその**指令値**(reference value) $i_r(k)$ をもとに制御演算を行い，その結果求まる入力指令 $v_r(k)$ を D/A 変換器へ送る。D/A 変換器へは，サンプリング周期 T ごとにしか値は送られてこないが，制御対象へは連続的に電圧を加える必要があり，次の指令値が来るまで T の間その値を保持する。これを**零次ホールド**(zero-order holding)という（図 1-5 参照）。指令値に従って制御対象の入力 $v(t)$ が作られる。D/A 変換器や v の電源部分については，実際にはいろいろの構成法があり，パワートランジスタを用いた電力変換器も必要であるが，最も単純な動作を仮定し，図 1-4，図 1-5 のように考えよう(詳細は 7 章で述べる)。

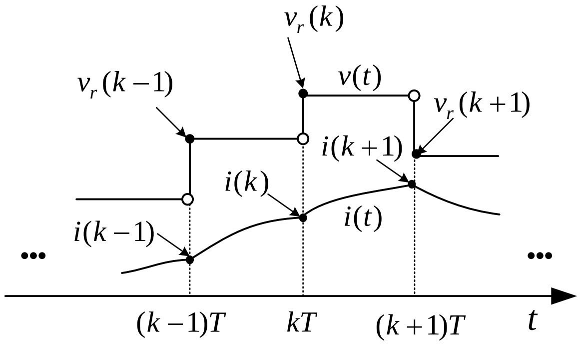


図 1-5 サンプリングと零次ホールドの動作

図 1-4 のディジタル制御系のブロック線図を求め，安定解析を行う。

まず，図 1-4 の制御対象で，$v_r(k)$ と $i(k+1)$ の関係を求めてみよう。期間 $kT \le t < (k+1)T$ で成立する**微分方程式**は，この期間 $v(t) = v_r(k)$ であるから

$$v_r(k) = R\,i + L\frac{di}{dt} \tag{1-20}$$

である。この解は，この期間では $v_r(k)$ が一定であるから直流回路と同じように考えて，

$$i(t) = \frac{v_r(k)}{R} + Ae^{-R\,t/L} \qquad \text{ただし，} \qquad kT \le t < (k+1)T \tag{1-21}$$

となる。(1-21)に，$t = kT$ を代入し，$i(kT) \equiv i(k)$ として A を求めると，

$$A = \{i(k) - \frac{v_r(k)}{R}\}e^{R\,k\,T/L} \tag{1-22}$$

コイルがあるので電流は連続だから，(1-21)で $t = (k+1)T$ とおき，$i((k+1)T) \equiv i(k+1)$ と定義すると，次式の**差分方程式**が得られる（すぐ導けるのでヤレ）。

$$i(k+1) = e^{-RT/L}\,i(k) + \frac{1}{R}(1 - e^{-RT/L})\,v_r(k) \tag{1-23}$$

k は任意であるから，(1-23)は $k = 0,1,2,\cdots$ と考えてよい。よって (1-23)で表される数列を z 変換すると((1-14)参照)，次式が得られる。

$$z\,I(z) - z\,i(0) = e^{-RT/L}\,I(z) + \frac{1}{R}(1 - e^{-RT/L})V_r(z) \tag{1-24}$$

ここで， $I(z) = Z\{i(k)\}$，$V_r(z) = Z\{v_r(k)\}$

連続系の場合と同様，初期値 $i(0) = 0$ として，次式の伝達関数が得られる。

$$G_p(z) = \frac{I(z)}{V_r(z)} = \frac{1}{R}\frac{1 - e^{-RT/L}}{z - e^{-RT/L}} \tag{1-25}$$

z 変換を用いたディジタル制御の伝達関数は**パルス伝達関数**(pulse transfer function)と呼ばれる。なお，この伝達関数には，零次ホールドと制御対象それにサンプラーを含めた，$v_r(k)$ と $i(k)$ に関するものであることに注意してほしい。

次に，マイコンによる制御演算を考えよう。ここでは，最もかんたんな**P（比例）制御**(proportional control)が行われているとしよう。すなわち，

$$v_r(k) = K(i_r(k) - i(k)) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1-26}$$

とする。なお， $i(k)$ は k 時点での検出値で， $v_r(k)$ は k 時点で D/A 変換器に送られるから，(1-26)ではコンピュータの演算時間を無視している。これを z 変換すると，次式となる。

$$V_r(z) = K(I_r(z) - I(z)) \tag{1-27}$$

(1-25)，(1-27)から，図 1-6 のブロック線図が得られる。ブロック線図の定義や演算はラプラス変換の場合と同じである。

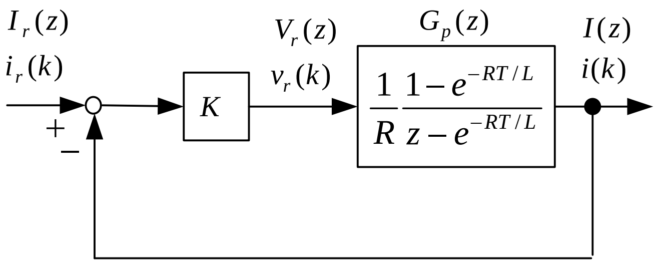


図 1-6　 z 変換を用いた図 1-4 のブロック線図

図より，**閉ループパルス伝達関数**(closed loop pulse transfer function)は次式で与えられる。

$$G(z) = \frac{I(z)}{I_r(z)} = \frac{KG_p}{1 + KG_p}$$

$$= \frac{(1 - e^{-RT/L})K}{zR - Re^{-RT/L} + (1 - e^{-RT/L})K} \tag{1-28}$$

連続系同様，**閉ループ伝達関数の分母を** 0 とおいた式は**特性方程式**(characteristic equation)と呼ばれる。その根 z の**絶対値がすべて 1 以下であれば系は安定**である。

$$z = e^{-RT/L} - \frac{K}{R}(1 - e^{-RT/L}) \tag{1-29}$$

であり，安定条件は

$$|z| = \left| e^{-RT/L} - \frac{K}{R}(1 - e^{-RT/L}) \right| < 1$$

$$\therefore \quad -1 < e^{-RT/L} - \frac{K}{R}(1 - e^{-RT/L}) < 1$$

$e^{-RT/L} < 1$ に注意して，整理すると，安定となるゲイン K の範囲は，

$$-R < K < \frac{1 + e^{-RT/L}}{1 - e^{-RT/L}} R \tag{1-30}$$

サンプリング周期 T が非常に短いとき（これは連続系に近いと考えられよう），比例ゲイン K を大きく選んでも安定であることが判る。

なお，z 変換しないで，差分方程式のままでも安定判別は可能である。(1-26)を(1-23)に代入し，$v_r(k)$ を消去すると次式を得る

$$i(k+1) = [e^{-RT/L} - \frac{K}{R}(1 - e^{-RT/L})] i(k) + \frac{K}{R}(1 - e^{-RT/L}) i_r(k) \tag{1-31}$$

この式を一般化したものは行列を使って下記の様に書ける（6 章で詳しく述べる）。

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(k) \qquad \boldsymbol{r}(k) \text{：指令値}$$

安定条件は(1-4)について考えた場合と同じで，(1-30)に一致する。なお，指令値 $i_r(k)$ は $i(k)$ に無関係であれば安定性に影響せず，一定である必要はない。

）微分方程式の公式（

微分方程式(differential equation)

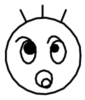
$$a\frac{dx}{dt} + bx = c$$

ただし，a, b, c は**一定の定数**（$c = 0$ でもよい）

解は，$x = \dfrac{c}{b} + Ae^{-\frac{b}{a}t}$ 　　A は定数

電気回路は
文献(18)参照

(1-20)から(1-21)を導くとき利用する。



覚え方 1)微分の項を 0 とおいて，$x=\dfrac{c}{b}$ を得る。これが，第 1 項目

2) x に関係ない項 $c=0$ とし，$\dfrac{d}{dt}=p$ とおく。$a\,p+b=0$ より，$p=-\dfrac{b}{a}$

これが，第 2 項目の t の係数。

（$a\,p+b=0$ を特性方程式という。）

1.5　ディジタル制御系の解析法まとめ

ディジタル制御系の解析では大きく 2 つの方法があることが判った。これを図 1-7 に示す。実際のシステムは一番上の段の様に，差分方程式で表されるディジタル制御器Ⓐ，入力を階段状に変化させる零次ホールドⒷ及び微分方程式で表される制御対象Ⓒからなる。これらから直接安定解析はできないので，ⒷとⒸからサンプリング時点に着目して差分方程式Ⓓを導く。ⒶとⒹよりシステム全体の差分方程式を求めると安定解析が可能となる（(1-31)に相当）。これが第 1 の方法である。次に，ⒶとⒹをともに z 変換して，システム全体のブロック線図を作り特性方程式を求めて安定判別するのが第 2 の方法である（図 1-6 のブロック線図）。第 2 の方法にはパルス伝達関数より周波数特性がすぐに得られる利点がある（第 5 章で述べる）。また，第 2 の方法では，①のルートで求める場合と，零次ホールドⒷと制御対象Ⓒのラプラス変換をまとめて z 変換することで求めることもできる（ルート②）。ルート②のことは第 2 章で詳しく述べる。

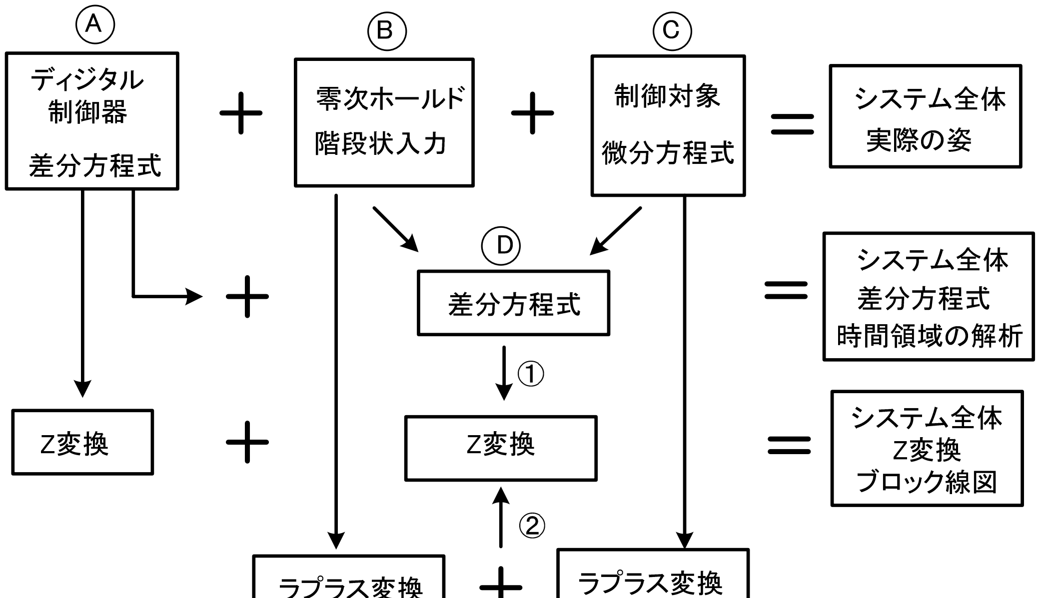
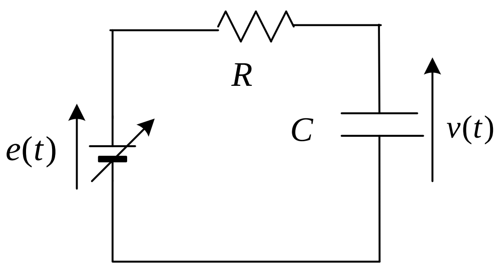


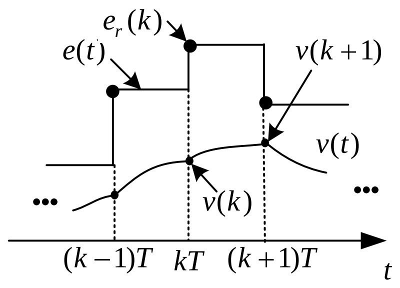
図 1-7 ディジタル制御系の解析法まとめ

［問題 1-3］ 図の回路（制御対象）で，サンプリング周期をT とし，零次ホールドにより

$$e(t) = e_r(k) \qquad kT \le t < (k+1)T$$

と階段状に制御する。電圧指令$e_r(k)$ に対するコンデンサ電圧 $v(k) \equiv v(kT)$ のパルス伝達関数$V(z)/E_r(z)$ を求めよ。

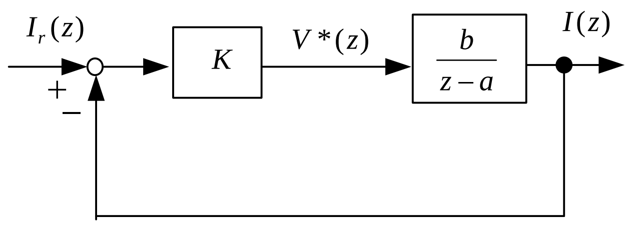




（答） $e_r(k) = RC\dfrac{dv}{dt} + v \qquad kT \le t < (k+1)T$

$$\frac{V(z)}{E_r(z)} = \frac{1 - e^{-T/(RC)}}{z - e^{-T/(RC)}}$$

［問題 1-4］ 図の制御系で，安定となるゲインK の条件を求めよ。また，安定の場合に電流の指令値が$\{i_r(k)\} = \{1,1,1,\cdots\}$ のときの応答$i(k)$ および**定常偏差**(steady state error)を求めよ。ただし，a,b は正の定数とする。



（答） 安定条件 $|a - Kb| < 1 \quad \therefore \dfrac{a-1}{b} < K < \dfrac{a+1}{b}$,

$$I(z) = \frac{Kb}{z-a+Kb}\frac{z}{z-1} \qquad \frac{I(z)}{z} = \frac{Kb}{z-a+Kb}\frac{1}{z-1} = \frac{Kb}{1-a+Kb}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a+Kb}\right)$$

$$i(k) = \frac{Kb}{1-a+Kb}(1-(a-Kb)^k)$$

定常偏差 $\quad i_r(\infty) - i(\infty) = \dfrac{1-a}{1-a+bK}$

(注)定常偏差だけなら最終値の定理 $\quad i(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)I(z)$ が便利