

第6章 時間領域での解析

デジタル制御系の解析に z 変換を用いる方法をこれまで述べてきた。本章では、時間領域で直接解析する方法を述べる。このために行列を用いるが、変数が多い場合でも同じ式で理論が組み立てられ便利である。差分方程式で表わされるから応答の数値計算が容易で、制御器の式は実際にマイコンで使う式がそのまま利用できる。やや複雑とはなるがパルス伝達関数も行列を使って求められるので周波数応答も計算できる。

6.1 連立差分方程式

まず、かんたんな差分方程式から出発しよう。

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + 2x_2(k) \\x_2(k+1) &= 2x_1(k) + x_2(k)\end{aligned}\tag{6-1}$$

但し、 $k=0,1,2,\dots$ で、 $x_1(0)=1, x_2(0)=0$ とする。

(6-1)を行列で表現すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}\tag{6-2}$$

これを、次式の記号で書く。それぞれ順番に対応する。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k)\tag{6-3}$$

一般に、

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad n \text{次元ベクトル}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad n \times n \text{行列}$$

a_{ij} : i 行 j 列の成分

一般項を初期値で表そう。(6-3)より

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(k-2) = \cdots = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)\tag{6-4}$$

従って、 $\mathbf{x}(k)$ を求めるには、 \mathbf{A}^k を求める必要がある。これには、**行列の対角化**が利用できる。

A を n 行 n 列の行列 ($n \times n$ 行列と書く) として述べよう。 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (一般に複素数) が全て異なるとき, A は次式で表される。

$$A = P Q P^{-1} \quad (6-5)$$

ここで,
$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, P = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$$
 (6-6)

P, Q はいずれも, $n \times n$ 行列である。固有値 λ_i に対する一つの固有ベクトルを $u_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix}$

としている。(6-5)は, 固有値の定義

$$A u_i = \lambda_i u_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6-7)$$

より以下のように導ける。行列と成分の掛け算はサイズが合えば可能である。

$$A P = A [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] = [A u_1 \ A u_2 \ \dots \ A u_n] = [\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \dots \ \lambda_n u_n] = P Q$$

$$\therefore P Q = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \lambda_2 u_2^1 & \lambda_3 u_3^1 \\ \lambda_1 u_1^2 & \lambda_2 u_2^2 & \lambda_3 u_3^2 \\ \lambda_1 u_1^3 & \lambda_2 u_2^3 & \lambda_3 u_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 \begin{bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{bmatrix}$$

(6-5)を用いると, 次式により A^k が計算できる。対角化のすばらしい点である。

$$A^k = P Q P^{-1} P Q P^{-1} P Q P^{-1} \dots P Q P^{-1}$$

$$= P Q^k P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad (6-8)$$

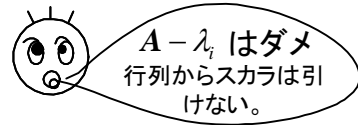
(6-7)より,

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

$\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ の逆行列が存在すると, $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ となり, つまらない。 \mathbf{A} の固有値は, この逆行列が存在しない条件,

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \text{または,} \quad |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

より計算できる。 $[\]$ 行列, $| \ |$ 行列式をしっかりと区別すること。行列式はスカラである。



$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{単位行列} \\ n \times n \end{array}$$

話を, (6-2)へ戻そう。固有値, 固有ベクトルを求め対角化してみる。

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$\therefore \lambda = 3, -1 \quad (\text{固有値})$$

(1) $\lambda_1 = 3$ のとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore u_1 = u_2$$

この式を満足する固有ベクトルは無数にある。全成分が $\mathbf{0}$ 以外ならどれでも良いが, 簡単な次の固有ベクトルを選ぶ。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = -1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore u_1 = -u_2$$

同様に, 次の固有ベクトルを選ぶ。

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって,

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{P}\mathbf{Q}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 3^k + (-1)^k & 3^k - (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k & 3^k + (-1)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 3^k + (-1)^k & 3^k - (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k & 3^k + (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 3^k + (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[問題 6-1] $x_1(0)=1, x_2(0)=0$ のとき,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

の解 $x_1(k), x_2(k)$ を行列の対角化を利用して求めよ。また, k が ∞ のときどうなるか。

(答) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと,

固有値は, $\lambda_1 = 1 + j = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$, $\lambda_2 = 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\pi/4}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2j}\right) \begin{bmatrix} 1 & -(1-j) \\ -1 & 1+j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} (\sqrt{2})^{k+1} \sin \frac{(k+1)\pi}{4} & (\sqrt{2})^{k+2} \cos \frac{(k+2)\pi}{4} \\ (\sqrt{2})^k \sin \frac{k\pi}{4} & (\sqrt{2})^{k+1} \cos \frac{(k+1)\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{2})^{k+1} \sin \frac{(k+1)\pi}{4} \\ (\sqrt{2})^k \sin \frac{k\pi}{4} \end{bmatrix}$$

k が ∞ のとき、発散する。これには、 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2}$ が関係していることが判る。

6.2 デジタル制御系の安定判別

図 6-1 のデジタル制御系（制御器，零次ホールド，制御対象）は，(1-31)に示したように一般に差分方程式を用いて表すことができる。すなわち次式で記述できる。

状態方程式

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}r(k) \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (6-9)$$

出力方程式

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) \quad (6-10)$$

ここで、 \mathbf{x} ：状態変数（ $n \times 1$ のベクトル）， r ：指令値， y ：出力

\mathbf{A} ：系行列（ $n \times n$ の行列）， \mathbf{b} ： $n \times 1$ のベクトル， \mathbf{c} ： $1 \times n$ のベクトル

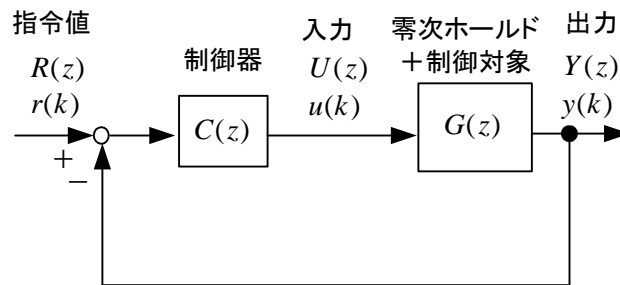


図 6-1 デジタル制御系

(6-9)が本質的な式で，(6-10)の出力方程式は \mathbf{x} の中のどれをセンサで検出するのかを明確にする（ \mathbf{c} のどれかの要素が1になることが多い）。 \mathbf{x} は，制御対象と制御器の変数で，それらを式で表すのに最低限必要となるものに限られる。ただし， \mathbf{x} の選び方は何通りも考えられ，独立な変数であれば本質的な違いはない。例えば， \mathbf{x} の中の変数としては，コイルの電流，コンデンサの電圧，磁束，回転速度，積分器（I制御）の出力などである。

(6-9)で， $r(k) = r$ （一定）とし， $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(3)$ と順々に計算して， $\mathbf{x}(0)$ のみで表すと次式を得る。

$$k=0 \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}r$$

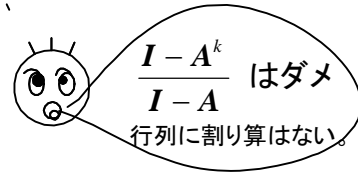
$$k=1 \quad \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}r = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{b}r$$

$$k=2 \quad \mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{b}r = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{b}r$$

...

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^{k-1} + \mathbf{A}^{k-2} + \cdots + \mathbf{A} + \mathbf{I}) \mathbf{b} r \quad (6-11)$$

ただし、 $\mathbf{I} : n \times n$ 単位行列
行列の対角化を利用した(6-8)を用いると、



$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P} \mathbf{Q}^k \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{P} (\mathbf{Q}^{k-1} + \mathbf{Q}^{k-2} + \cdots + \mathbf{Q} + \mathbf{I}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} r \quad \text{より}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \frac{1-\lambda_1^k}{1-\lambda_1} & & & \mathbf{0} \\ & \frac{1-\lambda_2^k}{1-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \frac{1-\lambda_n^k}{1-\lambda_n} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} r \quad (6-12)$$

$$\therefore \mathbf{Q}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{k-1} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_1^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3 + \lambda_3^2 + \cdots + \lambda_3^{k-1} \end{bmatrix}$$

$k \rightarrow \infty$ とした定常状態を考えると、 $\mathbf{x}(k)$ がある値に収束する必要十分条件は、 $|\lambda_i| < 1$ ($i=1,2,\dots,n$) である。これから以下の定理が得られる。

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} r(k)$ で表される **デジタル制御系が安定である必要十分条件**は、系行列 \mathbf{A} の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6-13)$$

である。なお、この安定条件は固有値が重根の場合にも成立する。

極めて重要な定理であるから、しっかり覚えておこう。上記の証明では、指令値 $r(k)$ は一

定と仮定したが、 $\mathbf{x}(k)$ に無関係であれば一定である必要はない。 $r(k)$ が $\mathbf{x}(k)$ に関する場合は、 $r(k)$ を消去した状態方程式を新たに作って安定判別しないといけない。

なお、(6-13)は、第4章で z 変換を用いて得られた(4-7)と同じものである。この関連を以下に示す。ベクトルの z 変換を各変数の数列の z 変換と定義(\equiv)し、以下の記号を用いる。

$$Z\{\mathbf{x}(k)\} \equiv \begin{bmatrix} Z\{x_1(k)\} \\ Z\{x_2(k)\} \\ \vdots \\ Z\{x_n(k)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix} = \mathbf{X}(z) \quad (6-14)$$

(6-9),(6-10)を z 変換して次式を得る。

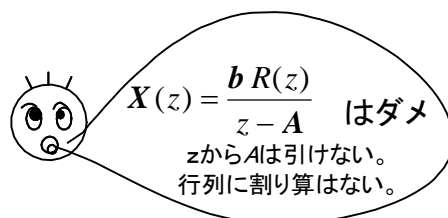
$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}R(z) \quad (6-15)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}\mathbf{X}(z) \quad (6-16)$$

パルス伝達関数を求める場合には、(6-15)で初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とにおいて、

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}R(z) \quad (6-17)$$

左から、 $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ を掛けて、更に、左から \mathbf{c} を掛けて、



$$Y(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}R(z) \quad (6-18)$$

よって、

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \frac{\mathbf{c} \operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (6-19)$$

従って、特性方程式は、

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (6-20)$$

となる。この根(極)は、 \mathbf{A} の固有値と一致することが判る。固有値は習慣的に λ 、特性

方程式の根はデジタル制御では z の記号を用いるが、両者は同じ値になる。従って、(6-13) の条件は、 z 変換で求めた安定条件(4-7)と全く同じことを言っている。なお周波数応答は (6-19)より計算できる。

◎ 逆行列の公式

A の第 i 行と第 j 列を省いてできた $(n-1) \times (n-1)$ 次元の行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを M_{ij} とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき, 例えば, } M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \text{行列式: } |A| &= \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} M_{ij} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{adj}(A) \\ \swarrow \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \nearrow \\ |A| \end{matrix}$$

$$\text{逆行列: } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

$$\text{余因子行列: } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}^T \quad T \text{ は, 転置行列を意味する。}$$

[問題 6-2] 次式で示されるデジタル制御系,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}r(k)$$

が安定であるとき、定常値 $\mathbf{x}(\infty)$ を求めよ。ただし、 $r(k)$ は一定値 r とする。また、(6-12) より、得られる結果と比較せよ。

(答) 定常状態なので、 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(\infty)$ と置くと、 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$ より

$$\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}r = (\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{b}r = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b}r$$

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1/(1-\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/(1-\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b}r$$

この結果は、安定なら $|\lambda_i| < 1$ なので、(6-12)で $k \rightarrow \infty$ とした結果と一致する。

[問題 6-3] デジタル制御系

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) + r(k) \quad \text{①}$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) \quad \text{②}$$

がある。ただし、 $x_1(0)=1, x_2(0)=1$ とする。指令値 $r(k)=1$ とするとき、 $x_1(k), x_2(k)$ を次の2つの方法で求めよ。この系は安定といえるか。

(1) z 変換と逆 z 変換を用いる方法

(2) 行列の対角化による方法

(答) (1) ①を z 変換して

$$zX_1 - zx_1(0) = X_1 + 2X_2 + R \quad \therefore \quad zX_1 - z = X_1 + 2X_2 + \frac{z}{z-1} \quad \text{③}$$

②を z 変換して初期値を代入すると

$$zX_2 - z = 2X_1 + X_2 \quad \text{④}$$

③, ④を解いて

$$X_1 = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 2z - 3}, \quad X_2 = \frac{z(z^2 + 1)}{(z^2 - 2z - 3)(z - 1)}$$

$$\therefore \quad \frac{X_1}{z} = \frac{z+2}{(z-3)(z+1)}, \quad \frac{X_2}{z} = \frac{z^2+1}{(z-3)(z+1)(z-1)}$$

部分分数展開してから両辺に z を掛け、逆 z 変換すると

$$x_1(k) = \frac{5}{4}3^k - \frac{1}{4}(-1)^k, \quad x_2(k) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}3^k + \frac{1}{4}(-1)^k \quad \text{⑤}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき、ともに ∞ となり、不安定である。

(2) ①, ②を行列表示して

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

これを、 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}r(k)$ 書くと、 \mathbf{A} を対角化して

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(6-12) \text{より} \quad \mathbf{x}(k) = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-3^k}{1-3} & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^k}{1+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{1}$$

これより⑤が得られる。なお、 $3, -1$ が固有値 λ_1, λ_2 に対応する。

[問題 6-4] デジタル制御系

$$x(k+2) + x(k+1) + x(k) = r(k)$$

が安定な系か調べよ。ただし、 $r(k)$ は指令値である。

(答) $x_1(k) = x(k)$, $x_2(k) = x(k+1) = x_1(k+1)$ とおくと与式より

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{の固有値は, } \lambda = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \text{ であり,}$$

$|\lambda|=1$ なので安定限界 (不安定) である。

6.3 PおよびP I デジタル制御系

本節では、(6-9)の状態方程式を導く手順について説明する。図 6-2 に示すデジタル制御系を考える。制御器としては、P (比例) またはP I (比例+積分) 制御とする。

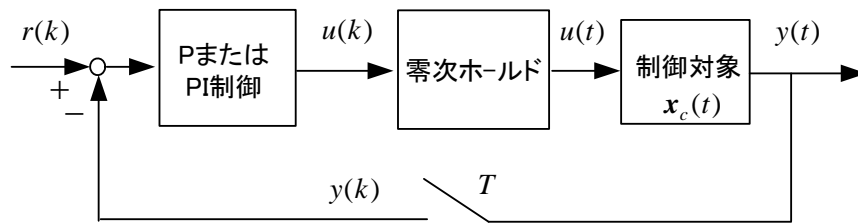


図 6-2 PまたはP I デジタル制御系

制御器に関しては差分方程式で表されることを既に 3 章で示した。そこで、零次ホールドと制御対象の部分について差分方程式を導き、あとで両者を組み合わせて系全体の差分方程式を求めよう。

制御対象は連続系だから、微分方程式をまとめた状態方程式と出力方程式で表すことができる。添字 c を用いる。

制御対象の状態方程式

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) + b_c u(t) \quad (6-21)$$

制御対象の出力方程式

$$y(t) = c_c x_c(t) \quad (6-22)$$

ここで、 x_c : 状態変数 ($m \times 1$ のベクトル), u : 入力, y : 出力

A_c : $m \times m$ の行列, b_c : $m \times 1$ のベクトル, c_c : $1 \times m$ のベクトル

(6-21)の解は、次式で与えられる。(初期値を満足し、(6-23)を微分すると(6-21)になる。)

$$\mathbf{x}_c(t) = e^{A_c t} \mathbf{x}_c(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} \mathbf{b}_c u(\tau) d\tau \quad (6-23)$$

ここで、**状態遷移行列**(state transition matrix)と呼ばれる $e^{A t}$ は、次式で与えられる。

$$e^{A t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \quad (6-24)$$

上式より次の性質が成り立つ。

- (1) $\frac{d}{dt} e^{A t} = \mathbf{A} e^{A t}$
- (2) $e^{A(t+\tau)} = e^{A t} e^{A \tau}$ 一般に $e^{A+B} \neq e^A e^B$
- (3) $e^{A t} = L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ L^{-1} : 逆ラプラス変換

[例題 6-1] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ のとき、 $e^{A t}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad e^{A t} &= L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = L^{-1} \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4} & \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+4} \\ \frac{2}{s+3} - \frac{2}{s+4} & \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} - e^{-4t} & -e^{-3t} + e^{-4t} \\ 2e^{-3t} - 2e^{-4t} & -e^{-3t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

図 6-3 に制御対象の入力と状態変数の時間変化を示す。 $\mathbf{x}_c(kT)$ と $\mathbf{x}_c((k+1)T)$ の関係を導出しよう。 $kT \leq t < (k+1)T$ において、零次ホールドにより入力が $u(t) = u(kT)$ (一定) とする。(6-23)より $t = (k+1)T$ において

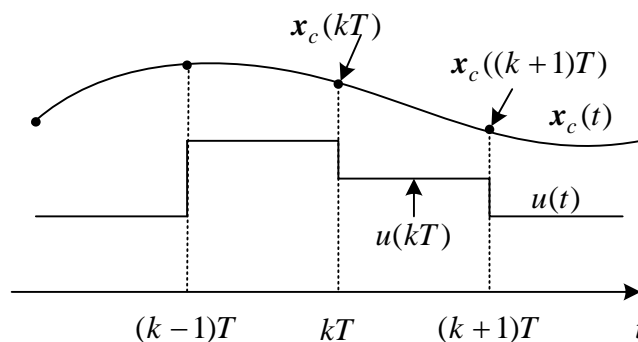


図 6-3 制御対象の入力と状態変数 (\mathbf{x}_c は実際はベクトル)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_c((k+1)T) &= e^{A_c(k+1)T} \mathbf{x}_c(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{b}_c u(\tau) d\tau \\
&= e^{A_c T} (e^{A_c kT} \mathbf{x}_c(0) + \int_0^{kT} e^{A_c(kT-\tau)} \mathbf{b}_c u(\tau) d\tau) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{b}_c u(\tau) d\tau \\
&= e^{A_c T} \mathbf{x}_c(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{b}_c u(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

第2項で、 $kT \leq t < (k+1)T$ で $u(t) = u(kT)$ (一定) として積分の外に出し、
 $(k+1)T - \tau = \tau'$

とおき、変数変換すると、 $-d\tau = d\tau'$ 、 $\tau: kT \rightarrow (k+1)T$ のとき $\tau': T \rightarrow 0$ だから、

$$\text{第2項} = -\int_T^0 e^{A_c \tau'} d\tau' \mathbf{b}_c u(kT) = \int_0^T e^{A_c \tau'} d\tau' \mathbf{b}_c u(kT) = \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau \mathbf{b}_c u(kT)$$

従って、

$$\mathbf{x}_c((k+1)T) = e^{A_c T} \mathbf{x}_c(kT) + \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau \mathbf{b}_c u(kT) \tag{6-25}$$

これを簡単に、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_c(k+1) &= e^{A_c T} \mathbf{x}_c(k) + \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau \mathbf{b}_c u(k) \\
&\equiv \mathbf{A}_p \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{b}_p u(k)
\end{aligned} \tag{6-26}$$

$$\text{ただし、} \mathbf{A}_p = e^{A_c T}, \mathbf{b}_p = \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau \mathbf{b}_c$$

と書く。これで、零次ホールドと制御対象の差分方程式が導出できた。(6-26)は、(6-21)を厳密に解いて、サンプリング周期ごとの値の関係を表したものである。

○ デジタルP制御時のシステム全体の状態方程式

図 6-4 にデジタル P 制御系を示す。零次ホールドと制御対象の差分方程式が(6-26)で導出できたので、P 制御の式を加えて制御系全体の状態方程式を導出しよう。

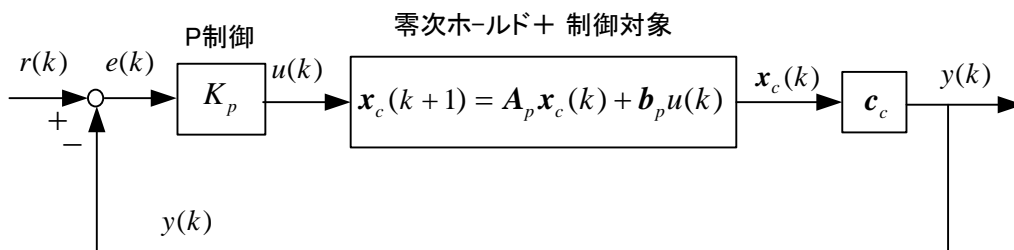


図 6-4 デジタル P 制御系

デジタルP制御は次式で与えられる。

$$u(k) = K_p(r(k) - y(k)) \quad (6-27)$$

(6-22)より, $y(k) = \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(k)$ だから, (6-27)に代入して

$$u(k) = K_p(r(k) - \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(k)) \quad (6-28)$$

(6-28)を(6-26)に代入して, 次式のシステム全体の状態方程式が得られる。

$$\mathbf{x}_c(k+1) = (\mathbf{A}_p - K_p \mathbf{b}_p \mathbf{c}_c) \mathbf{x}_c(k) + K_p \mathbf{b}_p r(k) \quad (6-29)$$

この式は, (6-9)に対応し,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_c(k), \mathbf{A} = \mathbf{A}_p - K_p \mathbf{b}_p \mathbf{c}_c, \mathbf{b} = K_p \mathbf{b}_p \quad (6-30)$$

である。P制御の場合には状態変数は増えない。系行列 \mathbf{A} の固有値でシステム全体の安定判別ができる。 K_p を変えると, その固有値が変化することは言うまでもない。なお, 出力方程式は変数が変わらないので, そのまま利用でき,

$$y(k) = \mathbf{c}_c \mathbf{x}(k) \quad (6-31)$$

である。

○ デジタルPI制御時のシステム全体の状態方程式

図 6-5 にデジタルPI制御系を示す。PI制御の式を加えて制御系全体の状態方程式を導出しよう。

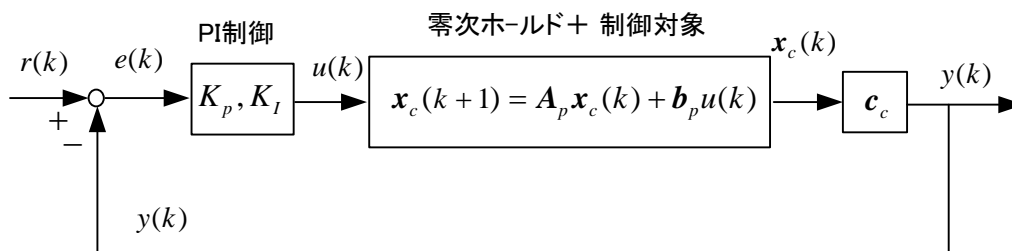


図 6-5 デジタルPI制御系

デジタルPI制御については, 次の3つの方法を述べた。

$$\textcircled{1} \quad u(k) = K_p e(k) + K_I \sum_{m=0}^k e(m-1)T \quad (\text{前進矩形近似}) \quad (6-32)$$

$$\textcircled{2} \quad u(k) = K_p e(k) + K_I \sum_{m=0}^k e(m)T \quad (\text{後退矩形近似}) \quad (6-33)$$

$$\textcircled{3} \quad u(k) = K_p e(k) + \frac{K_I}{2} \sum_{m=0}^k (e(m) + e(m-1))T \quad (\text{台形近似}) \quad (6-34)$$

ここで, $e(k) = r(k) - y(k)$

ここでは, (6-33)の後退矩形近似のP I 制御器を考える。実際に, マイコンで演算する場合, (6-33)ではなく(3-16)で演算するが, システム全体の状態方程式を導く場合には, (6-33)より出発した方が都合が良い。

新たに, 変数として次式を定義する。

$$w(k) \equiv \sum_{m=0}^k e(m) \quad (6-35)$$

$w(k-1) = \sum_{m=0}^{k-1} e(m)$ だから, 次式が得られる。

$$w(k) = w(k-1) + e(k) = w(k-1) + r(k) - y(k) = w(k-1) + r(k) - \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(k) \quad (6-36)$$

また, (6-33)より,

$$\begin{aligned} u(k) &= K_p e(k) + K_I T w(k) \\ &= (K_p + K_I T)(r(k) - \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(k)) + K_I T w(k-1) \end{aligned} \quad (6-37)$$

(6-26)に代入して,

$$\mathbf{x}_c(k+1) = (\mathbf{A}_p - (K_p + K_I T)\mathbf{b}_p \mathbf{c}_c)\mathbf{x}_c(k) + K_I T \mathbf{b}_p w(k-1) + (K_p + K_I T)\mathbf{b}_p r(k) \quad (6-38)$$

(6-36), (6-38)より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k+1) \\ w(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - (K_p + K_I T)\mathbf{b}_p \mathbf{c}_c & K_I T \mathbf{b}_p \\ -\mathbf{c}_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ w(k-1) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (K_p + K_I T)\mathbf{b}_p \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \end{aligned} \quad (6-39)$$

が得られる。P I 制御の場合には, 変数が1つ増えて, (6-9)に以下のように対応する。

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ w(k-1) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - (K_p + K_I T) \mathbf{b}_p \mathbf{c}_c & K_I T \mathbf{b}_p \\ -\mathbf{c}_c & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} (K_p + K_I T) \mathbf{b}_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

$\mathbf{x}(k)$ の成分は、 k にそろっていないがこれは全く問題ない。 $w(k) \equiv w'(k+1)$ と定義しなおせば済むことで、わざわざそうする必要もない。数学的に差分方程式の形になっていればよいのである。(6-37)で、 $w(k)$ を $w(k-1)$ で表わした理由は、差分方程式の形を作るためであった。 \mathbf{A} の固有値の絶対値が全て 1 以下なら、この図 6-5 の P I 制御系は安定である。

[問題 6-5] P I 制御に(6-34)の台形近似を用いたとき、制御系全体の差分方程式を導け。制御対象は、次式で与えられるものとする。

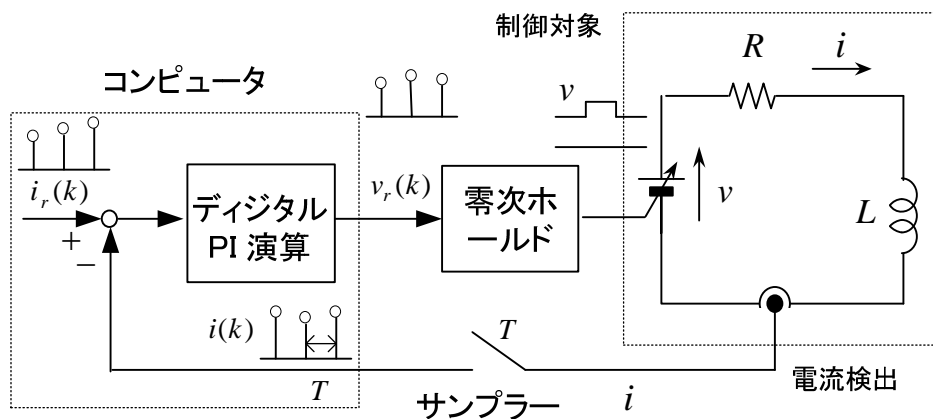
$$\mathbf{x}_c(k+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{b}_p u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(k)$$

(答) $w(k) = \sum_{m=0}^k (r(m) - y(m))$ とおく。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k+1) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - (K_p + \frac{K_I T}{2}) \mathbf{b}_p \mathbf{c}_c & K_I T \mathbf{b}_p \\ -\mathbf{c}_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ w(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_p + \frac{K_I T}{2}) \mathbf{b}_p \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

[問題 6-6] 図に示す RL 回路のデジタル電流 P I 制御系で、制御系全体の状態方程式を示し、特性方程式を求めよ。ただし、P I 制御には、後退矩形近似を用いる。



(答) 制御対象の微分方程式は、

$$v = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \therefore \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v \quad (6-41)$$

零次ホールド回路により、サンプリング周期ごとに v は一定値 $v_r(k)$ だから、

$$\begin{aligned}
i(k+1) &= e^{-\frac{R}{L}T} i(k) + \int_0^T e^{-\frac{R}{L}\tau} d\tau \frac{1}{L} v_r(k) \\
&= e^{-\frac{R}{L}T} i(k) + \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}T}) v_r(k) \\
&\equiv a i(k) + b v_r(k)
\end{aligned} \tag{6-42}$$

ここで, $a = e^{-\frac{R}{L}T}$, $b = (1-a)/R$

[(6-26)を用いたが, (1-23)でもよい.]

PI コントローラについては, 後退矩形近似を用いると

$$v_r(k) = K_p(i_r(k) - i(k)) + K_I T \sum_{m=0}^k (i_r(m) - i(m)) \tag{6-43}$$

$$\text{ここで, } w(k) \equiv \sum_{m=0}^k (i_r(m) - i(m)) \tag{6-44}$$

とおくと,

$$w(k) = w(k-1) + i_r(k) - i(k) \tag{6-45}$$

(6-44)を(6-43)に代入し, それを(6-42)に代入した式と(6-45)より, システム全体の状態方程式が以下のように得られる.

$$\begin{bmatrix} i(k+1) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - (K_p + K_I T)b & K_I T b \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ w(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_p + K_I T)b \\ 1 \end{bmatrix} i_r(k) \tag{6-46}$$

特性方程式は, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} z - a + (K_p + K_I T)b & -K_I T b \\ 1 & z - 1 \end{vmatrix} \\
&= z^2 + \{(K_p + K_I T)b - a - 1\}z + a - K_p b = 0
\end{aligned} \tag{6-47}$$

当然ながら, 特性方程式は, 例題 4-3 と一致する.

(6-46)に, **有限整定制御 (デッドビート制御)** を適用してみよう. 一般にデジタル制御系全体の状態方程式が,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} r(k)$$

で与えられるとき, \mathbf{A} の固有値を 0 に設定することで, **有限整定制御** が実現できる. 固有値は, (6-47)で求まるので, それを 0 とする条件は,

$$(K_p + K_I T)b - a - 1 = 0 \quad , \quad a - K_p b = 0$$

$$\text{よって, } K_p = \frac{a}{b} \quad , \quad K_I = \frac{1}{Tb} \tag{6-48}$$

当然ながら，例題 4-3 の結果と一致する。

実際に，電流の指令値 $i_r(k)$ の単位ステップ変化に対する応答を求める。

(6-46)より，(6-48)を代入して

$$\begin{bmatrix} i(k+1) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ w(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+a \\ 1 \end{bmatrix} i_r(k) \quad (6-49)$$

である， $k=0, 1, 2, \dots$ を(6-49)に代入して順に値を求める。

$i_r(k)=1$ ， $i(0)=0$ ， $w(-1)=0$ として，

$$\begin{bmatrix} i(1) \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} i(2) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(3) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \end{bmatrix} \dots$$

が得られ， $k=2$ 以降値は変化しない。この結果も，例題 4-3 の結果と一致する。

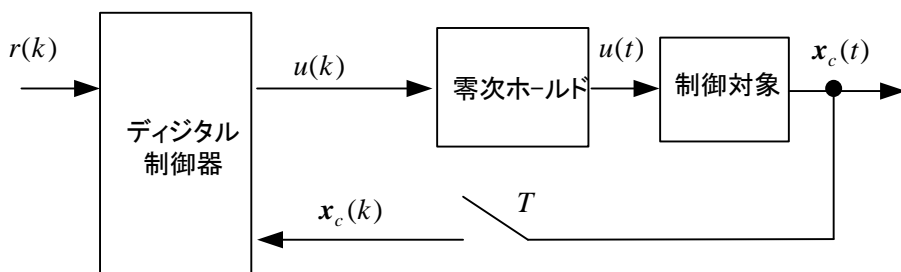
6.4 一般的なデジタル制御系の解析

○ 一般のデジタル制御システムの解析

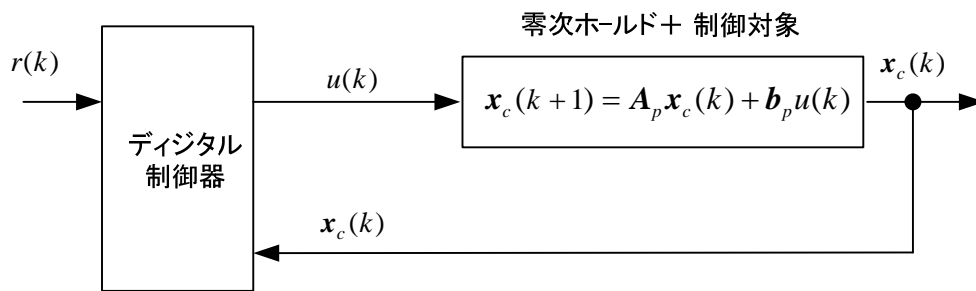
[例題 2-5]のマイナーループを有するような一般的なデジタル制御系の状態方程式の導出を考える。図 6-6 に一般的なデジタル制御系を示す。

まず，零次ホールドと制御対象の差分方程式は既に(6-26)に示した。

$$\mathbf{x}_c(k+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{b}_p u(k) \quad (6-26)$$



(a) 実際のシステム



(b) 零次ホールド+制御対象を差分方程式で表したモデル

図 6-6 一般的なデジタル制御系

次に、デジタル制御器の差分方程式を求めると

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}_w \mathbf{z}(k) + \mathbf{B}_x \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{B}_r r(k) \quad (6-50)$$

のように書くことができる。PI 制御の場合は(6-36)がこれに相当する ($\mathbf{z}(k+1) = w(k)$ とおけばよい)。入力は

$$u(k) = \mathbf{F}_x \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{F}_w \mathbf{z}(k) + \mathbf{F}_r r(k) \quad (6-51)$$

と書ける ((6-37)参照)。 (6-26), (6-50), (6-51)よりシステム全体の状態方程式は次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k+1) \\ \mathbf{z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p + \mathbf{b}_p \mathbf{F}_x & \mathbf{b}_p \mathbf{F}_w \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{A}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{z}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_p \mathbf{F}_r \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} r(k) \quad (6-52)$$

これにより安定解析や応答の計算などが行える。

○ デジタル制御器の演算時間を考慮した解析 (文献(16))

1 サンプル周期だけ入力が遅れる図 4-7 の制御系を今度は時間領域で解析しよう。

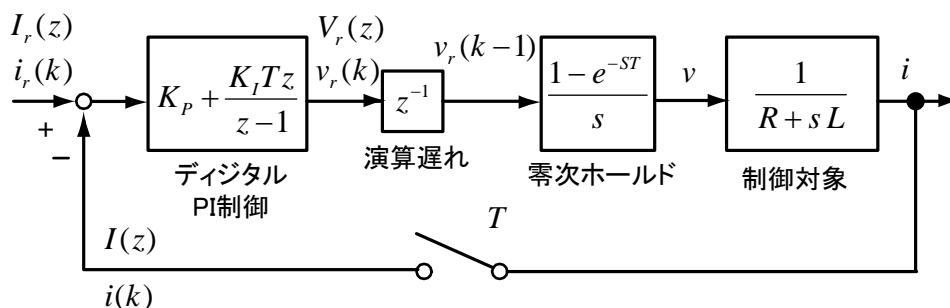


図 4-7 1 サンプルの演算遅れを考慮したデジタル PI 制御系 (再掲)

(6-42)より、演算遅れがあるので、 $kT \leq t < (k+1)T$ の電源電圧は $v_r(k-1)$ だから、

$$i(k+1) = ai(k) + bv_r(k-1) \quad (6-53)$$

ただし, $a = \exp(-RT/L)$, $b = (1-a)/R$

PI コントローラについては, 後退矩形近似を用いているので(6-43)より

$$v_r(k) = K_p(i_r(k) - i(k)) + K_I T w(k) \quad (6-54)$$

(6-45)より,

$$w(k) = w(k-1) + i_r(k) - i(k) \quad (6-55)$$

(6-55)を(6-54)に代入して

$$v_r(k) = (K_p + K_I T)(i_r(k) - i(k)) + K_I T w(k-1)$$

よって,

$$\begin{bmatrix} i(k+1) \\ v_r(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -(K_p + K_I T) & 0 & K_I T \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ v_r(k-1) \\ w(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p + K_I T \\ 1 \end{bmatrix} i_r(k) \quad (6-56)$$

演算遅れがある場合には, 入力を新しく状態変数に選ぶことで状態方程式が得られる。

状態方程式は $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}r(k)$ であり,

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} i(k) \\ v_r(k-1) \\ w(k-1) \end{bmatrix}, \quad r(k) = i_r(k)$$

である。()の中が k に揃っていない場合でも, $+1$ したものが $\mathbf{x}(k+1)$ になっていれば良い。

(6-56)より, \mathbf{A} の固有値を求める特性方程式は

$$\begin{vmatrix} z-a & -b & 0 \\ K_p + K_I T & z & -K_I T \\ 1 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \quad (6-57)$$

$$\text{但し, } \alpha = -(1+a), \beta = a + b(K_p + K_I T), \gamma = -K_p b$$

となる。これは, 4.3 節①の特性方程式と一致している。このように時間遅れがある場合でも状態方程式による解析が可能である。

○ 連続系とデジタル制御系の固有値の関係

指令は安定性に無関係だから 0 とすると, 連続系の状態方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (6-58)$$

で表せる。これをサンプリング周期 T で離散化すると次式を得る。

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) \quad (6-59)$$

(6-59)はデジタル制御系である。逆に $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{B} \mathbf{x}(k)$ のデジタル制御系（例えば(6-39)）が得られたなら、 \mathbf{B} の固有値とそれに対応した連続系の固有値の関係は、(6-58)と(6-59)の関係から求められよう。

e^{AT} の固有値を λ_i 、 \mathbf{A} の固有値を s_i とすると次式の関係が証明できる（文献(5)）。

$$\lambda_i = e^{s_i T} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6-60)$$

証明) \mathbf{A} の固有値 s_i に対する固有ベクトルを \mathbf{u}_i とすると

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{u}_i = \mathbf{A} s_i \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{A} \mathbf{u}_i = s_i^2 \mathbf{u}_i$$

$$\text{同様にして, } \mathbf{A}^n \mathbf{u}_i = s_i^n \mathbf{u}_i$$

$$\begin{aligned} \text{従って, } e^{AT} \mathbf{u}_i &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{\mathbf{A}^2 T^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 T^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{u}_i \\ &= \left(1 + s_i T + \frac{s_i^2 T^2}{2!} + \frac{s_i^3 T^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{u}_i \\ &= e^{s_i T} \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

よって、 e^{AT} の固有値は $e^{s_i T}$ でそれに対する固有ベクトルは \mathbf{u}_i であることが判る。(終)

いま、 $s_i = \alpha + j\omega$ とすると、

$$\lambda_i = e^{s_i T} = e^{\alpha T} (\cos \omega T + j \sin \omega T) \quad (6-61)$$

$\alpha < 0$ のとき、

$$|\lambda_i| = e^{\alpha T} < 1 \quad (6-62)$$

であるから、連続系の左半面の根が z 平面の単位円内に対応し安定条件となっている。

(6-61), (6-62)は、図 4-9 で示した極（固有値と同じ）の軌跡を考える場合役立つ。すなわち、連続系の α, ω に対応する量が、デジタル制御系ではそれぞれ原点からの距離と偏角であることが判る。