第４章　安定解析

ブロック線図で表されたディジタル制御系の安定判別法を説明する。ｚの双一次変換を行うと連続系の安定解析でよく知られたラウスの方法が利用でき便利である。また，ディジタル制御特有の制御法であるデッドビート制御についても例題を通して説明する。

4.1　安定条件

ｚ変換を用いた伝達関数により表示した図 4-1 のディジタル制御系について考える。

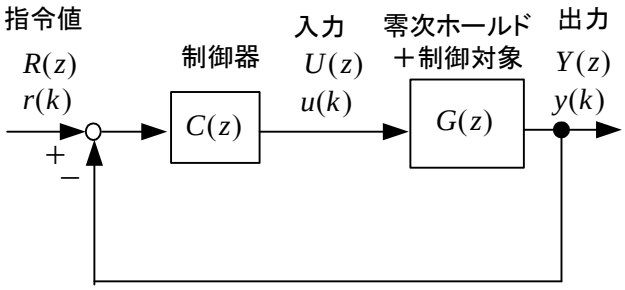


図 4-1 ディジタル制御系のブロック線図

図より，**閉ループパルス伝達関数**(closed loop pulse transfer function)$W(z)$ は次式で与えられる。

$$W(z) \equiv \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} \tag{4-1}$$

一般に，$W(z)$ は次式のように表せる。

$$W(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \tag{4-2}$$

$W(z)$ の分母を 0 と置いた

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{4-3}$$

は**特性方程式(**characteristic equation)と呼ばれ，その n 個の根を**特性根**または**極**という。

いま(4-3)が，相異なる n 個の根 $p_1, p_2, \cdots p_n$（複素根でもよい）をもつものとすれば，$Y(z)$ は次のように部分分数展開することができる。

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{W(z)R(z)}{z} = \frac{q_1}{z-p_1} + \frac{q_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{q_n}{z-p_n} + \left\{ \frac{R(z)}{z} \text{の根による展開項} \right\} \tag{4-4}$$

ここで，q_i は次式で求められる。

$$q_i = \lim_{z \to p_i} (z - p_i) \frac{W(z)R(z)}{z} \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{4-5}$$

(4-4)の両辺に z を掛けて逆 z 変換すると，出力 $y(k)$ は次式で与えられる。

$$y(k) = q_1(p_1)^k + q_2(p_2)^k + \cdots + q_n(p_n)^k$$
$$+\{R(z) \text{ の根による展開項の逆 z 変換}\} \tag{4-6}$$

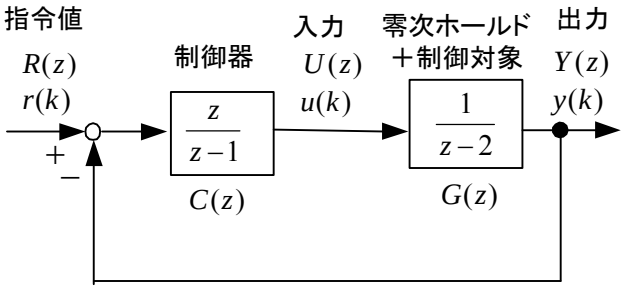
$\{R(z)$ の根による展開項の逆 z 変換$\}$の項は，応答の定常項に相当し安定性とは関係ない。式(4-6)より，$k \to \infty$ のとき，$y(k)$ が有限であるためにはすなわち安定であるためには，すべての根 $p_1, p_2, \cdots p_n$ の絶対値がどれも 1 以下となることである。

安定条件(stability condition)： ディジタル制御系で閉ループパルス伝達関数の分母を 0 とおいた式を特性方程式という．この特性方程式の根を p_i $(i = 1, 2, \cdots n)$（重根も可）としたとき，安定であるための必要十分条件は

$$|p_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{4-7}$$

である。これは，ディジタル制御で最も重要な公式である。

[例題 4-1]　図のディジタル制御系で，$r(k) = 1$ なる指令を与えたとき，出力 $y(k)$ を求めよ。このとき，特性方程式の根と安定性の関係を調べよ。



（解）閉ループパルス伝達関数 $W(z)$ は次式で求まる．

$$W(z) = \frac{CG}{1 + CG} = \frac{z}{z^2 - 2z + 2} \qquad ①$$

指令値を z 変換して，

$$R(z)=\frac{z}{z-1} \qquad ②$$

である。したがって，

$$Y(z)=W(z)R(z)=\frac{z}{z^2-2z+2}\frac{z}{z-1} \qquad ③$$

特性方程式 $z^2-2z+2=0$ の根を p_1, p_2 とすると，

$$p_1=1+j=\sqrt{2}e^{j\pi/4},\ p_2=1-j=\sqrt{2}e^{-j\pi/4} \qquad ④$$

となる。部分分数に展開して，

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-p_1)(z-p_2)}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-p_1}+\frac{c}{z-p_2} \qquad ⑤$$

ここで，

$$a=(z-1)\frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=1}=1$$

$$b=(z-p_1)\frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=p1}=\frac{p_1}{(p_1-1)(p_1-p_2)}=-\frac{1+j}{2} \qquad ⑥$$

$$c=(z-p_2)\frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=p2}=\frac{p_2}{(p_2-1)(p_2-p_1)}=-\frac{1-j}{2} \qquad ⑦$$

⑤より，

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{bz}{z-p_1}+\frac{cz}{z-p_2} \qquad ⑧$$

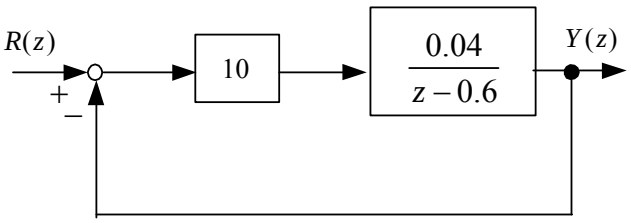
であり，これを逆 z 変換して，次式を得る。

$$y(k)=1+b(p_1)^k+c(p_2)^k$$

$$=1+(\sqrt{2})^k\sin(k\frac{\pi}{4})-(\sqrt{2})^k\cos(k\frac{\pi}{4}) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad ⑨$$

$k\to\infty$ のとき，$y(k)\to\infty$ となり系は不安定である。これは，$|p_1|=|p_2|=\sqrt{2}>1$ であることから理解できる。

[問題 4-1]　図のディジタル制御系を安定判別せよ。次に，$r(k)=1 \quad (k=0,1,2,\cdots)$ のとき，出力 $y(k)$ を求めよ。

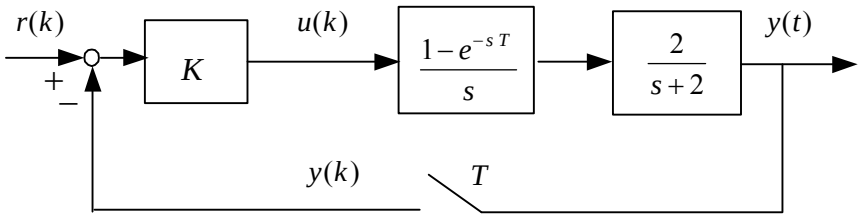


(答)　$\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0.4}{z-0.2}$　　特性方程式　$z - 0.2 = 0$

$\therefore z = 0.2$　　$|z| < 1$ なので安定

$$\frac{Y}{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-0.2} \qquad \therefore\ y(k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0.2)^k$$

[問題 4-2]　図のディジタル制御系が安定である K の条件を求めよ。



(答)　(2-17)より　$\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1-a}{z-a}$　　ただし，$a = e^{-2T} < 1$

特性方程式　$1 + K\dfrac{1-a}{z-a} = 0$

安定条件　$|z| = |a - K(1-a)| < 1$　　$\therefore -1 < K < \dfrac{1+a}{1-a}$

閉ループパルス伝達関数 $W(z)$ の極によって，出力 $y(k)$ のおおよその見当がつく。指令値を 0 としたときの応答（過渡項のみの応答 : (4-6)で最初の n 項の応答）は図 4-2 から推定できる。すなわち，z 平面で，$p_1, p_2, \cdots p_n$ のどれか 1 つでも単位円の外にあると応答は徐々に増加し不安定となる。単位円の外に根が存在するとき，正の実軸上だと振動しないで発散するが，複素数だと振動しながら発散し，負の実軸上だとサンプリング周期ごとに振動して発散する。単位円の内に根が存在するとき，正の実軸上だと振動しないで収束するが，複素数だと振動しながら収束し，負の実軸上だとサンプリング周期ごとに振動して収束する。なお，複素根は必ず共役根として存在する。根がたくさんある場合には，絶対値が最も大きい根に支配される。これを**代表根**(dominant root)という。これは，(4-6)で，絶対値が小さいとすぐ減衰して 0 となるためである。しかし，(4-6)で q_i が非常に小さいと，その項の影響がでるまでにかなりの時間を要する場合がある。これは，分子に分母と打ち消すような根（零点）が存在する場合におこる。したがって，応答を実際に計算して確認することが必要となる。ただ，q_i が非常に小さいといっても，不安定な極に対してはいずれ発散するので，安定判別の条件が変わることはない。

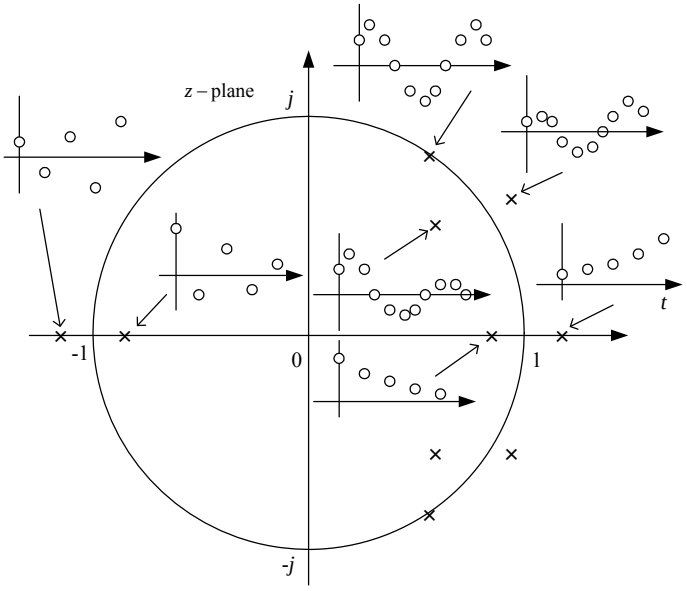


図 4-2 $W(z)$ のいろいろの極に対する応答

4.2 安定判別 (stability criterion)

安定判別は特性方程式（4-3）の根を求めることで行えるが，次数が高くなると計算機による数値計算で求める必要がある。そこで，連続系で用いたラウスの安定判別法が利用できる方法を紹介する。これは，z を次式で定義する s（ここの章のみ）に変換する。

$$z \equiv \frac{1+s}{1-s} \tag{4-8}$$

逆に，(4-8)より

$$s = \frac{z-1}{z+1} \tag{4-9}$$

である。これは，**双1次変換**(bilinear transformation)と呼ばれる（(3-29) 参照）。 (4-8)を用いると，図 4-3 に示すように，z 平面の単位円内の領域が，s 平面の左半平面に写像される。

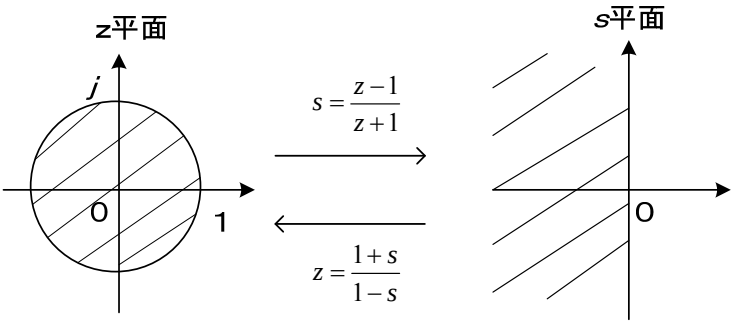


図 4-3　双 1 次変換

(4-3)に，(4-8)を代入して，

$$(\frac{1+s}{1-s})^n + a_1(\frac{1+s}{1-s})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\frac{1+s}{1-s}) + a_n = 0 \qquad (4\text{-}10)$$

これを，s のべき乗の形に整理すると次式のように書ける。

$$c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + c_n = 0 \qquad (4\text{-}11)$$

これに，**ラウスの方法** (Routh stability criterion)を適用して安定判別する。ラウスの方法については例を示しておく。

[例題 4-2]　連続系の特性方程式が　$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 16s + 20 = 0$　のとき安定判別せよ。

(解)ラウスの表は,

s^4	$c_0 = 1$	$c_2 = 8$	$c_4 = 20$
s^3	$c_1 = 5$	$c_3 = 16$	0
s^2	$d_1 = \frac{5\times 8 - 16\times 1}{5} = 4.8$	$d_2 = \frac{5\times 20 - 0\times 1}{5} = 20$	0
s	$e_1 = \frac{4.8\times 16 - 5\times 20}{4.8} = -4.83$	0	
s^0	20		

第一列の符号が 2 回変わるので(4.8 から-4.83 と-4.83 から 20)，不安定根が 2 個存在する。

なお，図 4-3 に示した双 1 次変換は，安定判別をするためにだけ用いる変換であり，連続系の根（s）とディジタル制御系の根（z）がそのような関係にあることを意味しない（6.5 で詳しく述べる）。従って，誤解を避けるため s の替わりに別の記号を用いることもある。

[問題 4-3]　$z = \frac{1+s}{1-s}$ で，$s = j\omega\ (\omega : -\infty \to +\infty)$ のとき，z の軌跡を描け。

(答) $z = x + jy$ とおくと，$x + jy = \frac{1+j\omega}{1-j\omega} = \frac{1-\omega^2 + j2\omega}{1+\omega^2}$　$\therefore$　$x^2 + y^2 = 1$(円)。

[問題 4-4]　閉ループパルス伝達関数が

$$W(z) = \frac{cz + d}{z^2 + az + b}$$

で与えられている。安定となるパラメータの範囲を図示せよ。

（答）特性方程式に双 1 次変換を利用し，次式を得る。

$$(\frac{1+s}{1-s})^2 + a(\frac{1+s}{1-s}) + b = 0$$

$$(1-a+b)s^2 + (2-2b)s + 1 + a + b = 0$$

ラウスの方法を適用して，2 次系の安定条件は係数が全て同符号であればよい。よって
$1+a+b>0,\ b<1,\ 1-a+b>0$　①　または　$1+a+b<0,\ b>1,\ 1-a+b<0$　②

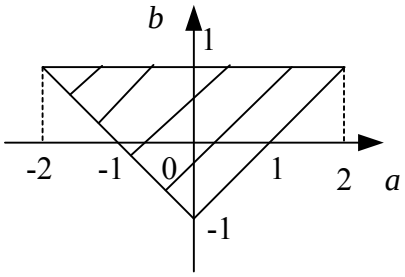
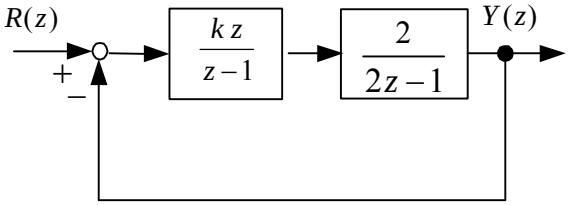


図 4-4　安定領域（②の解はない）

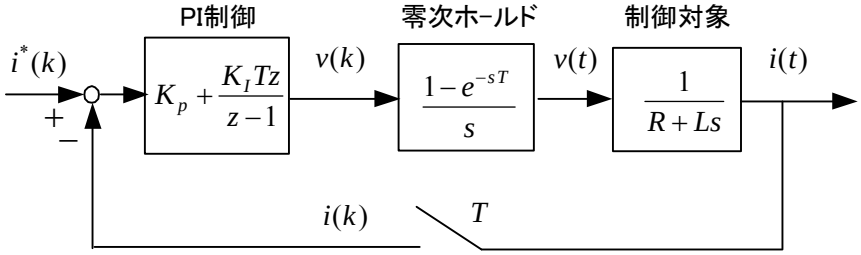
[問題 4-5]　図のディジタル制御系が安定となる k の範囲を求めよ。



（答）　$\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{2kz}{2z^2 - 3z + 2kz + 1}$　　特性方程式　$2z^2 - 3z + 2kz + 1 = 0$

$2(\frac{1+s}{1-s})^2 + (2k-3)\frac{1+s}{1-s} + 1 = 0$　　$(6-2k)s^2 + 2s + 2k = 0$　安定条件　$0 < k < 3$

[例題 4-3]　図に示す RL 回路のディジタル電流ＰＩ制御系で，安定となるためのＰＩ制御ゲインの条件を求め図示せよ。（ＰＩ制御には，後退矩形近似を用いている。）



（解）零次ホールドと制御対象をまとめた $v(k), i(k)$ 間のパルス伝達関数は

$$\frac{I(z)}{V(z)} = Z\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{R+Ls}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\frac{1-a}{z-a}$$

ただし，$e^{-RT/L} = a$ とおく。

従って，$i^*(k), i(k)$ 間の閉ループ伝達関数は次式で求められる。

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(K_P + \frac{K_I T z}{z-1})\frac{1}{R}\frac{1-a}{z-a}}{1+(K_P + \frac{K_I T z}{z-1})\frac{1}{R}\frac{1-a}{z-a}}$$

$$= \frac{(K_p + K_I T)(1-a)z - K_p(1-a)}{Rz^2 + \{(K_p + K_I T)(1-a) - R - Ra\}z + aR - K_p(1-a)}$$

分母を０とおいた特性方程式に双１次変換を行う。

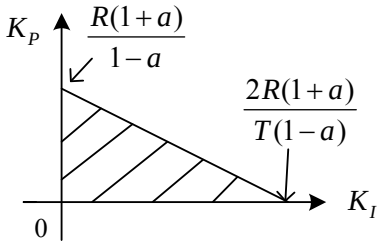
$$R\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + \{(K_p + K_I T)(1-a) - R - Ra\}\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + aR - K_p(1-a) = 0$$

ゆえに，

$$\{2R(1+a) - (2K_P + K_I T)(1-a)\}s^2 + 2(R+K_P)(1-a)s + K_I T(1-a) = 0$$

２次系だから安定条件は係数が全て同符号であればよい。$a<1$ であり，一般に K_P, K_I は正に選ぶので，このとき安定条件は次式で与えられる。安定領域は図の斜線の領域である。

$$2K_P + K_I T < \frac{2R(1+a)}{1-a}$$



ディジタル制御特有の制御に**有限整定制御**（finite time settling control）または**デッドビート制御**（dead-beet control）がある。これは，特性方程式の根を全て 0 に設定することで実現できる。この例題で説明しておこう。

この例題では，特性方程式は次式で与えられる。

$$R z^2 + \left\{(K_p + K_I T)(1-a) - R - Ra\right\} z + aR - K_p(1-a) = 0$$

従って，有限整定制御を行うためには，z^2 以外の係数を０とおいて，

$$(K_p + K_I T)(1-a) - R - Ra = 0$$

$$aR - K_p(1-a) = 0$$

よって，両式を解いて，

$$K_p = \frac{aR}{1-a} \quad , \quad K_I = \frac{R}{T(1-a)}$$

とすればよい。実際に，電流の指令値を$i^*(k)$　のステップ変化に対する応答を求めてみよう。K_p, K_I を閉ループ伝達関数に代入して，

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(1+a)z-a}{z^2}$$

$i^*(k)=1$ より，$I^*(z) = \dfrac{z}{z-1}$　だから

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(1+a)z-a}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}$$

$$= \frac{(A+C)z^2 + (B-A)z - B}{z^2(z-1)}$$

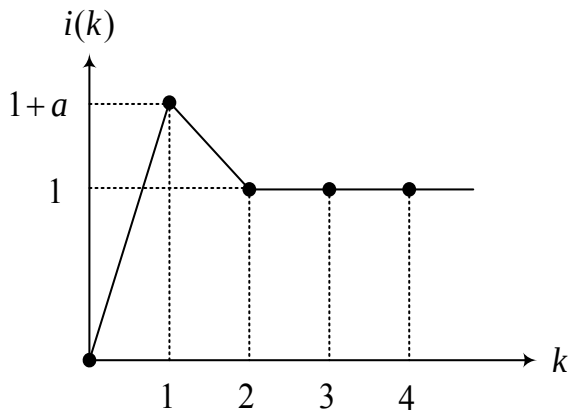
係数を比較して，$B=a$　，$A=-1$　，$C=1$　を得る。

$$\therefore \quad I(z) = -1 + \frac{a}{z} + \frac{z}{z-1}$$

逆 z 変換して，

$$i(k) = -\delta_{k,0} + a\delta_{k,1} + 1$$

なお，$\delta_{k,j}$ は $k=j$　のときのみ1である。



従って，

$i(0) = -1+0+1 = 0$

$i(1) = -0+a+1 = 1+a$

$i(2) = -0+0+1 = 1$

以下，全て1となる。

従って，図の様に $k=2$ で $i(k)$ は指令値と一致し，整定している。

なお，有限整定制御が理想的に行えるのは，制御対象のパラメータが正確に求まっていることが前提となっている。

なお，比例制御の場合には，$K_p = \dfrac{aR}{1-a}$　で有限整定制御が実現でき，

$$i(k) = -a\delta_{k,0} + a$$

すなわち，

$i(0) = 0$　，$i(1) = i(2) = \cdots = a$

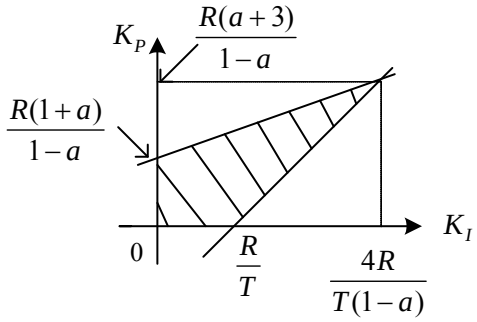
となる。1サンプリングで収束する。$e^{-RT/L}=a$　であるから，サンプリング周期Tを小さく選ぶと$a\simeq 1$　となり，定常偏差を小さくできる。しかし，このとき比例ゲインK_pは非常に大きくなるので，ノイズの影響を受け易くなる点は注意が必要である。

[問題 4-6]　例題 4-3 で，ＰＩ制御器を前進矩形近似および台形近似する場合の安定となるパラメータの範囲を図示せよ。K_P, K_Iは正とする。また，アナログＰＩ制御したときの安定領域も求め，ディジタルＰＩ制御で$T\to 0$のときの安定領域と一致することを確認せよ。

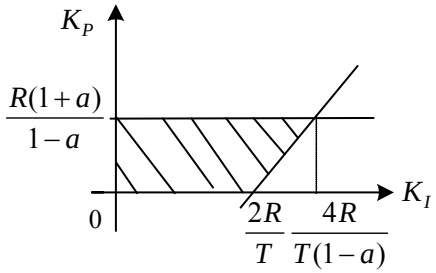
（答）安定条件　前進矩形近似：$K_p<\dfrac{T}{2}K_I+\dfrac{R(1+a)}{1-a}$，$K_p>TK_I-R$

台形近似：$K_p<\dfrac{R(1+a)}{1-a}$，$K_p>\dfrac{T}{2}K_I-R$

アナログＰＩ制御：$K_p>0,\ K_I>0$



前進矩形近似



台形近似

[問題 4-7]　例題 4-3 で，制御系が安定の場合，電流指令のステップ変化に対する実際の電流の定常値（$t\to\infty$の時の値）を求めよ。

(答)　$i(\infty)=1$　：$I^*(z)=\dfrac{z}{z-1}$で$I(z)$に最終値の定理$i(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)I(z)$を用いる。

4.3　制御器の演算時間を考慮した解析

これまでマイコンの演算は瞬時に終り，制御対象へは遅れることなく入力が加えられるものと考えた。しかし，実際には A/D 変換の処理時間やマイコンの処理時間がサンプリング周期に対して無視できない場合も考えられる。また，例えば電圧の制御にトランジスタをスイッチとして用いる場合には，時間遅れが発生することもある。このような問題について，*RL* 回路の電流をディジタル PI 制御する場合を例に取り考えてみよう。

図 4-5 の制御対象で，電流を検出して電流 PI 制御を行う。PI 制御は(3-16)の後退矩形近似

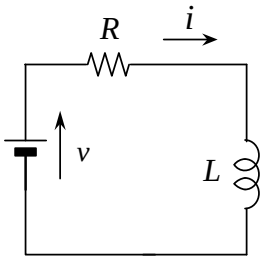


図 4-5　制御対象

を用い，次式で電圧指令を計算する。

$$v_r(k) = v_r(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + K_I T e(k)$$

ここで，偏差　$e(k) = i_r(k) - i(k)$，$i_r(k)$ ：電流指令

$t = (k-1)T$ の時点で電流 $i(k-1)$ を検出し電流 PI 制御により $v_r(k-1)$ を演算するが，演算に時間がかかり，$t = (k-1)T \sim kT$ の間には実際の電源電圧を変えることができず，サンプリング周期 T 遅れて $t = kT \sim (k+1)T$ の間 $v = v_r(k-1)$　とする。図 4-6 に時間経過を示す。

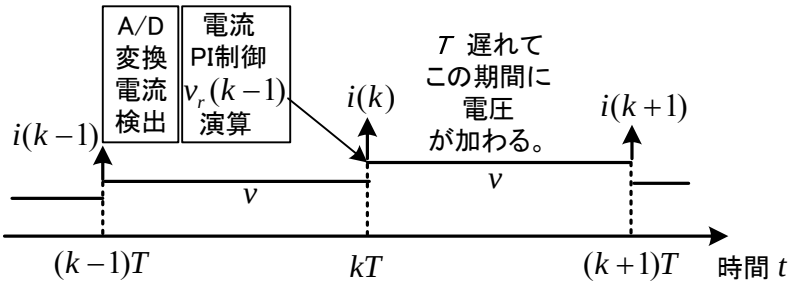


図 4-6 制御の時間経過

このときのシステム全体のブロック図を図 4-7 に示す。 (1-13) より，$Z\{v_r(k-1)\} = z^{-1}V_r(z)$ だから，**演算時間**(data processing time) T 遅れ部分のブロックは z^{-1} でよい。ディジタル PI 制御の伝達関数は(3-19)で求まっている。

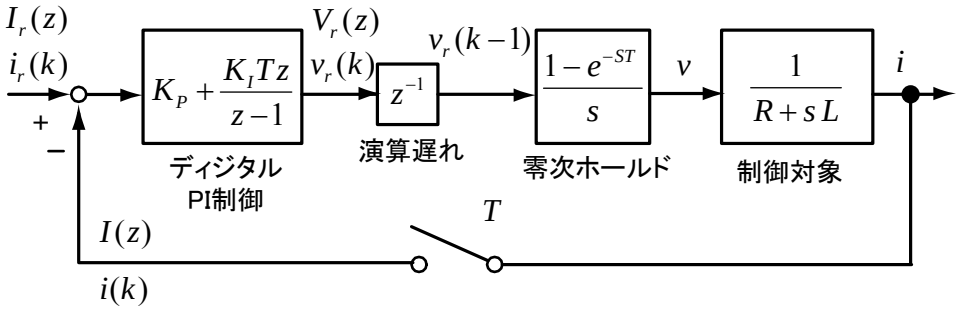


図 4-7　1 サンプリングの演算遅れを考慮したディジタル PI 制御系（文献(16)）

図 4-7 を z 変換したブロック線図を図 4-8 に示す。

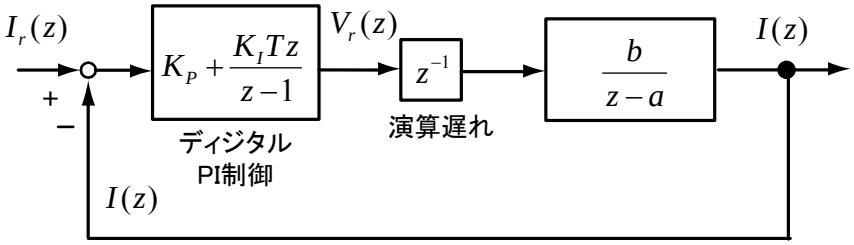


図 4-8　図 4-7 を z 変換したブロックだけに変形したブロック線図

電流のパルス伝達関数を求めると次式で与えられる。

$$\frac{I(z)}{I_r(z)} = \frac{\{(K_P + K_I T)z - K_P\}b}{z^3 - (1+a)z^2 + c\,z - K_P b} \qquad ①$$

但し，$a = \exp(-RT/L),\ b = (1-a)/R$

$$c = a + (K_P + K_I T)b\ ,\ T_I = K_P / K_I = L/R$$

これより，特性方程式は

$$z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \qquad ②$$

但し，　$\alpha = -(1+a),\ \beta = c,\ \gamma = -K_P b$

双 1 次変換により

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 + \alpha\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + \beta\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + \gamma = 0 \qquad ③$$

ラウスの方法により安定条件を求めると

$$a_0 = 1 - \alpha + \beta - \gamma > 0 \qquad ④$$

$$a_1 = 3 - \alpha - \beta + 3\gamma > 0 \qquad ⑤$$

$$a_2 = 3 + \alpha - \beta - 3\gamma > 0 \qquad ⑥$$

$$a_3 = 1 + \alpha + \beta + \gamma > 0 \qquad ⑦$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \qquad ⑧$$

④，⑦は常に成立する。安定条件は

⑤より　$4 > (4K_P + K_I T)b$　⑨

⑥より　$2K_P - K_I T + 2R > 0$　⑩

⑧より　$R + K_P a - K_I T - bK_P^2 > 0$　⑪

となる。ここで，次式を仮定する。

$$a \simeq 1 - RT/L,\ R \ll K_P,\ T \ll T_I$$

このとき安定条件は次のように簡単化される。

$$K_P < \frac{L}{T} \qquad ⑫$$

図 4-9 に，$R = 1.3\Omega, L = 0.01\mathrm{H}, T = 200\mu\mathrm{s}$ とした場合，②式より求めた厳密な 3 つの極の軌跡を示す（共役の極は図示していない）。単位円の外に 1 つでも極があると制御系は不安定となる(8 の場合不安定)。⑫式によると，$K_p < 50$ が安定条件で，図 4-9 の厳密解析結果と比べると良い近似を与えることが判る。正の実軸上にある極は応答に振動を引き起こさないが，虚部が 0 でない極はその偏角に比例した周波数の振動を生じさせる。ただし，いずれの場合も極の絶対値が 1 よりある程度小さいなら減衰が速く応答に及ぼす影響は小さい。よって図の P_1 で 3,4,5 の極が応答に与える影響は小さい。図 4-2 や 6.5 節も参照せよ。

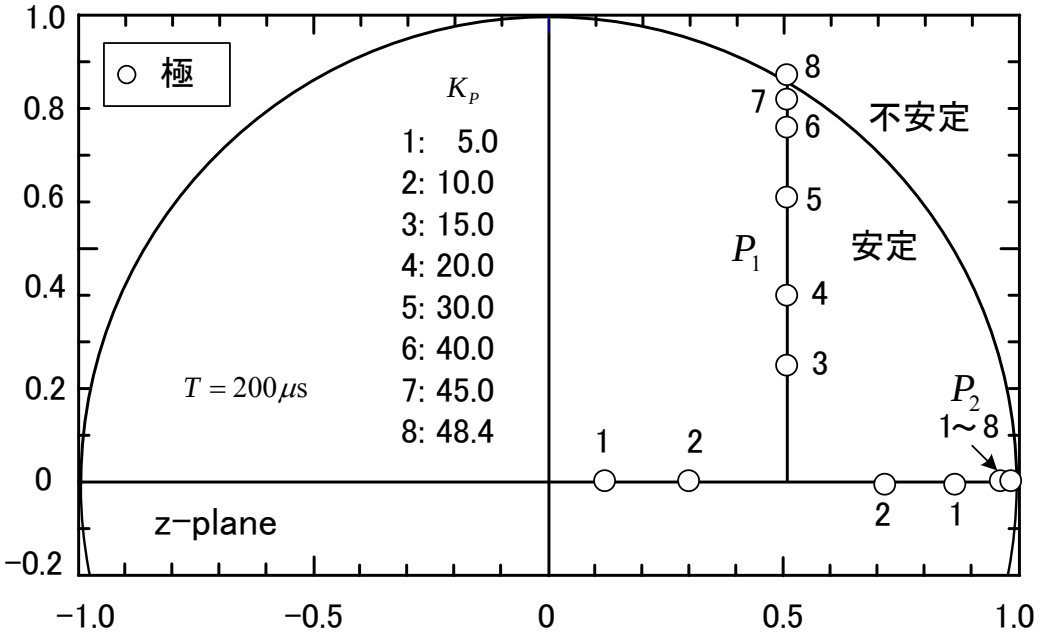


図 4-9　電流ディジタル制御系のゲインに対する極の軌跡（文献(16)）

Root trajectories of the digital system Fig.4-8 for the change of K_p.