

付録1 誘導機の2軸理論

固定子と回転子それぞれの3相回路について成り立つ6つの微分方程式を変数変換することで、過渡状態でも使える簡単な4つの微分方程式を導く。2つ減少できるのは誘導機が対称でかつ固定子と回転子それぞれ3相電流の和が0（零相成分が0）となるからである。**空間ベクトル**⁽¹⁴⁾⁽²²⁾⁽²⁵⁾⁽⁵¹⁾を定義して複素数として計算する方が行列を用いた計算より簡単である。静止座標系の空間ベクトルは、定常状態では一般のフェーズと実質的に同じになる。

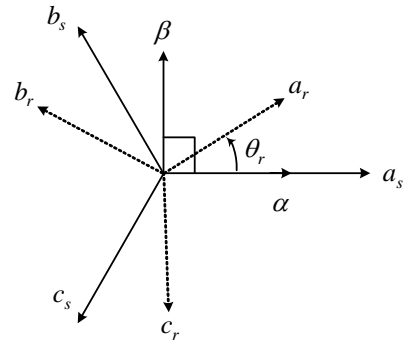
○ 誘導機のモデル(静止座標系)

固定子のa相巻線軸と α 軸が一致するような、図の $\alpha-\beta$ 軸（**静止座標系**）を考える。 $\alpha-\beta$ 軸と巻線軸（ a_s, b_s, c_s (固定子), a_r, b_r, c_r (回転子)）のなす角の \cos 成分より、**固定子側**について、 $f_{sa} + f_{sb} + f_{sc} = 0$ の場合に、次式の変数変換を定義する。

$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-1})$$

逆に、

$$\begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix}$$



ここで、 f は電圧 e 、電流 i 、鎖交磁束 ψ を表す。いま、**空間ベクトル** \dot{f}_s （静止座標系）を次式で定義する。

図 a1-1 巻線軸と $\alpha-\beta$ 軸（静止座標系）

$$\dot{f}_s \equiv f_{s\alpha} + j f_{s\beta} \quad (\text{a1-2})$$

f は電圧 e 、電流 i 、鎖交磁束 ψ を表す。

(a1-1)より、次式が得られる。

$$\dot{f}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (f_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{sc}) \quad (\text{a1-3})$$

回転子側については、回転子の巻線軸が回転するので、定数でなく次式で $\alpha-\beta$ 量が求まる。

$$\begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta_r & \sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-4})$$

回転子側の空間ベクトルも以下のように定義する。 f は電圧 e ，電流 i ，磁束 ψ を表す。

$$\dot{f}_r \equiv f_{r\alpha} + j f_{r\beta} \quad (\text{a1-5})$$

(a1-4)より

$$\begin{aligned} \dot{f}_r &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ f_{ra} (\cos \theta_r + j \sin \theta_r) + f_{rb} (\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + j \sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi)) \right. \\ &\quad \left. + f_{rc} (\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + j \sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} (f_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{rc}) \end{aligned} \quad (\text{a1-6})$$

第3章で求めた固定子側の微分方程式(3-5)より，

$$\begin{aligned} \dot{e}_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} (e_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} e_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} e_{sc}) \\ &= R_s \dot{i}_s + p\psi_s \end{aligned} \quad (\text{a1-7})$$

$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0$ ， $i_{ra} + i_{rb} + i_{rc} = 0$ であるから，(3-2)より

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} \psi_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \psi_{sc}) \\ &= (l_s + L_{ss}) \dot{i}_s - \frac{L_{ss}}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \{ i_{sb} + i_{sc} + e^{j\frac{2}{3}\pi} (i_{sa} + i_{sc}) + e^{-j\frac{2}{3}\pi} (i_{sa} + i_{sb}) \} \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr} \cos \theta_r (i_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{rc}) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) (i_{rb} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{rc} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{ra}) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) (i_{rc} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{ra} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{rb}) \\ &= (l_s + \frac{3}{2} L_{ss}) \dot{i}_s \\ &\quad + M_{sr} \left\{ i_r e^{-j\theta_r} \cos \theta_r + i_r e^{-j\theta_r} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + i_r e^{-j\theta_r} e^{j\frac{2}{3}\pi} \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \right\} \\ &= (l_s + \frac{3}{2} L_{ss}) \dot{i}_s + M_{sr} i_r e^{-j\theta_r} \cdot \frac{3}{2} e^{j\theta_r} \quad (\text{付録公式利用}) \\ &= (l_s + \frac{3}{2} L_{ss}) \dot{i}_s + \frac{3}{2} M_{sr} \dot{i}_r \end{aligned} \quad (\text{a1-8})$$

$$\text{ここで， } L_s = \frac{3}{2} L_{ss} + l_s \quad , \quad M = \frac{3}{2} M_{sr} \quad \text{とおくと} \quad (\text{a1-9})$$

$$\dot{\psi}_s = L_s \dot{i}_s + M \dot{i}_r \quad (\text{a1-10})$$

(a1-7)へ代入して，

$$\dot{e}_s = R_s \dot{i}_s + L_s p \dot{i}_s + M p \dot{i}_r \quad (\text{a1-11})$$

(3-6)より，

$$\begin{aligned}\dot{e}_r &= \sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\theta_r}(e_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi}e_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}e_{rc}) \\ &= R_r \dot{i}_r + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\theta_r}p(\psi_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi}\psi_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\psi_{rc})\end{aligned}$$

故に,

$$\dot{e}_r = R_r \dot{i}_r + e^{j\theta_r}p(\dot{\psi}_r e^{-j\theta_r}) \quad (\text{a1-12})$$

(3-3)より,

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_r &= \sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\theta_r}(\psi_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi}\psi_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\psi_{rc}) \\ &= (l_r + \frac{3}{2}L_{rr})\dot{i}_r + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\theta_r}M_{sr} \left\{ \cos\theta_r(i_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi}i_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}i_{sc}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \cdot (i_{sb} + e^{j\frac{2}{3}\pi}i_{sc} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}i_{sa}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \cdot (i_{sc} + e^{j\frac{2}{3}\pi}i_{sa} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}i_{sb}) \right\} \\ &= (l_r + \frac{3}{2}L_{rr})\dot{i}_r + e^{j\theta_r}M_{sr}\dot{i}_s \left\{ \cos\theta_r + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \right\} \\ &= (l_r + \frac{3}{2}L_{rr})\dot{i}_r + e^{j\theta_r}M_{sr}\dot{i}_s \cdot \frac{3}{2}e^{-j\theta_r} \\ &= (l_r + \frac{3}{2}L_{rr})\dot{i}_r + \frac{3}{2}M_{sr}\dot{i}_s\end{aligned} \quad (\text{a1-13})$$

ここで,

$$L_r = \frac{3}{2}L_{rr} + l_r \quad (\text{a1-14})$$

とおくと,

$$\dot{\psi}_r = L_r \dot{i}_r + M \dot{i}_s \quad (\text{a1-15})$$

(a1-12)より,

$$\begin{aligned}\dot{e}_r &= R_r \dot{i}_r + e^{j\theta_r}p(L_r \dot{i}_r e^{-j\theta_r} + M \dot{i}_s e^{-j\theta_r}) \\ &= R_r \dot{i}_r + L_r p \dot{i}_r + M p \dot{i}_s - j\omega_r L_r \dot{i}_r - j\omega_r M \dot{i}_s\end{aligned} \quad (\text{a1-16})$$

(a1-11), (a1-16)より, 静止座標系での空間ベクトルを用いた誘導機のモデルは

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & Mp \\ (p - j\omega_r)M & R_r + (p - j\omega_r)L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \quad (\text{a1-17})$$

となる。(a1-17)式を実部と虚部に分けて, 静止座標系での誘導機のモデルが次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ e_{r\alpha} \\ e_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & 0 & Mp & 0 \\ 0 & R_s + L_s p & 0 & Mp \\ Mp & \omega_r M & R_r + L_r p & \omega_r L_r \\ -\omega_r M & Mp & -\omega_r L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-18})$$

固定子鎖交磁束は(a1-10)より

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + M i_{r\alpha}, \quad \psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + M i_{r\beta} \quad (\text{a1-19})$$

で表わされ、これを用いると固定子側の式は

$$e_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + p\psi_{s\alpha} \quad (\text{a1-20})$$

$$e_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + p\psi_{s\beta} \quad (\text{a1-21})$$

となる。回転子鎖交磁束は(a1-15)より

$$\psi_{r\alpha} = L_r i_{r\alpha} + M i_{s\alpha}, \quad \psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} + M i_{s\beta} \quad (\text{a1-22})$$

で表わされ、これを用いると回転子側の式は

$$e_{r\alpha} = R_r i_{r\alpha} + p\psi_{r\alpha} + \omega_r \psi_{r\beta} \quad (\text{a1-23})$$

$$e_{r\beta} = R_r i_{r\beta} + p\psi_{r\beta} - \omega_r \psi_{r\alpha} \quad (\text{a1-24})$$

となる。最終的に二次側の諸量は全て一次側に換算した式を用いるが、式は換算後も同じ形なので、単に二次側の変数や定数は換算された量と考えるだけでよい（第3章参照）。

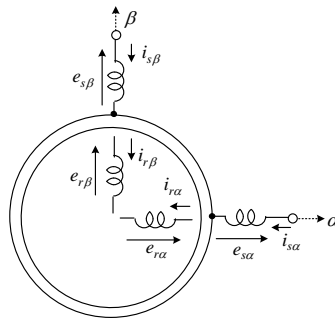


図 a1-2 誘導機 $\alpha - \beta$ 座標系モデル⁽²⁾

○ 誘導機のモデル(任意回転座標系)

静止座標系のモデルを任意の角速度 ω で回転する $d-q$ 回転座標系へ変換する。

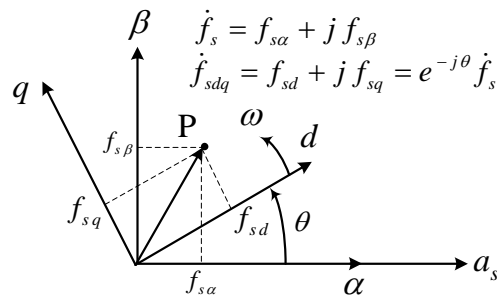


図 a1-3 静止座標系と回転座標系

図 a1-3 より，P 点を静止座標系から見た \dot{f}_s, \dot{f}_r と $d-q$ 座標系から見た $\dot{f}_{sdq}, \dot{f}_{rdq}$ の関係は， $d-q$ 座標系から見る方が，長さが同じで $-\theta$ 回転して見えるので，次式が得られる。

$$\dot{f}_{sdq} = e^{-j\theta} \dot{f}_s \quad (\text{a1-25})$$

$$\dot{f}_{rdq} = e^{-j\theta} \dot{f}_r \quad (\text{a1-26})$$

(a1-11)に， p にかからないように左から $e^{-j\theta}$ を掛けて，

$$\begin{aligned} e^{-j\theta} \dot{e}_s &= e^{-j\theta} R_s \dot{i}_s + e^{-j\theta} L_s p \dot{i}_s + e^{-j\theta} M p \dot{i}_r \\ \therefore \dot{e}_{sdq} &= R_s \dot{i}_{sdq} + e^{-j\theta} L_s p (e^{j\theta} \dot{i}_{sdq}) + e^{-j\theta} M p (e^{j\theta} \dot{i}_{rdq}) \\ &= R_s \dot{i}_{sdq} + L_s p \dot{i}_{sdq} + j\omega L_s \dot{i}_{sdq} + M p \dot{i}_{rdq} + j\omega M \dot{i}_{rdq} \end{aligned} \quad (\text{a1-27})$$

(a1-16)に同様に，左から $e^{-j\theta}$ を掛けて，

$$\begin{aligned} e^{-j\theta} \dot{e}_r &= e^{-j\theta} R_r \dot{i}_r + e^{-j\theta} L_r p (e^{j\theta} \dot{i}_{rdq}) + e^{-j\theta} M p (e^{j\theta} \dot{i}_{sdq}) \\ &\quad - e^{-j\theta} j\omega_r L_r (e^{j\theta} \dot{i}_{rdq}) - e^{-j\theta} j\omega_r M (e^{j\theta} \dot{i}_{sdq}) \\ \dot{e}_{rdq} &= R_r \dot{i}_{rdq} + L_r p \dot{i}_{rdq} + j\omega L_r \dot{i}_{rdq} + M p \dot{i}_{sdq} + j\omega M \dot{i}_{sdq} \\ &\quad - j\omega_r L_r \dot{i}_{rdq} - j\omega_r M \dot{i}_{sdq} \end{aligned} \quad (\text{a1-28})$$

(a1-27)，(a1-28)式より，

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{sdq} \\ \dot{e}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p + j\omega L_s & M p + j\omega M \\ M p + j(\omega - \omega_r) M & R_r + L_r p + j(\omega - \omega_r) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{sdq} \\ \dot{i}_{rdq} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-29})$$

但し， $p\theta = \omega$

(a1-29)を実部と虚部に分けて， $\dot{f}_{sdq} = f_{sd} + j f_{sq}$ ， $\dot{f}_{rdq} = f_{rd} + j f_{rq}$ とすることで，任意回転座標系での誘導機のモデルが以下のように得られる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e_{rd} \\ e_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega L_s & M p & -\omega M \\ \omega L_s & R_s + L_s p & \omega M & M p \\ M p & -(\omega - \omega_r) M & R_r + L_r p & -(\omega - \omega_r) L_r \\ (\omega - \omega_r) M & M p & (\omega - \omega_r) L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-30})$$

(a1-30)は固定子及び回転子の $d-q$ 巻線に成り立つ式と言われる。

$d-q$ と $\alpha-\beta$ 量の関係を行列で求めておく。(a1-25)より，

$$\begin{aligned} \dot{f}_{sdq} &= f_{sd} + j f_{sq} = (\cos \theta - j \sin \theta) (f_{s\alpha} + j f_{s\beta}) \\ \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{a1-31})$$

$$\text{逆に，} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} \quad (\text{a1-32})$$

3相量と $d-q$ 量の関係も求めておこう。(a1-3), (a1-25)より,

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_{sdq} &= e^{-j\theta} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} (f_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{sc}) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[f_{sa} \left\{ \cos\theta - j\sin\theta \right\} + f_{sb} \left\{ \cos\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + f_{sc} \left\{ \cos\left(-\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(-\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \right] \\
 \begin{bmatrix} \dot{f}_{sd} \\ \dot{f}_{sq} \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{a1-33}$$

以下の式からも求まる。

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{sd} \\ \dot{f}_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix}$$

(a1-6), (a1-26)より,

$$\dot{f}_{rdq} = e^{-j\theta} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} (f_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{rc})$$

(a1-33)と比べて, θ のかわりに $\theta - \theta_r = \beta$ とおけばよく,

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{rd} \\ \dot{f}_{rq} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\beta & \cos\left(\beta - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\beta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\beta & -\sin\left(\beta - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\beta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \tag{a1-34}$$

(a1-34)で, $\theta = 0$ とおくと, (a1-4)の静止座標系の変換に一致する。

○ 瞬時トルク

誘導機が発生するトルク τ_e は静止座標系の量を用いると次式で与えられることが判っている。*は共役複素数を表す。Im は虚部を意味する。

$$\begin{aligned}
 \tau_e &= \frac{P}{2} \text{Im}(\dot{\psi}_s^* \dot{i}_s) \\
 &= \frac{P}{2} M \text{Im}(\dot{i}_s \dot{i}_r^*) \quad \text{(a1-10)より} \\
 &= \frac{P}{2} M (i_{s\beta} i_{r\alpha} - i_{s\alpha} i_{r\beta}) \quad \text{(a1-2), (a1-5)より}
 \end{aligned} \tag{a1-35}$$

回転座標系の変数で表わすと, (a1-25), (a1-26)より,

$$\tau_e = \frac{P}{2} M \text{Im}(\dot{i}_{sdq} e^{j\theta} \dot{i}_{rdq}^* e^{-j\theta}) = \frac{P}{2} M \text{Im}(\dot{i}_{sdq} \dot{i}_{rdq}^*)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P}{2} M (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \\
&= \frac{P M}{2 L_r} (i_{sq} \psi_{rd} - i_{sd} \psi_{rq})
\end{aligned} \tag{a1-36}$$

○ 定常等価回路

定常状態で成り立つ誘導機の等価回路を静止座標系の空間ベクトルを使って導出する。これは、2章で導出した**T形等価回路**（鉄損無視の場合）に一致する。また、ベクトル制御と関係が深い**T-I形等価回路**も導出する。

誘導機の相電圧を

$$\begin{bmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{2} V \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \tag{a1-37}$$

とすると、静止座標系の(a1-3)より

$$\begin{aligned}
\dot{e}_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} (e_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} e_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} e_{sc}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} V \{ \cos \omega t + e^{j\frac{2}{3}\pi} \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \} \\
&= \sqrt{3} V e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{a1-38}$$

一方、一般に二次側は短絡されて $e_{ra} = e_{rb} = e_{rc} = 0$ だから

$$\dot{e}_r = 0 \tag{a1-39}$$

(a1-17)で、 $\dot{e}_s = \sqrt{3} V e^{j\omega t}$ は交流入力である。よって、**定常状態**では、 $p \rightarrow j\omega$ において解析できる（フェーザと同様の計算が可能である）。定常状態では、次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M \\ j(\omega - \omega_r) M & R_r + j(\omega - \omega_r) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \tag{a1-40}$$

2行目に、 $1/s = \omega/(\omega - \omega_r)$ を掛けて

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M \\ j\omega M & \frac{R_r}{s} + j\omega L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \tag{a1-41}$$

(a1-41)より、図 a1-4 の**T形定常等価回路**が得られる。ただし、(3-1), (a1-9), (a1-14)より M, L_r, l_r を一次側に換算すると $L_s = l_s + M'$, $L_r' = l_r' + M'$ が成り立つことが判る。ダッシュを省き M, L_r, l_r を一次側に換算した値と考えると、 $L_s = l_s + M$, $L_r = l_r + M$ である。

図中、 \dot{i}_0' は励磁電流で、

$$\dot{i}_0' = \dot{i}_s + \dot{i}_r \tag{a1-42}$$

とする。また、ギャップ磁束は次式となる。

$$\dot{\psi}_0 = M \dot{i}_0' \tag{a1-43}$$

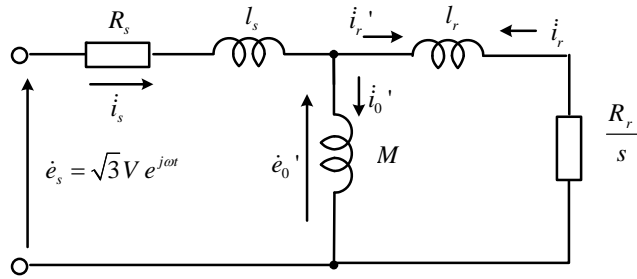


図 a1-4 T形定常等価回路 (時間を含んだ**空間ベクトル表示**
電圧電流が相電圧と相電流の $\sqrt{3}$ 倍 フェーズの様に計算可能)

一般の誘導機の等価回路 (1相分) は, 相電圧フェーズ \dot{E}_s , 相電流フェーズ \dot{I}_s を考えて

$$\dot{e}_s \rightarrow \dot{E}_s, \quad \dot{i}_s \rightarrow \dot{I}_s, \quad \dot{i}_r \rightarrow \dot{I}_r$$

と直すだけで図 a1-5 のように求まる。ただし,

$$\dot{e}_s = \sqrt{3}\dot{E}_s e^{j\omega t}, \quad \dot{i}_s = \sqrt{3}\dot{I}_s e^{j\omega t}, \quad \dot{i}_r = \sqrt{3}\dot{I}_r e^{j\omega t} \quad (\text{a1-44})$$

の関係がある。

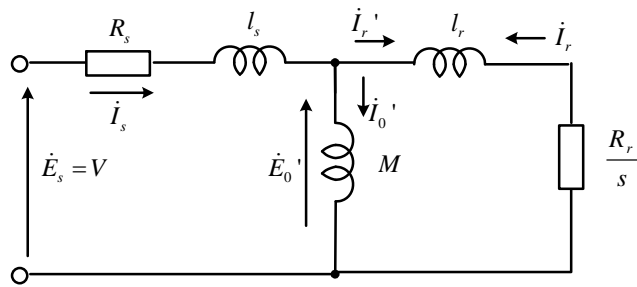


図 a1-5 T形定常等価回路(一般の**フェーズ表示** 相電圧と相電流)

発生トルク τ_e は R_r/s で消費される電力から次式より計算できる。

$$\tau_e = \frac{P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} |\dot{i}_r|^2 = \frac{3P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} |\dot{I}_r|^2 \quad (\text{a1-45})$$

(a1-35)を用いて, (a1-45)を導く。

(a1-35) に(a1-43)を用いると

$$\tau_e = \frac{P}{2} \mathbf{I}_m(\dot{\psi}_0^* \dot{i}_r) \quad (\text{a1-46})$$

が得られる。図 a1-4 より $\dot{e}_0' = (\frac{R_r}{s} + j\omega l_r) \dot{i}_r'$ だから,

$$\dot{\psi}_0 = M \dot{i}_0' = M \frac{\dot{e}_0'}{j\omega M} = (\frac{R_r}{j\omega s} + l_r) \dot{i}_r'$$

上式を(a1-46)に代入すると(a1-45)が得られる。(a1-44)より $|\dot{i}_r'| = \sqrt{3} |\dot{I}_r'|$ である。

次に, **T-I 形定常等価回路**を導く。

(a1-41)より, 次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M k \\ j\omega M k & (\frac{R_r}{s} + j\omega L_r)k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r/k \end{bmatrix} \quad (\text{a1-47})$$

ここで、(a1-47)の2行目で $i_s, i_r/k$ が同じインダクタンスを流れるように $j\omega$ の係数を同じにすると、二次側の漏れインダクタンスが消えた等価回路に出来るので、

$$M k = L_r k^2 \quad \therefore k = \frac{M}{L_r} \quad (\text{a1-48})$$

となる。このとき、図 a1- 6 の T-I 形等価回路が得られる。

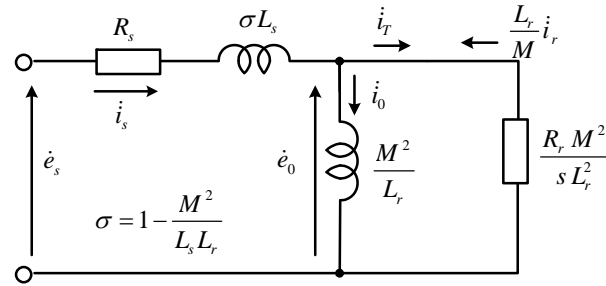


図 a1- 6 T-I 形定常等価回路 (時間を含んだ空間ベクトル表示
電圧電流が相電圧と相電流の $\sqrt{3}$ 倍 フェーズの様に計算可能)

ここで、 $\sigma L_s = L_s - \frac{M^2}{L_r}$, $i_T \equiv \frac{L_r}{M} i_r$,

$$\dot{e}_s = \sqrt{3} \dot{E}_s e^{j\omega t}, \quad i_s = \sqrt{3} I_s e^{j\omega t}, \quad i_T = \sqrt{3} I_T e^{j\omega t}, \quad i_0 = \sqrt{3} I_0 e^{j\omega t} \quad (\text{a1-49})$$

回路の式が、(a1-47)式を満足することを確認せよ。

この場合にも、一般のフェーズを用いた等価回路 (1 相分) は、図 a1- 6 のように記号を置き換えるだけでよい。

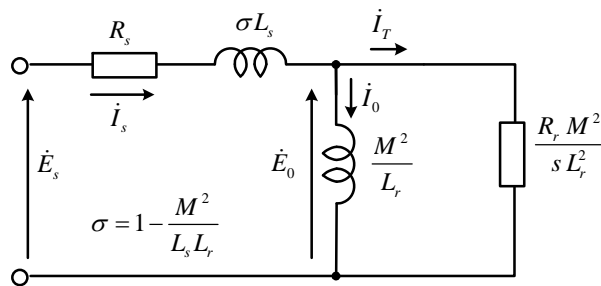


図 a1- 7 T-I 形定常等価回路(一般のフェーズ表示 相電圧と相電流)

発生トルクは、(a1-45)より $R_r M^2 / (s L_r^2)$ で消費される電力 (二次入力) を同期角速度 (機械角) で割った値になる。すなわち、

$$\tau_e = \frac{P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} \cdot \frac{M^2}{L_r^2} |i_T|^2 = \frac{3P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} \cdot \frac{M^2}{L_r^2} |I_T|^2 \quad (\text{a1-50})$$

(a1-50)式を計算すると、発生トルクは次式で与えられる。

$$\tau_e = \frac{3P}{2} \cdot \frac{\omega M^2 s R_r |\dot{E}_s|^2}{s^2 \omega^2 L_r^2 (\omega^2 L_s^2 \sigma^2 + R_s^2) + 2R_s R_r \omega^2 M^2 s + R_r^2 (\omega^2 L_s^2 + R_s^2)} \quad (\text{a1-51})$$

図 a1-8 に定常時の空間ベクトル図を示す。(a1-49)より、フェーザ図と違い回転するが、ある瞬間で考えれば、フェーザ図と同じである。ただし、大きさは $\sqrt{3}$ 倍である。

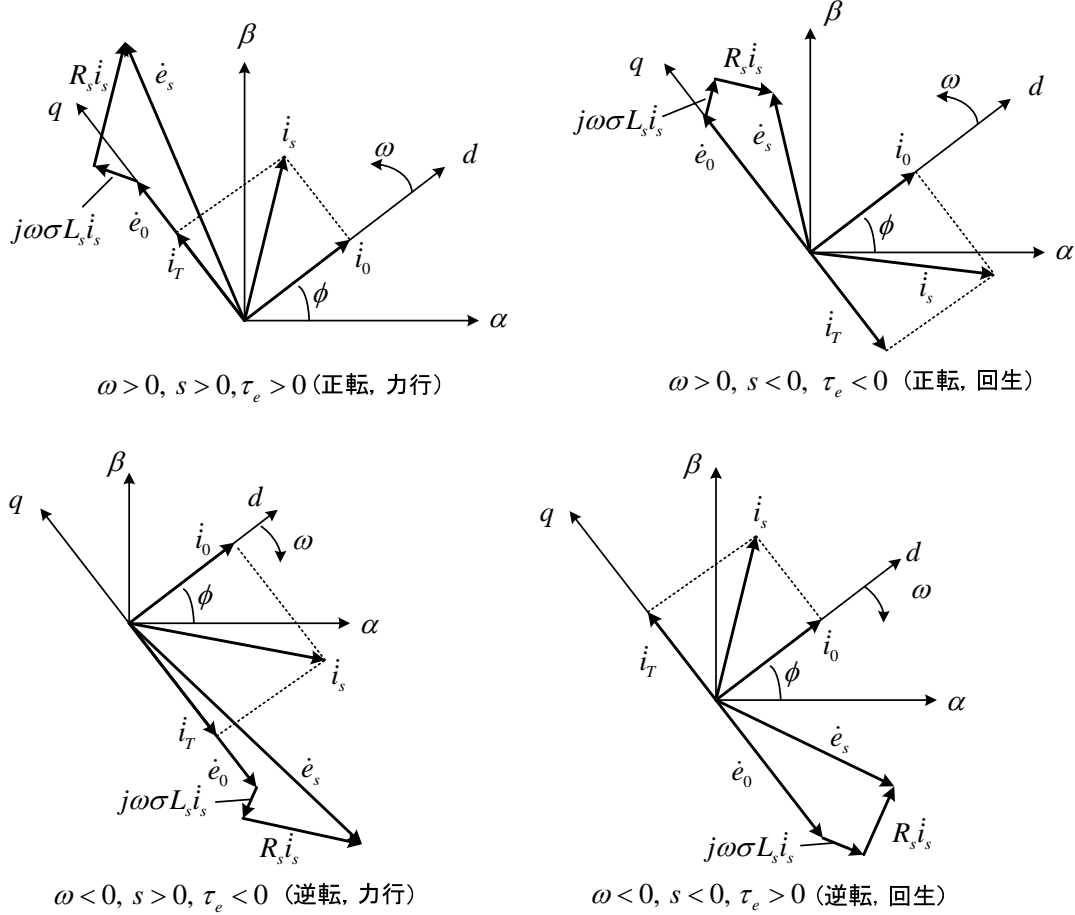


図 a1-8 定常時の空間ベクトル図

空間ベクトルによる定常時の T-I 形等価回路より、 \dot{i}_0 、 \dot{i}_T は次式となる。

$$\dot{i}_0 = \frac{L_r \dot{e}_0}{j\omega M^2} \equiv I_0 e^{j\phi} \quad (I_0 > 0 \text{ と置く。 } I_0 = \sqrt{3} |\dot{i}_0|) \quad (\text{a1-52})$$

$$\dot{i}_T = \frac{s L_r^2 \dot{e}_0}{M^2 R_r} \quad (\text{a1-53})$$

(a1-52), (a1-53)より

$$\frac{\dot{i}_T}{\dot{i}_0} = j \frac{s\omega L_r}{R_r} \quad \therefore \dot{i}_T = j \frac{s\omega L_r}{R_r} \dot{i}_0 \quad (\text{a1-54})$$

d - q 軸の空間ベクトル $\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_{sd} + j\dot{i}_{sq}$ を考える。 d 軸を \dot{i}_0 の方向に選ぶと

$$\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_s e^{-j\phi} = (\dot{i}_0 + \dot{i}_T) e^{-j\phi} = (1 + j \frac{s\omega L_r}{R_r}) \dot{i}_0 e^{-j\phi} = (1 + j \frac{s\omega L_r}{R_r}) I_0 \quad (\text{a1-55})$$

ゆえに、

$$i_{sd} = I_0, \quad i_{sq} = \frac{s\omega L_r}{R_r} I_0 \quad (\text{a1-56})$$

(a1-56)より, すべり角周波数は次式となる。

$$\omega_{sl} = s\omega = \frac{R_r i_{sq}}{L_r i_{sd}} \quad (\text{a1-57})$$

定常時の発生トルクは(a1-50)より(a1-54)を用いて次式となる。

$$\tau_e = \frac{P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} \cdot \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 |i_T|^2 = \frac{P}{2} \cdot \frac{s\omega M^2 I_0^2}{R_r} = \frac{P}{2} \cdot \frac{M^2 i_{sd} i_{sq}}{L_r} \quad (\text{a1-58})$$

(a1-58)は一般的な式で制御に関係しない。ベクトル制御だから成り立つ訳ではない。ただし, $d-q$ 量は d 軸を i_0 の方向に選んだときの量であるから, その方向が判らなると i_{sd}, i_{sq} を知ることができない。

○ 一次電流, 二次鎖交磁束を用いた空間ベクトルモデル (その1)

$$\text{二次鎖交磁束: } \psi_r = M i_s + L_r i_r \quad (\text{a1-59})$$

電圧方程式:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p + j\omega \sigma L_s & \frac{M}{L_r} (p + j\omega) \\ -\frac{M}{\tau_r} & \frac{1}{\tau_r} + p + j(\omega - \omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \end{bmatrix} \quad (\text{a1-60})$$

ここで, \dot{e}_s についての 1 行目の式を**電圧モデル**, \dot{e}_r についての 2 行目の式を**電流モデル**と呼ぶことがある。

$$\text{トルク: } \tau_e = \frac{P M}{2 L_r} \text{Im}(i_s \psi_r^*) \quad (\text{a1-61})$$

状態方程式:

$$p \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_s} - \frac{M^2}{\sigma L_s L_r \tau_r} - j\omega & \frac{M}{\sigma L_s L_r} \left(\frac{1}{\tau_r} - j\omega_r\right) \\ \frac{M}{\tau_r} & -\frac{1}{\tau_r} - j(\omega - \omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{e}_s \quad (\text{a1-62})$$

(a1-62)の 1 行目には, 2 行目が代入されているので, 1 行目を電圧モデルとは呼ばない。

○ 一次電流, 二次鎖交磁束を用いた空間ベクトルモデル (その2)

二次鎖交磁束 (T-I 形回路に基づく):

$$\psi_R \equiv \frac{M}{L_r} \psi_r = \frac{M^2}{L_r} i_s + M i_r \quad (\text{a1-63})$$

電圧方程式:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p + j\omega \sigma L_s & p + j\omega \\ -\frac{M}{\tau_r} & \frac{L_r}{M} \left\{ \frac{1}{\tau_r} + p + j(\omega - \omega_r) \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_R \end{bmatrix} \quad (\text{a1-64})$$

$\dot{e}_r = 0$ として、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p + j\omega\sigma L_s & p + j\omega \\ -(\frac{M}{L_r})^2 R_r & \frac{1}{\tau_r} + p + j(\omega - \omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_R \end{bmatrix} \quad (\text{a1-65})$$

静止座標系では $\omega = 0$ として、

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & p \\ -(\frac{M}{L_r})^2 R_r & \frac{1}{\tau_r} + p - j\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_R \end{bmatrix} \quad (\text{a1-66})$$

これは、図の **T-I 形過渡回路(静止座標系)** に対応している。以下の関係式が成立する。

$$\dot{\psi}_R = \frac{M^2}{L_r} \dot{i}_0, \quad \dot{i}_T = -\frac{L_r}{M} \dot{i}_r, \quad \dot{i}_s = \dot{i}_0 + \dot{i}_T \quad (\text{a1-67})$$

$$\dot{e}_0 \equiv p\dot{\psi}_R = j\omega_r \dot{\psi}_R + (\frac{M}{L_r})^2 R_r \dot{i}_T \quad (\text{a1-68})$$

(a1-67)は、(a1-63)を満たしている。(a1-68)は、(a1-66)を満たす。

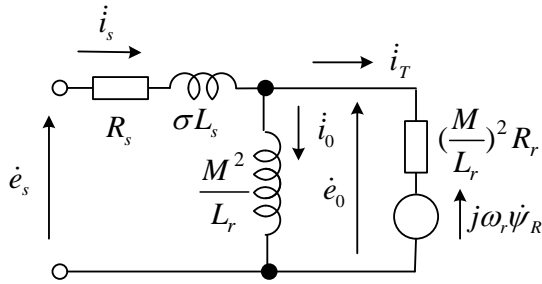
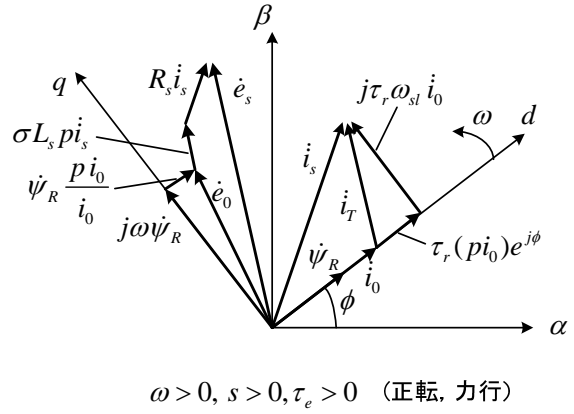


図 a1-9 T-I 形過渡等価回路 ((a1-66))



$\omega > 0, s > 0, \tau_e > 0$ (正転, 力行)

図 a1-10 過渡時の空間ベクトル図

過渡時の空間ベクトル図を求めるにあたり、

$$\dot{i}_0 = i_0 e^{j\phi}, \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad \omega_{sl} = \omega - \omega_r \quad (\text{a1-69})$$

とおく。ただし、 $i_0 > 0$ (一定とは限らない)。このとき、(a1-68)より

$$\begin{aligned} p\left(\frac{M^2}{L_r} \dot{i}_0\right) &= j\omega_r \frac{M^2}{L_r} \dot{i}_0 + (\frac{M}{L_r})^2 R_r \dot{i}_T \\ \frac{M^2}{L_r} (p i_0) e^{j\phi} + \frac{M^2}{L_r} j\omega \dot{i}_0 &= j\omega_r \frac{M^2}{L_r} \dot{i}_0 + (\frac{M}{L_r})^2 R_r \dot{i}_T \\ \therefore \dot{i}_T &= \frac{L_r}{R_r} (p i_0) e^{j\phi} + \frac{L_r}{R_r} j\omega_{sl} \dot{i}_0 \end{aligned} \quad (\text{a1-70})$$

d 軸を \dot{i}_0 の方向に選ぶとき、 d - q 軸の空間ベクトル $\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_{sd} + j\dot{i}_{sq}$ を考える。

$$\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_s e^{-j\phi} = (\dot{i}_0 + \dot{i}_T) e^{-j\phi} = i_0 + \frac{L_r}{R_r} (p i_0) + j \frac{L_r}{R_r} \omega_{sl} \dot{i}_0 \quad (\text{a1-71})$$

$$\text{ゆえに, } i_{sd} = i_0 + \frac{L_r}{R_r} p i_0, \quad i_{sq} = \frac{\omega_{sl} L_r}{R_r} i_0 \quad (\text{a1-72})$$

(a1-72)より, すべり角周波数は次式となる。

$$\omega_{sl} = s \omega = \frac{R_r i_{sq}}{L_r i_0} \quad (\text{a1-73})$$

過渡時の発生トルクは, (a1-67)を用いて次式となる。

$$\tau_e = \frac{P}{2} \text{Im}(i_s \psi_R^*) = \frac{P}{2} \cdot \frac{M^2 \omega_{sl} i_0^2}{R_r} = \frac{P}{2} \cdot \frac{M^2 i_0 i_{sq}}{L_r} \quad (\text{a1-74})$$

(a1-74)は一般的な式で制御に関係しない。ただし, d - q 量は d 軸を i_0 の方向に選んだときの量である。状態方程式は

$$p \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_s} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 R_r - j\omega & \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{1}{\tau_r} - j\omega_r\right) \\ \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 R_r & -\frac{1}{\tau_r} - j(\omega - \omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{e}_s \quad (\text{a1-75})$$

定常状態では, (a1-66)で $p = j\omega$ とおいて, (a1-68)より

$$j\omega \psi_R = j\omega_r \psi_R + \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 R_r \dot{i}_T \quad \therefore \quad j(\omega - \omega_r) \psi_R = \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 R_r \dot{i}_T$$

$$\frac{j\omega \psi_R}{\dot{i}_T} = \frac{\omega}{\omega - \omega_r} \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 R_r = \frac{R_r}{s} \left(\frac{M}{L_r}\right)^2 \quad (\text{等価インピーダンス})$$

となり, 定常時の **T-I 形回路** が得られる。(あるいは(a1-65)で $p = 0$ とおく)

○ Q軸との成す角を θ とした場合 (平成 23 年度まで使用)

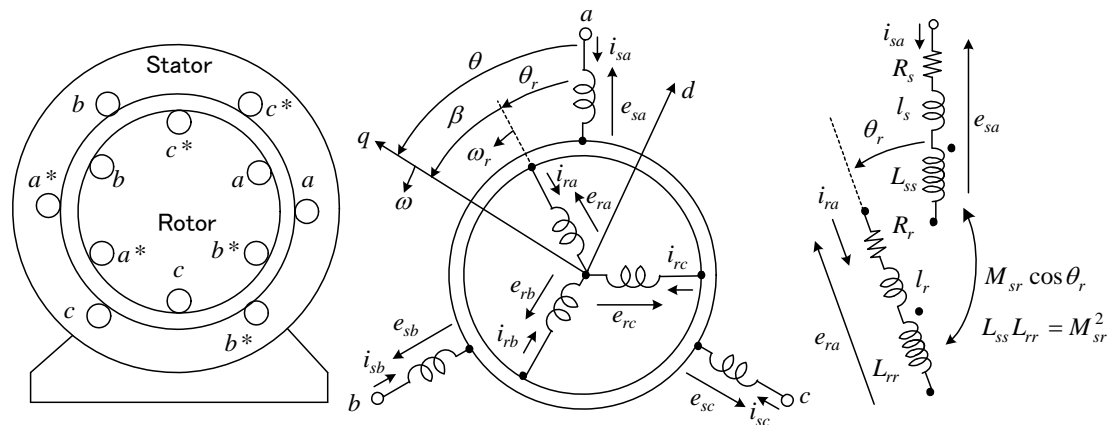


図 a1-11 旧 d - q 軸の定義

旧 d - q 回転座標系の定義

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \\ f_{s0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sin \theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \\ f_{r0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sin \beta & \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos \beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\beta = \theta - \theta_r$

空間ベクトル

空間ベクトルを得るには、固定子 a 相巻線軸と α 軸が一致するように選ぶ必要がある。図 a1-11 では $\theta = \pi/2$ に選ぶ必要がある。このとき $\alpha - \beta$ 静止軸（新旧同じ）から見た空間ベクトルは

$$\begin{aligned} \dot{f}_s &= f_{s\alpha} + j f_{s\beta} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} (f_{sa} + e^{j\frac{2\pi}{3}} f_{sb} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} f_{sc}) \end{aligned} \quad \text{①}$$

となる。①は、新旧同じである。

旧の $d-q$ 軸から見ると、次式が得られる。

$$\dot{f}_{sdq} = e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta)} \dot{f}_s \quad \therefore \quad \dot{f}_{sdq} = j e^{-j\theta} \dot{f}_s \quad (\text{旧 } d-q \text{ 量, } \theta \text{ は旧})$$

$$\dot{f}_{rdq} = e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta)} \dot{f}_r \quad (\dot{f}_r \text{ は } \alpha - \beta \text{ 軸から見るので新旧同じ})$$

$$\therefore \quad \dot{f}_{rdq} = j e^{-j\theta} \dot{f}_r \quad (\text{旧 } d-q \text{ 量, } \theta \text{ は旧})$$

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} \quad \text{逆に,} \quad \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix}$$

①式の空間ベクトルが得られるように、a 相巻線軸と α 軸を一致させる必要がある。従来、図 a1-11 のように $d-q$ 軸を定義したので、これと $\alpha - \beta$ 軸との関係は図 a1-12 のようになる。しかし、上記の旧座標系はベクトル制御の説明で d 軸方向に磁束の方向をとるとき、“磁束が θ 方向を向いている”と言えないので、綺麗でない。また、 $\theta = \pi/2$ として静止座標系を定義しないと空間ベクトルにならない。さらに同期機の解析モデルとも合わない。よって、 d 軸と a 相巻線軸のなす角を θ として座標変換することにした。もちろん、モータの式は同じで、変換式のみが異なるだけである。新 $d-q$ の θ や β は、旧 $d-q$ の θ や β に比べ 90 度小さいので、旧 $\theta = \text{新 } \theta + \pi/2$ 、旧 $\beta = \text{新 } \beta + \pi/2$ とすればよい。

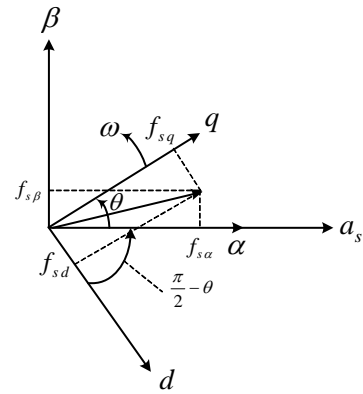


図 a1-12 旧 $d-q$ 軸