

第5章 周波数応答

連続系ではラプラス変換をして伝達関数を求め、 $s = j\omega$ とおくことによりナイキスト線図やボード線図を描き、周波数応答を求めた。デジタル制御系では、 z 変換してパルス伝達関数を求めている。これと周波数応答はどのような関係にあるのだろうか？それを考えることにしよう。また、信号処理に良く用いられるフーリエ変換と z 変換の関係についても述べる。

5.1 周波数応答

サンプリングした複素正弦波 (kT を時間 t に対応するものと考えよう)

$$r(k) = e^{j\omega kT} = \cos \omega kT + j \sin \omega kT \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-1)$$

を入力として考える。この z 変換は

$$R(z) = 1 + e^{j\omega T} z^{-1} + e^{j2\omega T} z^{-2} + e^{j3\omega T} z^{-3} + \dots$$

だから

$$R(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \quad (5-2)$$

である。パルス伝達関数を $G(z)$ とすると、出力の z 変換 $Y(z)$ は

$$Y(z) = G(z)R(z) = G(z) \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \quad (5-3)$$

となる。これを、逆 z 変換すると出力 $y(k)$ が得られる。いま $G(z)$ 式が、相異なる m 個の極 p_1, p_2, \dots, p_m (複素根でもよい) をもつものとするれば、 $Y(z)/z$ は(4-4)と同様に、次のように部分分数展開することができる。

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{q_1}{z - p_1} + \frac{q_2}{z - p_2} + \dots + \frac{q_m}{z - p_m} + \frac{q_s}{z - e^{j\omega T}} \quad (5-4)$$

$$\text{ここで,} \quad q_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{Y(z)}{z}$$

$$q_s = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega T}} (z - e^{j\omega T}) \frac{Y(z)}{z}$$

$$= G(e^{j\omega T}) \quad ((5-3)\text{より}) \quad (5-5)$$

$Y(z)$ を逆 z 変換して

$$y(k) = q_1 (p_1)^k + q_2 (p_2)^k + \dots + q_m (p_m)^k + G(e^{j\omega T}) (e^{j\omega T})^k \quad (5-6)$$

となる。安定な場合 $|p_i| < 1$ であり、 $k \rightarrow \infty$ のとき最初の m 項は全て 0 となり、最後の定常項のみが残る。定常項は

$$y_s(k) = G(e^{j\omega T}) e^{jk\omega T} = |G(e^{j\omega T})| e^{j(k\omega T + \theta)} \quad (5-7)$$

ただし、 $\theta = \arg(G(e^{j\omega T}))$

この結果、正弦波入力 (T はサンプリング周期だから、 $\omega T \neq 2\pi$ に注意)

$$r(k) = \sin k\omega T \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5-8)$$

に対しては、複素入力の虚部に対応するから、(5-7)より

$$y_s(k) = |G(e^{j\omega T})| \sin(k\omega T + \theta) \quad (5-9)$$

となる。すなわち、パルス伝達関数の z を $e^{j\omega T}$ とおいて、 $G(e^{j\omega T})$ の絶対値から振幅が、その偏角から位相が求められることが判った。これは、重要な結果である。 $G(e^{j\omega T})$ をデジタルシステムの**周波数応答**(frequency response)と呼ぶ。 ω を変化させてグラフを書くとき、 $G(e^{j\omega T})$ の絶対値から**振幅特性**(amplitude characteristics)、その偏角から**位相特性**(phase characteristics)が求められる。後述の信号を解析するフーリエ変換の立場からは、振幅特性は**振幅スペクトル**(amplitude spectrum)、位相特性は**位相スペクトル**(phase spectrum)とよばれる。

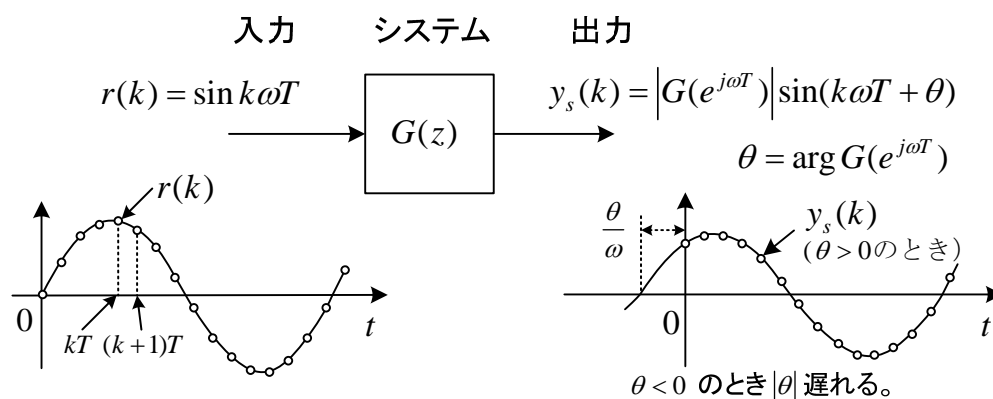


図 5-1 サンプリングした正弦波入力に対するシステムの出力(定常状態)

ところで、サンプリング周期 T に対して、**サンプリング角周波数**

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{サンプリング周波数: } f_s = \frac{1}{T}) \quad (5-10)$$

は重要な意味を持つ。サンプリングしたい正弦波の角周波数を ω_0 (周波数 f_0 , 周期 T_0) としたとき, ω_0 が大きくて速く振動している場合には, サンプリング周期を短く (ω_s を大きく) しないと情報が失われる。次の条件を満たさないと, 信号は再現できない。

$$T_0 \geq 2T \quad \text{あるいは,} \quad \omega_0 \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad \text{あるいは,} \quad f_0 \leq \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad (5-11)$$

これは, **サンプリング定理**(sampling theorem)と呼ばれる。サンプリング周期で決る $f_s/2$ は **ナイキスト周波数**(Nyquist frequency)と呼ばれる。図 5-2 で, 元の信号の少なくとも半周期に一つはサンプリングしないと周波数の情報が失われることがわかる。

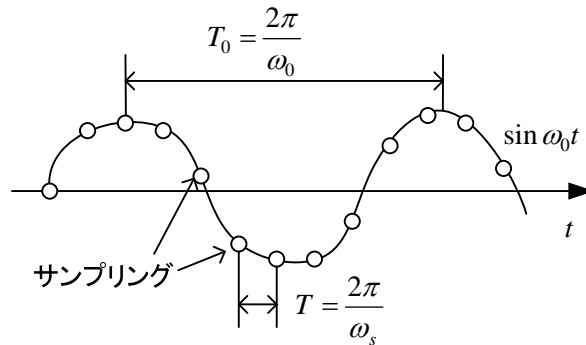


図 5-2 サンプリング周期 T はどこまで大きく選べるか!

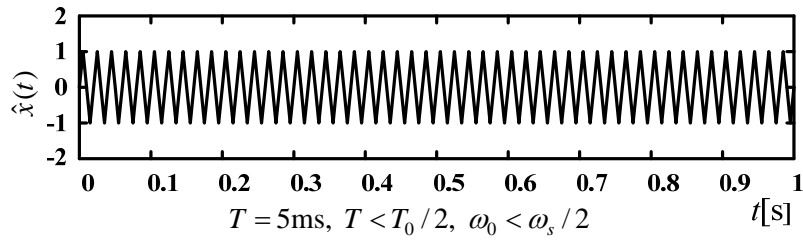
$x(t) = \sin \omega_0 t$ で, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 50\text{Hz}$, $T_0 = 1/f_0 = 20\text{ms}$ のとき, 種々のサンプリング周期 T について $x(kT)$ を計算し, それらの点を直線で結んだ (一種の D/A 変換+フィルタ) ときの波形を図 5-3 に示す (一種の再現した信号である)。

(a)の $T = 5\text{ms}$ のとき, T が T_0 の丁度 $1/4$ であり, 最大と最小をサンプリングするので振幅が 1 の元の信号に近い波形が得られている。

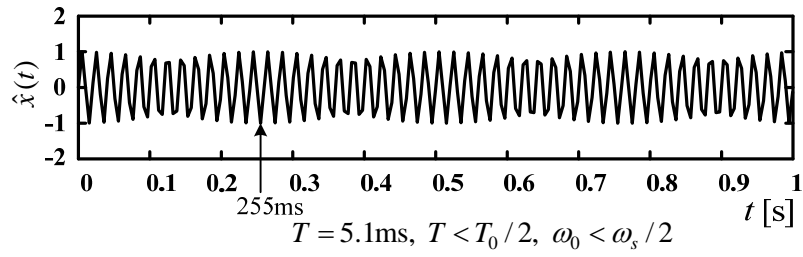
(b)の $T = 5.1\text{ms}$ の場合には, 1 回サンプリングする度に(a)に比べると 0.1ms ずれて 51 回目 ($t=0$ を 1 回目とする) で時間は $t = 50 \times 5.1 = 255\text{ms}$ となるので, その時の $x(t) = -1$ を最小点としてサンプリングする。何故なら, 255ms から信号の周期 20ms の倍数を引くと, 15ms 余るので $15\text{ms} = 3T_0/4$ だから, $x(t) = -1$ となる。直線で結ぶのでなく補間をうまく行くと元の信号が再現できる。

T が $T_0/2 = 10\text{ms}$ より小さい場合には, 元の信号の周波数は再現した信号でも変化しないが, (c), (d), (e)の $T > 10\text{ms}$ の場合には, 再現した信号の周波数が変化して全く別の信号に化けている。これを **エイリアシング**(aliasing : 偽信号)という。

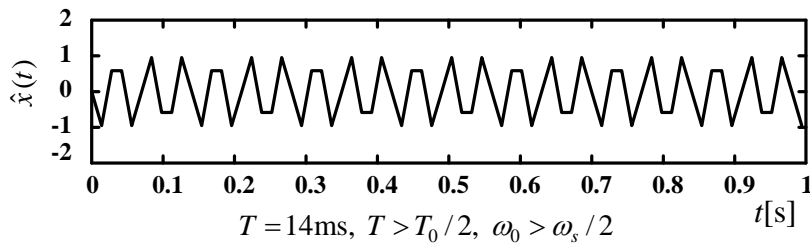
(e)の場合, ナイキスト周波数は $f_s/2 = 1/(2T) = 1000/38 = 26.3\text{Hz}$, この 2 倍の周波数は 52.6Hz である。この周波数から元の信号の周波数を引くと $f_s - f_0 = 52.6 - 50 = 2.6\text{Hz}$ となり, これが(e)の周波数である。(d)の周波数も同様に求めよ。 $f_s = f_0$ なら一定値 (直流, 0Hz) となる。(e)の信号を観測したら本物と間違いそう。図 5-9 でも説明する。



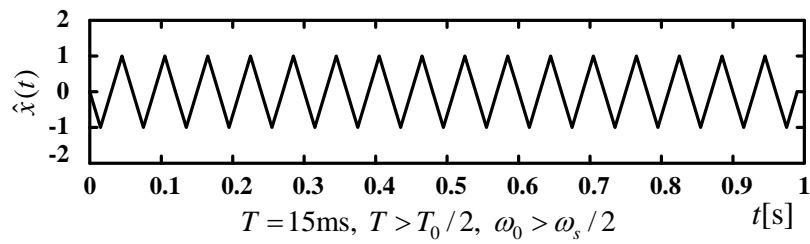
(a) 元の信号とほぼ一致



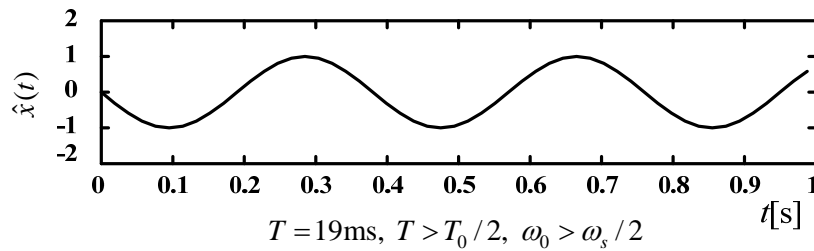
(b) 元の信号と周波数は一致



(c) 偽信号



(d) 偽信号



(e) 偽信号

図 5-3 周期 $T_0=20\text{ms}$ の正弦波を種々のサンプリング周期 T でサンプルし直線で結んだ波形

[例題 5-1] フィルタの出力 $y(k)$ が

$$y(k) = \frac{1}{2}(x(k) + x(k-1))$$

で与えられるとき、パルス伝達関数及び周波数応答(振幅特性及び周波数特性)を求めよ。ただし、サンプリングの角周波数 $\omega_s = 2\pi/T$ を用い、 $0 \leq \omega \leq \omega_s$ の範囲で答えよ。

(解) z 変換してパルス伝達関数は次式で求まる。

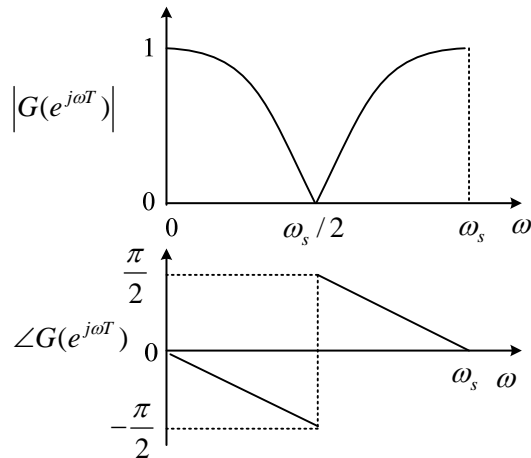
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

周波数応答は次式で求まる。

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega T}) &= \frac{1 + \cos \omega T - j \sin \omega T}{2} = \cos^2 \frac{\omega T}{2} - j \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2} \\ &= \cos \frac{\omega T}{2} (\cos \frac{\omega T}{2} - j \sin \frac{\omega T}{2}) = \cos \frac{\omega T}{2} e^{-j \frac{\omega T}{2}} = \cos \frac{\omega \pi}{\omega_s} e^{-j \pi \frac{\omega}{\omega_s}} \end{aligned}$$

振幅特性： $|G(e^{j\omega T})| = \left| \cos \frac{\omega \pi}{\omega_s} \right|$

位相特性： $\angle G(e^{j\omega T}) = \begin{cases} -\pi \frac{\omega}{\omega_s} & : 0 \leq \frac{\omega \pi}{\omega_s} < \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \omega < \frac{\omega_s}{2}) \\ -\pi \frac{\omega}{\omega_s} + \pi & : \frac{\pi}{2} < \frac{\omega \pi}{\omega_s} < \pi \quad (\frac{\omega_s}{2} < \omega < \omega_s) \end{cases}$



* 振幅特性で、 $0 \sim \omega_s/2$ の範囲をまず考える。入力信号 $x(k)$ にはいろいろの周波数成分 ω が含まれる。この値 ω が $0 \sim \omega_s/2$ の範囲なら、低周波成分は通過するが高周波成分（ノイズ成分）は振幅が小さくなって断される。つまり大切な低周波信号だけを取り出すローパスフィルタの特性である。位相は入力と出力間に遅れがない 0 が望ましいが、 90 度まで ω に比例して遅れる。入力信号 $x(k)$ の周波数成分 ω が $\omega_s/2$ より大きい場合には、図のように振幅が大きくなることもあるから、たとえば入力信号に含まれる $\omega_s/2$ より

大きい周波数のノイズの成分はこのフィルタで除去することはできない。従ってセンサのあとにアナログのローパスフィルタ（アンチエイリアシングフィルタ(anti-aliasing filter)という）を挿入してこれらを除去し、その出力を A/D 変換して検出することが行われる。

* $\omega = \omega_s$ の場合、正弦波の 1 周期に 1 回サンプリングするので、 $x(k)$ は一定値となる。よって $y(k)$ は $x(k)$ に一致し、(5-9)より考えて、振幅特性の値は 1 となる。この場合(5-8)は初期位相を考える必要がある。

* $\cos \frac{\omega\pi}{\omega_s} > 0$ のときは j の係数が位相となる。 $\cos \frac{\omega\pi}{\omega_s} < 0$ のとき、

$$\cos \frac{\omega\pi}{\omega_s} = - \left| \cos \frac{\omega\pi}{\omega_s} \right| = \left| \cos \frac{\omega\pi}{\omega_s} \right| e^{j\pi} \text{ と考えて } \pi \text{ を加える。} -\pi \text{ してもよい。}$$

[例題 5-2] パルス伝達関数が次式で与えられている。

$$G(z) = \frac{1-a}{z-a}$$

但し、 $a < 1$ である。この周波数応答をベクトル軌跡とボード線図に示せ。

(解) $G(e^{j\omega T}) = \frac{1-a}{\cos \omega T - a + j \sin \omega T} \equiv x + jy$ とおいて、

$$x = \frac{(1-a)(\cos \omega T - a)}{1 - 2a \cos \omega T + a^2} \quad \text{①} \quad y = -\frac{(1-a) \sin \omega T}{1 - 2a \cos \omega T + a^2} \quad \text{②}$$

①,②より $x^2 + y^2 = \frac{(1-a)^2}{1 - 2a \cos \omega T + a^2}$ であり、①より $\cos \omega T$ を x で表して代入すると、

$$x^2 + y^2 = \frac{1-a}{1+a} + \frac{2ax}{1+a} \quad \therefore \left(x - \frac{a}{1+a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1+a)^2}$$

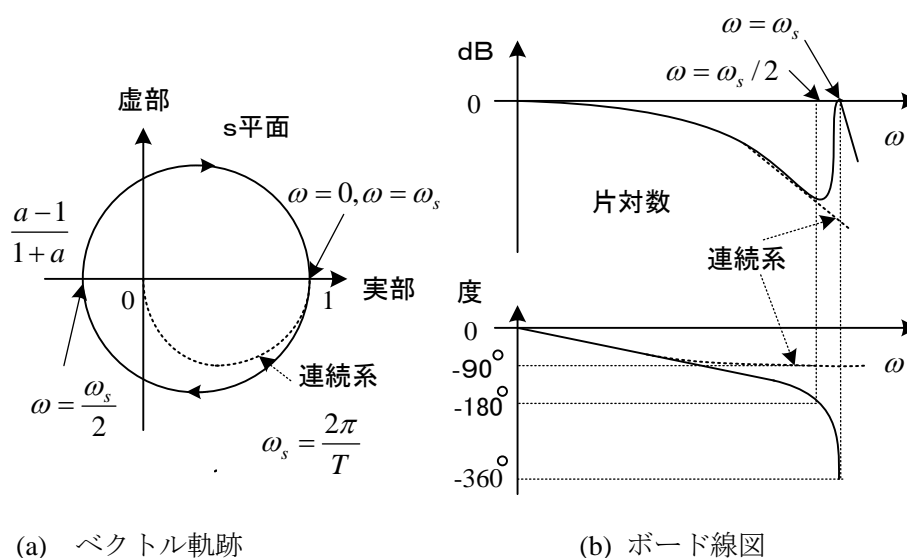
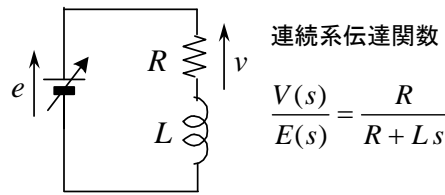


図 5-4 パルス伝達関数の周波数応答

図 5-4 に示した連続系は、対応する一次遅れ要素の伝達関数のボード線図である。例えば、



であり、対応するデジタル制御のパルス伝達関数は、

$$\frac{V(z)}{E(z)} = Z\left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{R}{R+Ls}\right) = \frac{1-a}{z-a} \quad \text{但し、} \quad a = e^{-\frac{RT}{L}} < 1$$

である。このように、デジタル制御では位相が遅れるので安定性に注意が必要である。

5.2 ナイキストの安定判別

連続系の場合と同じように周波数応答から安定判別が可能である。図 5-5 のデジタル制御系について考える。

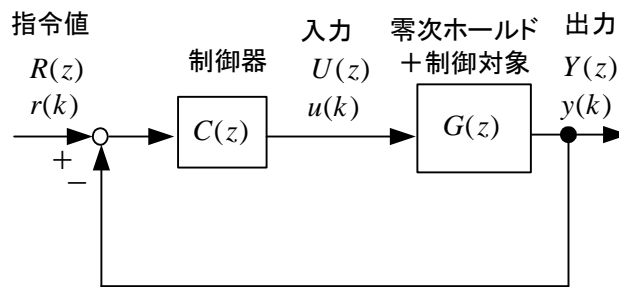


図 5-5 デジタル制御系のブロック線図

一巡伝達関数 $W_0(z)$ は、分子の多項式 $N(z)$ と分母の多項式 $D(z)$ に分けて次式で表せる。

$$W_0(z) = C(z)G(z) \equiv \frac{N(z)}{D(z)} \quad (5-12)$$

図より、閉ループ伝達関数 $W(z)$ は次式で与えられる。

$$W(z) \equiv \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{N(z)}{D(z)+N(z)} \quad (5-13)$$

いま、

$$S(z) \equiv 1 + C(z)G(z) \quad (5-14)$$

とおくと、一般に $S(z)$ は次式で表せる。

$$\begin{aligned}
S(z) &= \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\
&= b_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}{(z - z_1')(z - z_2') \cdots (z - z_n')} \tag{5-15}
\end{aligned}$$

$S(z)$ の零点 z_i は閉ループ伝達関数の極であり、 $S(z)$ の極 z_i' は一巡伝達関数の極と等しい。よって $S(z)$ の零点が単位円内にあれば図 5-5 は安定である。一方、一巡伝達関数の極は制御器と制御対象の極である。また(5-14)より極と零点の数は等しい。

(5-15)より $b_0 > 0$ と仮定すると

$$\angle S(z) = \sum_{i=1}^n \angle(z - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - z_i') \tag{5-16}$$

(5-16)をもとに、図 5-6 のように $z = e^{j\omega T}$ とおいて $\omega = 0 \rightarrow 2\pi/T$ と単位円上を 1 周させたときの $S(e^{j\omega T})$ の軌跡により安定判別法を考える。 $S(z)$ の具体的な式が与えられないと軌跡は書けないが、零点や極が単位円の中か外かで、 $S(e^{j\omega T})$ が原点を何回回るかが(5-16)より判る。図 5-6 で、 $z = e^{j\omega T}$ を $\omega = 0 \rightarrow 2\pi/T$ と単位円上を 1 周させると、単位円の中にある極や零点について $z - z_i$ や $z - z_i'$ の偏角は 2π 変化し、単位円の外にある極や零点についてはある範囲に限られる。

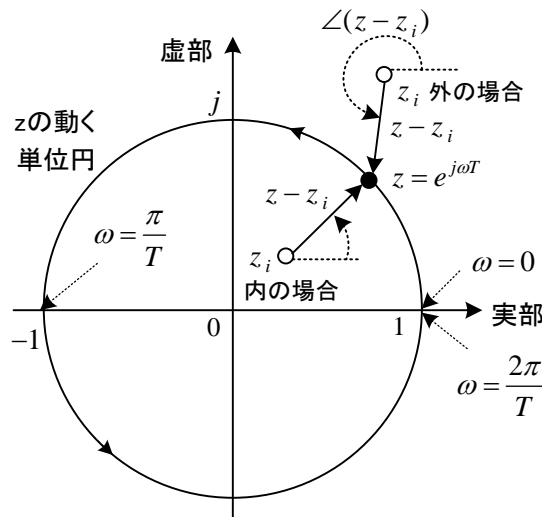


図 5-6 z の動かし方 (文献(15))

(5-16)より、 $S(z)$ の偏角は極や零点について $z - z_i$ や $z - z_i'$ の偏角によって決まるので、例えば零点や極が全て単位円内なら打ち消しあって z が単位円を 1 周する間に $S(z)$ が原点を回る回数は 0 である。単位円の外にある極や零点についてはこの回転に関係ないと考え

られるので、結局

$S(z)$ が原点を反時計方向に回る回数

$$= \text{単位円の中にある零点 } z_i \text{ の数} - \text{単位円の中にある極 } z_i' \text{ の数} \quad (5-17)$$

となる。安定の条件は、零点 z_i が全て単位円の中にあることだから、単位円の外にある極 z_i' (一巡伝達関数の不安定極) の数だけ $S(z)$ が原点を反時計方向に回る必要がある。

$$W_0(z) = S(z) - 1$$

だから、 $W(e^{j\omega T})$ の軌跡は、 $S(e^{j\omega T})$ の軌跡を-1 するだけなので以下の定理が得られる。

ナイキストの安定判別

定理 1. 一巡伝達関数 $W_0(e^{j\omega T})$ の $\omega = 0 \rightarrow 2\pi/T$ における軌跡が、一巡伝達関数の不安定極の数だけ-1 の点を反時計回りに回れば図 5-5 のシステムは安定である。

定理 2. 一巡伝達関数の不安定極の数が 0 の時、一巡伝達関数 $W_0(e^{j\omega T})$ の $\omega = 0 \rightarrow 2\pi/T$ における軌跡が-1 の点を回らなければ図 5-5 のシステムは安定である。

これは、連続系の場合と良く対応し、一巡伝達関数の周波数応答 $S(e^{j\omega T})$ から同じように安定性を知ることができる。ボード線図を描いて位相余裕やゲイン余裕も同様に考えてよい。ボード線図は片対数グラフ上に書く場合と等間隔で書く場合がある。

5.3 Z 変換とフーリエ変換の関係

連続周期信号の周波数解析には**フーリエ級数**(Fourier series)、連続非周期信号の周波数解析には**フーリエ変換**(FT : Fourier transform)が用いられる。フーリエ変換を連続周期信号の解析に用いると、フーリエ級数と同じスペクトルが得られる。離散時間非周期信号の周波数解析を行うフーリエ変換を**離散時間フーリエ変換**(DTFT : discrete-time Fourier transform)という。これは z 変換して周波数応答を求める場合の式と一致し、デジタル制御と直接関係する。

コンピュータで数値的にフーリエ変換を計算する場合には、信号をサンプリングして離散時間信号として捉え、ある期間の信号を切り出してフーリエ変換する。これを**離散フーリエ変換**(DFT: discrete Fourier transform) という。DFT の演算時間を短縮した**高速フーリエ変換**(FFT : fast Fourier transform)は信号処理に非常に良く利用されている。

表 5-1 公式の分類


信号	連続周期	連続非周期	離散周期	離散非周期
フーリエ級数	(1)	適用不可	(3)	適用不可
フーリエ変換	(2)FT	(2)FT	(4)DTFT (5)DFT	(4) DTFT z変換と類似 (5) DFT 切り出し

() は、以下で述べる節の番号である。(3)と(5)は実質的に同じ変換式

(1) 連続時間周期信号のフーリエ級数

周期 T_0 の連続時間周期信号 $f(t)$ (実数) のフーリエ級数は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(c_n))
 \end{aligned}
 \tag{5-18}$$



ただし、 $f(t) = f(t + T_0)$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$: 基本波の角周波数

このとき係数 c_n (複素数) は次式で求められる (積分範囲は $-T_0/2 \sim T_0/2$ でもよい)。

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad c_{-n} = \bar{c}_n \tag{5-19}$$

\bar{c}_n は c_n の共役複素数である。(5-18)から(5-19)を導く。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n \text{ と } k \text{ は違う変化} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right) \quad k=n \text{ 以外は } 0 \\
 &= c_n
 \end{aligned}$$

(5-18)の第2式は $n = 1$ なら, $c_1 = |c_1| e^{j\theta}$, $c_{-1} = |c_1| e^{-j\theta}$ ((5-19)より) より得られる。

次に、 $f(t)$ の2乗平均は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)^2 dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right\}^2 dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right\} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} \right\} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{三角関数の周期積分は0} \tag{5-20}
\end{aligned}$$

c_n を $f(t)$ のスペクトル, $|c_n|$ を振幅スペクトル, $\arg c_n$ を位相スペクトル, $|c_n|^2$ をパワースペクトルという。 c_0 は直流分, $|c_1|$ は基本波分, $|c_2|$ が第2高調波分などを表す。 ω_0 より低い交流の周波数成分がないのは, 周期 T_0 より長い周期で繰り返す成分が元の波形になりからである。(5-18)から判るように, 交流分の振幅は $2|c_n|$ になっていることに注意せよ。

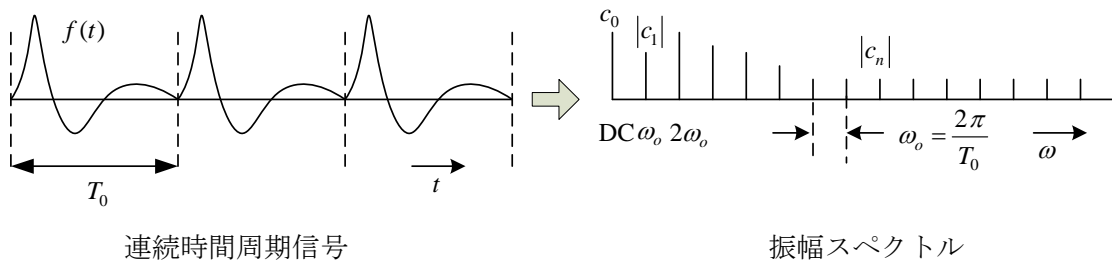


図 5-7 連続時間周期信号の振幅スペクトル

(2) 連続時間信号のフーリエ変換

一般にフーリエ変換は次式で定義され, 周期信号以外にも使用できる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{5-21}$$

逆フーリエ変換は次式で与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{5-22}$$

(5-18)を(5-21)を用いてフーリエ変換すると, 周期信号について次式を得る。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(n\omega_0 - \omega)t} dt
\end{aligned}$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (5-23)$$

$$\text{公式 } \delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx, \quad \delta(y) = \delta(-y)$$

このように、周期関数に対するフーリエ変換は $\omega = n\omega_0$ という離散的な点でしか値を持たず、フーリエ級数と同様の振幅スペクトルとなる。一般に非周期関数のフーリエ変換は、 ω に対して連続な関数となる。

(3) 離散時間周期信号のフーリエ級数

図 5-8 に示すように $f(k) \equiv f(kT)$ が周期 $KT (= T_0)$ をもつ離散時間周期信号で、 $f(k) = f(k+K)$ が成り立つとき、(5-19)より、近似的に c_n を求めてみよう。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=0}^{K-1} f(k) T e^{-jn\frac{2\pi}{KT} kT} \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f(k) e^{-j2\pi nk/K} \end{aligned}$$

n が高調波次数、 $\omega_0 = 2\pi/(KT)$ が基本波角周波数、 $kT \Rightarrow t$ に対応する。

このことから離散時間周期信号のフーリエ級数を次式で定義する（参考文献 (12)）。

$$c_n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f(k) e^{-j2\pi nk/K} \quad (n=0,1,2,\dots,K-1) \quad (5-24)$$

(5-24)より、 $f(k)$ は次式で求められる（(5-25)の右辺に(5-24)を代入）。

$$f(k) = \sum_{n=0}^{K-1} c_n e^{j2\pi nk/K} \quad (5-25)$$

(5-24)より、(5-18)の c_n が数値的に計算できる。

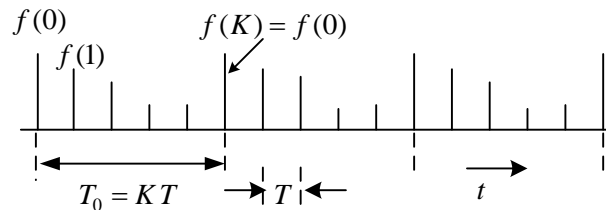


図 5-8 離散時間周期信号 $f(k)$

(4) 離散時間非周期信号のフーリエ変換 (離散時間フーリエ変換:DTFT)

連続的に変化する非周期信号 $f(t)$ に対して、サンプリング周期 T でサンプルした信号 $f^*(t)$ を次式で表す。

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta(t-kT), \quad \text{ただし, } f(k) = f(kT) \quad (5-26)$$

これは、(2-1)を $t < 0$ まで拡張したものである。

$f^*(t)$ を(5-21)でフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta(t-kT) \right\} e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-jk\omega T} \end{aligned} \quad (5-27)$$

となる。 $F^*(\omega)$ は**離散時間フーリエ変換**と呼ばれる。

逆変換は次式となる。

$$f(k) = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} F^*(\omega) e^{jk\omega T} d\omega \quad (5-28)$$

ここで、 $\omega_s = 2\pi/T$: サンプリング角周波数

(5-27)は周期性があり、次式が成り立つ。

$$F^*(\omega + n\omega_s) = F^*(\omega) \quad (5-29)$$

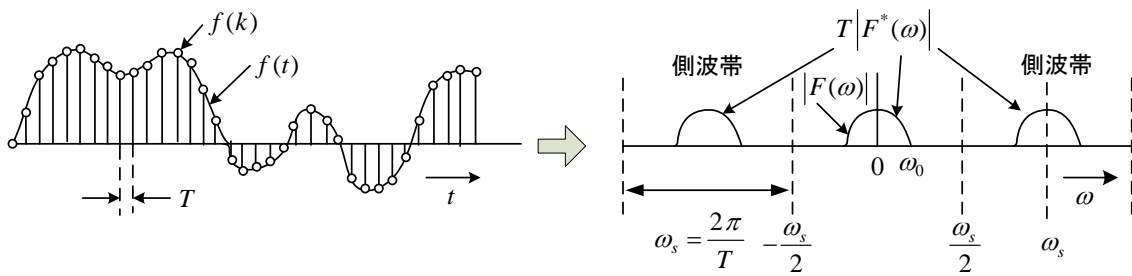
すなわち、 $\omega_s = 2\pi/T$ で波形が繰り返す。

(5-21)の連続信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と $F^*(\omega)$ には、(5-26)より次の関係が得られる (文献(5))。

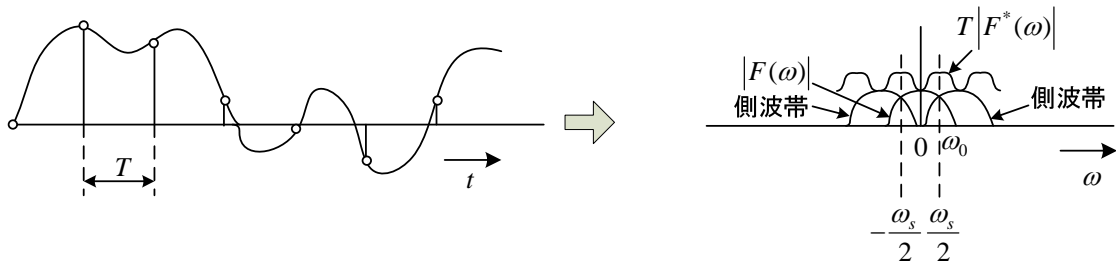
$$F^*(\omega) = \frac{1}{T} (F(\omega) + F(\omega - \omega_s) + F(\omega + \omega_s) + F(\omega - 2\omega_s) + F(\omega + 2\omega_s) + \dots) \quad (5-30)$$

右辺第2項以降は**側波帯**(side band)と呼ばれる。側波帯はサンプリングによって連続信号の一部だけを取り出したことによる報いと思えばよい。離散時間フーリエ変換は、一般に図5-9のように ω に対して連続となる。サンプリング角周波数をもとの信号の最高周波数 ω_0 の2倍以上に取ると、図のように、 $|F^*(\omega)|$ が孤立した分布になり、サンプリングした信号から元の信号が復元できる。しかし、 $\omega_0 > \omega_s/2$ の場合は側波帯が低い周波数領域に入り込んでくる。この現象を**エイリアシング**(aliasing)という。このためサンプリングする前に連続信号の $\omega_s/2$ 以上の周波数成分を取り除く**アナログフィルタ**が用いられることは既に述べた。

(5-30)より、近似的にサンプラーは伝達関数 $1/T$ の比例要素と考えることができる。



(a) エイリアシングがない場合



(b) エイリアシングがある場合

図 5-9 離散時間非周期信号のフーリエ変換 (離散時間フーリエ変換)

離散時間信号 $f(k)$ の z 変換は(1-8)により

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad (5-31)$$

で定義された。一方、 $f(k)$ のスペクトルを調べる場合には(5-27)より

$$F^*(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-jk\omega T} \quad (5-32)$$

のフーリエ変換を使えばよい。ただし、 $k < 0$ で信号が 0 とする。(5-31)と(5-32)を比べると、 $z = e^{j\omega T}$ とすれば両者は一致する。

伝達関数 $G(z)$ で $z = e^{j\omega T}$ とおいた周波数応答 $G(e^{j\omega T})$ は、 $k=0$ での単位インパルス ($r(0)=1$) に対する出力信号の離散時間フーリエ変換である。なぜなら、 $\{r(k)\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ のとき、その z 変換は $R(z) = Z\{r(k)\} = 1$ なので、 $Y(z) = G(z)R(z) = G(z)$ だから、出力の z 変換と伝達関数が等しいからである。

[例題 5-3] $f(t) = \sin \omega_0 t = \sin 100\pi t$ を周期 $T = 19\text{ms}$ でサンプリングするとき、偽信号の周波数が 2.6Hz となることを説明せよ。(図 5-3(e)の場合)

(解) $f(t) = \sin \omega_0 t$ ($-\infty < t < \infty$) のフーリエ変換 $F(\omega)$ は次式で与えられる。

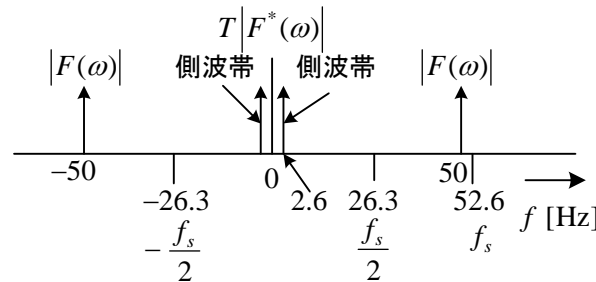
$$F(\omega) = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

従って, $|F(\omega)|$ は, $\omega_0 = 2\pi f_0$, すなわち $f_0 = \pm 50\text{Hz}$ にスペクトルをもつ。これはナイキスト周波数 $f_s/2 = 0.5/0.019 = 26.3\text{Hz}$ の外側である。

サンプルした信号の離散時間フーリエ変換は(5-30)より次式となる。

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \frac{1}{T}(F(\omega) + F(\omega - \omega_s) + F(\omega + \omega_s) + F(\omega - 2\omega_s) + F(\omega + 2\omega_s) + \dots) \\ &= \frac{1}{T}(-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_s - \omega_0) + j\pi\delta(\omega - \omega_s + \omega_0) \\ &\quad - j\pi\delta(\omega + \omega_s - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_s + \omega_0) + \dots) \end{aligned}$$

右辺第4項より, 側波帯が $\omega = \omega_s - \omega_0$ の低周波領域でスペクトルをもつ。周波数に直すと, $f_s - f_0 = 52.6 - 50 = 2.6\text{Hz}$ となる。すなわち, エイリアシングが生じて, 低周波領域にスペクトルが現れるのである。右側の $f_s = 52.6\text{Hz}$ を中心とした側波帯の負成分が 2.6Hz のところに顔を出す。 $f_s/2 = 26.3\text{Hz}$ で 50Hz のスペクトルが折り返すと考えても良い。



(5) 離散フーリエ変換 (DFT)

(5-27)の $F^*(\omega)$ は, ω の連続な関数であり, 数値計算に不適である。また, 無限数列 $f(k)$ について計算することも現実的でない。そこで, サンプル周期を T として K 個の連続サンプルを切り出し, これに対するフーリエ変換を行う。 kT が時間に対応し,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{KT}, \quad \omega = n\omega_0 = \frac{2\pi n}{KT}$$

と考えると, (5-27)より次式が得られる。

$$F(n) = \sum_{k=0}^{K-1} f(k) e^{-j2\pi nk/K} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, K-1) \quad (5-33)$$

(5-33)が**離散フーリエ変換**の定義式である。

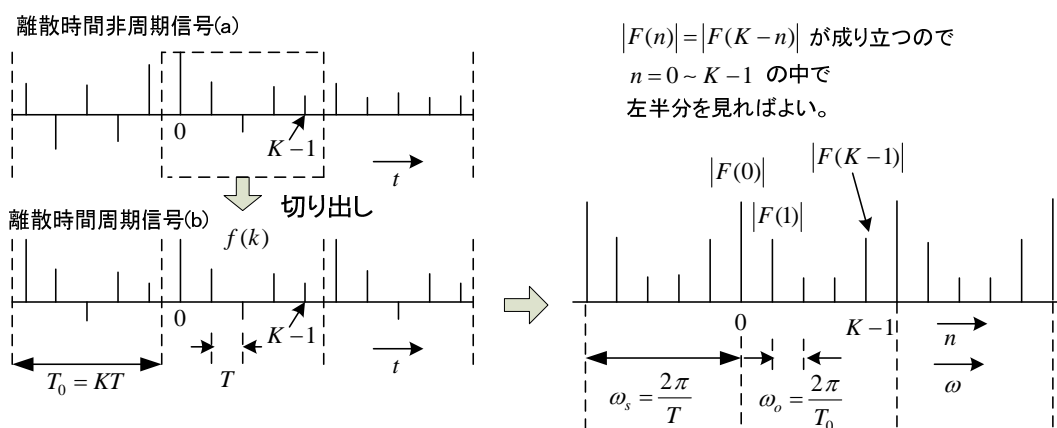
図 5-10 に信号の切り出しと離散フーリエ変換の結果を説明している。離散フーリエ変換

は、連続する K 個のデータを検出し、それらを周期 T_0 として $-\infty \sim +\infty$ に広げた離散時間周期信号のフーリエ級数の係数を求めている。離散フーリエ変換は、 ω に対して連続ではなくサンプル数と同じ周波数に分割した成分が求まる。 $F(1)$ は最もゆっくりした周波数 $1/T_0$ の成分であるが、フーリエ級数の基本波周波数とは限らない。しかし、もとの信号が周期信号で、その1周期分を切り出した場合については、基本波の周期は T_0 である。(5-33) の $F(n)$ は、(5-24) の離散時間周期信号のフーリエ級数の係数 c_n と、 $F(n) = K c_n \therefore |F(n)| = K |c_n|$ の関係になっていることが判る。この場合 $n=1$ のときが基本波で、 $F(n)$ は第 n 調波を表わす。(5-18) より、(5-33) の離散フーリエ変換の絶対値をサンプル数 K で割って2倍すると各調波の振幅となる(参考文献(14))。

逆離散フーリエ変換 (IDFT: inverse discrete Fourier transform) は次式で求められる。

$$f(k) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} F(n) e^{j2\pi nk / K} \quad (k=0,1,2,\dots,K-1) \quad (5-34)$$

離散フーリエ変換の計算量が多いので、計算量を大幅に減少させた**高速フーリエ変換**(fast Fourier transform, FFT)が非常に良く利用されている。



T : サンプル周期, T_0 : 切り出した期間, K : 切り出したデータ数

図 5-10 信号の切り出しと離散フーリエ変換