実証的分析視点に基づく短期金利先物モデル

神　薗　健　次

Abstract

In this paper, we consider a short-term interest rate futures model. We estimate and forecast our model by using the daily data of the 3-month Eurodollar futures traded at the Chicago Mercantile Exchange (CME). Our statistical approach is based on a similar idea of that of Kariya et al. (1997) rather than that of the arbitrage pricing theory such as Heath-Jarrow-Morton (HJM). The aim of this paper is thus to construct an empirical model which is consistent with the observed data as much as possible.

Keywords : interest rate model, yield curve, Euro-dollar futures

1　はじめに

短期金利先物は，金利スワップ等，金利変動リスクをもつポジションのリスクヘッジ手段として広く用いられている．また，短期金利先物が将来の短期金利に関する市場の予想を表していると見なされることもある．さらに，短期金利自体が金融政策の影響を受けやすいことから，短期金利先物の価格変動から金融政策の変化を予測しようとする試みも行われている．このように，短期金利先物は単なる金融派生商品ではなく，短期金融市場全体を代表する一つの指標であるとともに，金利スワップとの裁定関係を通して長期金

利とも関係し，また金融政策とも密接に関わる重要な経済変数として位置づけられる．最も代表的な短期金利先物は，シカゴマーカンタイル取引所で取引されている，ユーロドル３ヵ月物金利先物である．また，我が国では東京金融取引所で，日本円３ヵ月物金利先物が代表的な短期金利先物である．

金融派生商品として見たとき，短期金利先物は短期金利を原資産とする先物取引であるから，先渡金利（forward interest rate）と密接な関係にある．このため，少なくとも理論的には，Vasicek モデルや Cox-Ingersol-Ross モデル，Hull-White モデル等の伝統的な短期金利モデル，ないしは先渡金利を直接モデル化した Heath-Jarrow-Morton モデル等をベースとした，金利派生証券価格理論による先物金利のプライシングが可能である．しかしながら，上で述べたような，短期金利先物のもつ様々な側面を考慮したとき，短期金利先物に対して金利派生証券価格モデルがどれだけの有効性を持つかということに対しては，ある程度の疑問が付きまとう．さらに，株式などとは異なり，金利自体は市場で取引される資産の価格ではないので，一般に金利を「原資産」として扱う金利派生証券理論を現実の市場に応用する際には，リスクの市場価格の特定化という困難な問題が伴う．

そこで本稿では，[4]，[6]などを参考にしながら，短期金利先物に対する統計的アプローチを試みる．具体的には，３ヵ月物ユーロドル金利先物の日次の価格から計算される先物金利の期間構造の対数に対して多項式関数を当てはめ，その係数の時系列変動を VAR モデルとして定式化し，先物金利の予測を試みる．以下ではまず，第２節でユーロドル金利先物に関する基礎事項の解説を行い，第３節で関連する先行研究について述べる．その後，第４節では本稿で用いるモデルについて説明し，第５節でデータとモデルの推計結果について述べ，第６節では多項式係数に対して VAR モデルを用いた場合の先物金利の予測結果について述べる．最後に，第７節で今後の発展研究の方向性について考察する．

２　ユーロドル金利先物に

ユーロドル金利先物（eurodollar　futures）は，シカゴマーカンタイル取引所（Chicago Mercantile Exchange（CME））で取引されている，ロンドン銀行間取引金利（London Inter-Bank Offered Rate（LIBOR））の３ヵ月物を原資産とする先物である．ここでは，最長10年先までの３ヵ月物金利の先物取引が上場されており，５年先程度までは，日々一定程度の数量が取引されている．ユーロドル金利先物の主要な属性を表１に示す．ユーロドル金利先物は，将来スタートする預金ないし借入金の金利を現時点で確定するために利用可能であるという点で金利の先渡取引と類似点が多いが，取引所で取引される先物であるため，証拠金取引であることと値洗いの存在，反対売買による決済が可能であること，といった，通常の先物と先渡の間の違いと同様の相違点がある．しかしながら，金利先物と金利の先渡取引との間の最も大きな相違点は，最終決済が差金決済であることにより，損益が取引最終日に（確定するだけでなく）実現することである．このため，３ヵ月物の場合でいえば，金利先物の方が先渡取引よりも３ヵ月だけ早くキャッシュフローが発生することになる．

３　先行研究

金利先物を用いた金利モデルに関する研究としては，[1]，[3]がある．これらはいずれも Heath-Jarrow-Morton[2]による先渡金利モデル（HJM モデル）を基礎としている．HJM モデルは連続時間の金利モデルであり，将来時点 T にスタートする瞬間的金利を現時点 $t \leq T$ において取引した瞬間的先渡金利 $f(t,T)$ が，一般には複数次元の Brown 運動を基礎とする確率微分方程式にしたがう，としたものである．HJM は，各時点 T を受渡時点とする瞬間的先渡金利 $f(t,T)$ が取引可能であると想定し，市場に裁定機会が

表１：ユーロドル金利先物の主要な属性

原資産	３ヵ月物ユーロドル預金
取引単位	元本＄1,000,000
価格の表示方法	100－（％90/360日ベースの年利率）
呼値の単位とその値段	期近物では0.025＝＄6.25，それ以外では0.05＝＄12.50
限月	10年先までの３月，６月，９月，12月（四半期限月）および，それ以外の直近の４つの月（シリアル限月）
取引最終日	限月の属する第３水曜日の２ロンドン営業日前
最終決済方法	取引最終日を約定日とする３ヵ月物米ドル LIBOR の数値（小数点第５位以下四捨五入）に基づく差金決済
取引時間	フロア取引：月曜から金曜　7:20－14:00 電子取引：日曜から金曜17:00－16:00 （いずれも米国中部標準時間）

存在しないための条件を求めた．これによれば，$f(t,T)$のドリフト項は，$f(t,T)$のボラティィリティ項とリスクの市場価値とによって決まることになる．[1]は HJM モデルを前提として，金利先物と金利先物オプションのデータを用い，株式のインプライドボラティィリティの推計方法を拡張した方法により，先渡金利モデルの推計を行った．また，[3]は，オプションのデータは用いずに，先物金利のデータから HJM モデルを推計している．いずれにしても，連続時間の無裁定価格理論を基礎とした HJM モデルの推計という点で，両者は共通している．

上述の[1]および[3]は，理論モデルを基礎とした，いわゆる「規範的」アプローチであるが，これに対し，現実に観測されるデータの構造を理解することに重点を置いた，いわゆる「実証的」アプローチと呼ばれる考え方がある（[6]）．この考え方に沿ったクーポン債価格のモデルとしては，[4]，[5]がある．そこでは，各 $j=1,2,...,M$ に対し，$t+s_j$ 期に $C_t(s_j)$ だけのクーポン（$j=M$ の場合は額面を含む）を支払うクーポン債の t 時点価格 P_t が，割引関数 $D_t(s_j)$ を用いて

$$P_t = \sum_{j=1}^{M} C_t(s_j) D_t(s_j) \tag{3.1}$$

のようにモデル化される．そして，割引関数 $D_t(s_j)$ は，平均割引関数 $\bar{D}_t(s_j) = \mathrm{E}[D_t(s_j)]$ と，確率的割引関数 $\Delta_t(s_j) = D_t(s_j) - \bar{D}_t(s_j)$ との和に分解される．平均割引関数に対しては，例えば s_j の多項式として定式化し，確率的割引関数に対しては，何らかの共分散構造を仮定する，というのが概略である（[4]，[5]では，複数の銘柄を同時に扱うことができるように，さらに平均割引関数のパラメターが確率割引関数の共分散構造が銘柄属性に依存するようになっている.）

４　先物金利のモデル

本稿では，前節で述べた実証的アプローチの考え方に沿って，先物金利のモデル化を試みる．まず，s_j 時点先（$j=\ 1,...,M$）に限月を迎える３ヵ月物ユーロドル金利先物の時点 t における価格（100－金利という表示になっている）を100から差し引いたものを $F_t(s_j)$ とおき，これを $t+s_j$ スタートの３ヵ月物先物金利と呼ぶことにする．先物金利が負の値をとることはまずないと考えられるので，本稿では先物金利の対数をとり，それを平均対数先物金利関数と確率対数先物金利関数とに分解する．すなわち，

$$f_t(s_j) = \bar{f}_t(s_j) + \Delta_t(s_j) \tag{4.1}$$

$$f_t(s_j) = \log F_t(s_j),\quad \bar{f}_t(s_j) = E[f_t(s_j)] \tag{4.2}$$

のように分解する．平均対数先物金利関数 $\bar{f}_t(s_j)$ については，本稿では s_j の多項式として

$$\bar{f}_t(s_j) = \delta_{0t} + \delta_{1t} s_j + \cdots + \delta_{mt} s_j^m \tag{4.3}$$

のようにモデル化する．他方，確率対数先物金利関数 $\Delta_t(s_j)$ については，今

回は具体的な共分散構造のモデル化は割愛する．その理由は，先物金利の場合はひとつの時点において利用可能なデータ数は十分な取引数量がある限月の数に限られ，ユーロドル３ヵ月物の場合では20程度であり，クーポン債の場合と比較して少ないことがある．本稿では，クロスセクション構造よりも時系列構造に焦点を当てるにして，多項式(4.3)の係数から成るベクトル $\delta_t = (\delta_{0t},..., \delta_{mt})'$ の時系列モデルを当てはめる．本稿では，パラメタの節約も考慮し，δ_t の時系列モデルとしては，VAR(1)モデル

(4.4) $$\delta_t = \mu + \Phi\delta_{t-1} + u_t$$

を当てはめることとした．なお，時系列モデルによる予測を行う場合には，$\Delta_t(s_j)$に何らかの共分散構造を採用したとしても，将来の $\Delta_t(s_j)$の予測値は０とおくことになる．予測に際して $\Delta_t(s_j)$の共分散構造が真に問題となるのは，先物金利のボラティリティ予測を行う場合であろう．

５　データと推計結果

本稿では，シカゴマーカンタイル証券取引所で取引されているユーロドル金利先物３ヵ月物の，2000年５月１日から2012年１月６日までの期間の日次終値データを用いて前節で述べたモデルを推計する．この期間の営業日数は2,929日である．限月としては，安定的に十分な取引数量が確保できる，５年先までの３月，６月，９月，12月のいわゆる四半期限月のみを用いることとし，それ以外の限月，いわゆるシリアル限月は用いなかった．したがって，データは各営業日毎に20の四半期限月から成る．データの数値は価格による表示になっているので，これを100から差し引いて%90/360日ベースの先物金利による表示に変換してから用いる．また，先物の受渡日までの日数は365で割った年表示とした．

まず初めに，各営業日毎に(4.3)の多項式関数を推計しなければならない

が, 次数選択が問題となる. 本稿では, 最大８次までの多項式を推計し, AIC, SBIC を規準として次数を選択することを試みた．その結果を表２に示す．まず，各営業日毎に多項式の当てはめを行って，どの次数が最も多く選択されたかを示したものが,「プール日数」が１の行である．表中の数字は，対応する次数が選択された営業日の数を表す．表に示した通り，この場合，いずれの規準の下でも最大次数の８次式が選択される日が最も多くなるという結果になった. これは，９次以上が選択される可能性も否定できないが，データ数が20であることを考えると，パラメタ数としては過剰であると考えられる．そこで，便宜上，一定の日数のデータをプールした上で，そこに共通の多項式関数を当てはめ，AIC，SBIC を規準して，どの次数が最も多く選択されるかを調べることにした．その結果が,「プール日数」が２以上の行である．これによれば，いずれの規準の下でも，４日以上10日までのプール日

表２：平均対数先物金利関数の次数選択

AIC 規準										
プール日数	１次	２次	３次	４次	５次	６次	７次	８次	計	最頻次数
1	0	11	3	48	147	352	556	1,812	2,929	８次
2	0	14	29	111	363	691	731	989	2,928	８次
3	1	8	25	128	429	753	781	802	2,927	８次
4	0	9	28	132	439	791	775	752	2,926	６次
5	0	6	30	126	452	804	778	729	2,925	６次
10	0	3	24	112	482	829	800	670	2,920	６次

SBIC 規準										
プール日数	１次	２次	３次	４次	５次	６次	７次	８次	計	最頻次数
1	5	14	3	67	203	388	646	1,603	2,929	８次
2	8	28	77	201	475	836	662	641	2,928	６次
3	7	30	107	252	567	868	645	451	2,927	６次
4	6	30	115	280	593	903	631	368	2,926	６次
5	8	27	116	298	611	936	616	313	2,925	６次
10	6	26	136	322	632	995	563	240	2,920	６次

数で６次が選択される日が最も多くなるという結果を得た．そこで，以下では平均対数先物金利関数としては，６次の多項式関数を用いることとする．

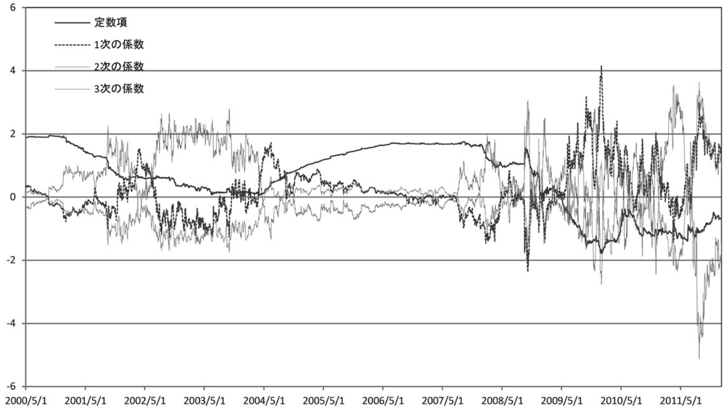
各営業日毎に平均対数先物金利関数として６次の多項式関数を当てはめたときの多項式係数の要約統計量と時系列変動を表３および図１に示す．また，表４には，それぞれの係数が有意に推定された営業日数とその割合を示

表３：多項式係数の要約統計量

	δ_{0t}	δ_{1t}	δ_{2t}	δ_{3t}	δ_{4t}	δ_{5t}	δ_{6t}
平均	0.56691	0.19805	0.37921	-0.27766	0.08431	-0.01224	0.00069
分散	1.07902	0.644475	1.28080	0.58943	0.06064	0.00144	0.00001
歪度	-0.55386	0.85076	-0.57670	0.74653	-0.77278	0.73242	-0.66900
尖度	2.09733	4.44276	5.01755	5.91074	6.23009	6.29160	6.25811

してある．これによれば，すべての係数が７割を超える営業日で５％で有意に推計され，６割を超える営業日では１％でも有意である．なお，自由度修正済決定係数は平均で0.9944であった．各係数の平均的水準としては３次までの係数に比べ，４次以上の係数が絶対値として小さくなっている．分散も小さいが，変動係数を計算すると，４次以上の係数の変動が他と比較して小さいということはないようである．また，２次以上の係数の尖度が大きいことが目立つが，標本期間を短くとった場合には必ずしもこれらの係数の尖度が３を超えているとはいえない．多項式係数の時系列的特徴としては，標本期間を，2004年までの期間（以下，第Ⅰ期）と，2005年から2007年までの期間（以下，第Ⅱ期）と，2008年以降の期間（以下，第Ⅲ期）とで時系列変動の様子が大きく異なっていることが挙げられる．第Ⅰ期では，定数項が次第に減少してゆく中で，それ以外の係数が安定的に０から離れた値をとる傾向にあり，第Ⅱ期では第Ⅰ期とは逆に，定数項が次第に増加してゆく中で，それ以外の係数が安定的に０に近い値をとる傾向にある．第Ⅲ期では，定数項が急激に減少し負の値をとるようになるとともに，他の係数の変動が激しくなっている．以上のことから，全体を通していえることは，先物金利のイー

図１：多項式係数の時系列変動



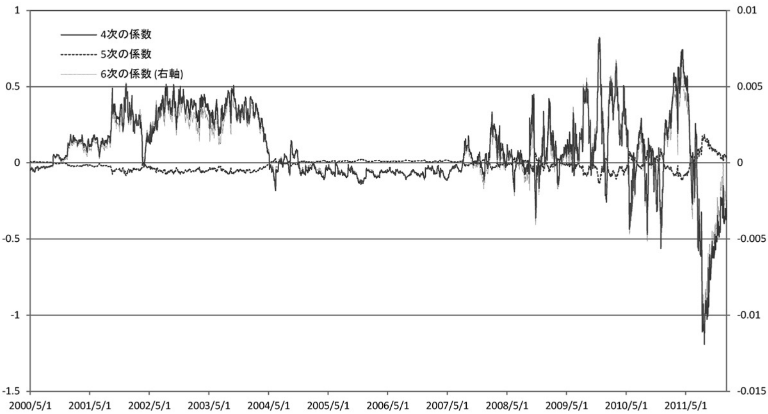


表４：有意な多項式係数の個数（下段はデータ数2,929に対する割合）

	δ_{0t}	δ_{1t}	δ_{2t}	δ_{3t}	δ_{4t}	δ_{5t}	δ_{6t}
５％有意	2,908	2,409	2,491	2,448	2,344	2,254	2,150
	99.3％	82.2％	85.0％	83.6％	80.0％	77.0％	73.4％
１％有意	2,901	2,217	2,281	2,235	2,144	2,002	1,901
	99.0％	75.7％	77.9％	76.3％	73.2％	68.4％	64.9％

表５：多項式係数の Dickey-Fuller 検定（$\boldsymbol{\delta}_{it}=\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\delta}_{it-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{t}$）

	δ_{0t}	δ_{1t}	δ_{2t}	δ_{3t}	δ_{4t}	δ_{5t}	δ_{6t}
$\hat{\rho}$	0.9993	0.9825	0.9823	0.9841	0.9835	0.9823	0.9809
標準誤差	0.0005	0.0035	0.0035	0.0033	0.0034	0.0035	0.0036
$T(\hat{\rho}-1)$	-2.068	-51.143	-51.849	-46.647	-48.306	-51.826	-55.847
τ 値	-4,322	-14,750	-14,868	-14,106	-14,384	-14,928	-15,519

ルドカーブは，高い水準に位置しているときは水平に近く，低い水準に位置しているときには傾きや曲がりが出現し，全体の金利水準が特に低い位置にある場合には，傾きや曲がり具合が激しく変動するということである．短期金利の水準は金融政策の影響を受けやすいということもあるので，短期金利先物の時系列モデルを考える際には，あらゆる金融環境に適合するようなモデルを探すよりも，あまり長くない期間のデータを用いてパラメタ数を節約したモデルを当てはめるほうが有効であると考えらえる．なお，全標本期間を通してのものであるが，多項式係数の時系列の Dickey-Fuller 検定統計量を表５に示してある．これによれば，いずれの係数に関しても，ランダム・ウォーク仮説は棄却される．

6　多項式係数の VAR(1)モデルと先物金利の予測

前節で行った，平均対数先物金利関数の多項式係数の推計結果から，多項式係数の時系列モデルとしては，あまり長くない標本期間のデータに対する定常時系列モデルが適当であると考えられる．そこで，本稿では各営業日毎に，過去の一定の日数のデータを用いて，多項式係数の時系列に VAR(1) モデル(4.4)を当てはめるとともに，予測のパフォーマンスを調べることにする．VAR モデルのパラメタ数を考慮し，VAR モデルの推計に用いる日数としては，100日，150日，200日，250日， 300日をとり，予測パフォーマンスを比較することとした．VAR モデルの推計結果については，パラメタの

値や有意性が時期によって大きく異なっており，一定した結果は得られなかった．このことは，長期にわたって安定的にデータに適合できる時系列モデルの構築が極めて困難であり，あまり長くない期間のデータにモデルを当てはめるという方法を支持している．推計結果の要約を表６に示す．VARモデルのパラメタは，撹乱項の共分散行列に含まれる28個を除けば，定数項と係数行列の56個であるが，これらの推定値の p 値を平均したものを表に掲載してある．パラメタの中には有意なものとそうでないものが混在しているが，p 値の平均は概ね0.37程度である．同じ表に，VAR モデルを変数別に見たときの重回帰モデルとしての自由度修正済決定係数の平均も掲載しているが，これは0.9前後の値になっている．先物金利の多項式係数の時系列変動は大部分が VAR(1)モデルで説明可能であると判断される．なお，表７には，変数別の残差自己相関に関する，ラグ10までの Box-Pierce 検定の p 値の平均を掲載してある．平均的に見れば，残差に自己相関が残っている可能

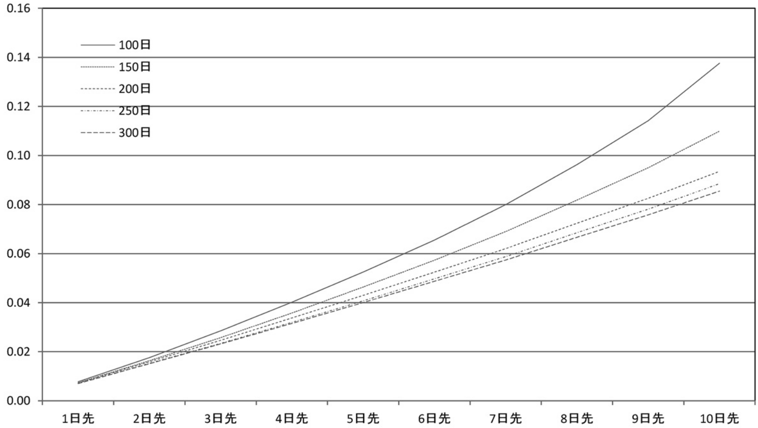
表６：VAR モデルの推計結果要約

標本日数	パラメタの p 値平均	自由度修正済決定係数の平均						
		δ_{0t}	δ_{1t}	δ_{2t}	δ_{3t}	δ_{4t}	δ_{5t}	δ_{6t}
100	0.379	0.901	0.854	0.830	0.835	0.839	0.839	0.837
150	0.370	0.929	0.890	0.862	0.861	0.862	0.861	0.859
200	0.373	0.950	0.908	0.877	0.874	0.876	0.875	0.874
250	0.367	0.966	0.920	0.889	0.884	0.884	0.883	0.881
300	0.383	0.977	0.930	0.898	0.891	0.889	0.888	0.886

表７：撹乱項の Box-Pierce 検定（ラグ10まで）の p 値の平均

標本日数	δ_{0t}	δ_{1t}	δ_{2t}	δ_{3t}	δ_{4t}	δ_{5t}	δ_{6t}
100	0.353	0.411	0.421	0.448	0.467	0.473	0.472
150	0.324	0.388	0.416	0.456	0.477	0.482	0.480
200	0.281	0.382	0.425	0.464	0.479	0.479	0.478
250	0.247	0.365	0.428	0.473	0.489	0.489	0.487
300	0.208	0.333	0.420	0.476	0.495	0.497	0.498

図２：予測の平均二乗誤差比較



性があり，時系列モデルに改善の余地があるが，ここではパラメタ数を考慮し，VAR モデルの次数は１に留めておくこととした．

図２に，VAR モデルの推計に用いるデータ日数別に予測の平均二乗誤差を計算して比較したものを示す．予測の平均二乗誤差は，期近から期先までの20の限月にわたっての平均をとり，予測の先日数別に計算した．なお，データ日数が100日の場合では，推計した VAR モデルの係数が定常性の条件をみたさずに，金利の予測誤差が異常値を示しているものが１つあったため，その日の予測は除外してある．これによれば，VAR モデルの推計に用いるデータ日数を増やすにつれて予測のパフォーマンスが改善するが，データ日数が200日を超えてくると予測パフォーマンスの改善の度合いが小さくなっている．したがって，予測という点からは，VAR モデルの推計には200日から250日程度のデータ日数を用いれば十分であると考えられる．

7　おわりに

本稿では，実証的観点に基づく先物金利モデルを考案し，例としてユーロドル金利先物３ヵ月物を取り上げて，モデルの推計と予測を行った．結論に代えて，考え得る発展研究の方向性について述べる．まず，学術的観点からは，確率対数先物金利関数のモデル化がある．本稿では，パラメタ数の制約もあることから，確率対数先物金利関数のモデル化は見送ったが，平均対数先物金利関数がより少ないパラメタによってモデル化できれば，確率対数先物金利関数に重点を置いたモデルを作成できる可能性がある．これは，実際に観測される金利変動をイールドカーブの平均的形状の時系列変動ととらえるか，先物の限月間の共分散構造に起因する確率変動ととらえるかということに対応すると考えられる．もう一つの方向性としては，異なる通貨の先物金利を同時にモデル化することである．これはちょうど，先物金利に通貨という一種の銘柄属性を導入することになるが，金融市場のグローバル化が進展し，世界の一角で起きた金融システム危機が忽ちにして世界全体へ波及してゆくような環境下では，金利リスクの管理に当たっては常に念頭に置かなければならない視点である．次に，実用上の観点からは，モデルをどのように生かしてゆくかという点でいくつかの方向性が考えられる．例えば，モデルによる予測を実際のトレードに応用する際，現実の先物金利がモデルによる予測値から乖離した場合に，近い将来に予測値の近辺に戻ってくると予想してポジションを建てるのか，あるいは逆に何らかの構造変化が起きたと判断して，予測から乖離した方向にポジションを建てるのかという正反対の応用が考えられる．今回は，このような視点からのシミュレーションは行っていないが，モデルの実用を行う場合には検討しなければならない事柄である．なお，東京金融取引所で取引されている日本円金利先物に対して同様のモデルを適用することは当初から関心のあったことであるが，日本円金利先物の場合には十分な取引数量をもつ限月数が少なく，パラメタ上の制約があ

るので今回は行っていない．モデルのパラメタリゼーションの改善ということも，発展研究の一つの方向であろう．

参 考 文 献

［1］ Amin, K. I. and A. J. Morton (1994). Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models, *Journal of Financial Economics*, **35**, 141-180.

［2］ Heath, D.,R. A. Jarrow, and A. J. Morton (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates： A New Methodology for Contingent Claims Valuation *Econometrica*, **60**, 77-105.

［3］ Kamizono, K. and T. Kariya (1996). An implementation of the HJM model with application to Japanese interest futures, *Asia-Pacific Financial Markets*, **3**, 151-170.

［4］ Kariya, T. (1993). *Quantitative Methods for Portfolio Analysis*, Kluwer Academic Publishers.

［5］ 刈屋武昭（1994）『計量経済分析法の新展開』岩波書店.

［6］ 刈屋武昭（1995）『債券計量分析の基礎と応用』岩波書店.