

付録2 誘導機ベクトル制御系の構成と解析

Configuration and analysis of Induction Motor Vector Control System

○ 磁束の方向を演算により求めるベクトル制御 (静止座標系でのモデル利用)

Vector Control by computing the direction of rotor flux ($\alpha - \beta$ model in stationary reference frame is used.)

ホール素子により磁束を検出してベクトル制御を行う方式は、電動機が非標準となること、センサの信頼性に問題があることから実際にはほとんど使われていない。

そこで、磁束の方向を誘導機のモデルを使って演算するベクトル制御について説明しよう。誘導機のモデルは静止座標系と回転座標系いろいろある。まず静止座標系でのモデルを用いる方法を説明しよう。なおベクトル制御の解説を文献(55)で行った。

静止座標系での誘導機の式は(3-19)より次式で与えられる。

$\alpha - \beta$ model of induction motor in stationary reference frame

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & 0 & Mp/L_r & 0 \\ 0 & R_s + \sigma L_s p & 0 & Mp/L_r \\ -\frac{M}{\tau_r} & 0 & \frac{1}{\tau_r} + p & \omega_r \\ 0 & -\frac{M}{\tau_r} & -\omega_r & \frac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-1})$$

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad \tau_r = \frac{L_r}{R_r}$$

$e_{s\alpha}, e_{s\beta}$ の1,2行目の式を**電圧モデル**(1,2 rows are called voltage model), 電圧の関係しない3,4行目の式を**電流モデル**(3,4 rows are called current model)と呼ぶ。電圧モデルと電流モデルのいずれかにおいても、**二次鎖交磁束(回転子鎖交磁束)** $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ は演算できるが、通常は電流モデルを使用するのでこの方法を示そう。

(a2-1)の3,4行目より、(Current Model is used to compute the rotor flux linkage)

$$p\psi_{r\alpha} = -\frac{\psi_{r\alpha}}{\tau_r} - \omega_r \psi_{r\beta} + \frac{M}{\tau_r} i_{s\alpha} \quad (\text{a2-2})$$

$$p\Psi_{r\beta} = -\frac{\Psi_{r\beta}}{\tau_r} + \omega_r\Psi_{r\alpha} + \frac{M}{\tau_r}i_{s\beta} \quad (\text{a2-3})$$

(a2-2), (a2-3)を制御用のコンピュータ上でオイラー法や台形公式を用いて解くと $\Psi_{r\alpha}, \Psi_{r\beta}$ が計算できる。このとき、 $i_{s\alpha}, i_{s\beta}, \omega_r$ はセンサで検出する。 $\Psi_{r\alpha}, \Psi_{r\beta}$ を用いて、**磁束の向き θ** は次式より求まる。

The direction of rotor flux linkage is computed by

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\Psi_{r\beta}}{\Psi_{r\alpha}} \quad (\text{a2-4})$$

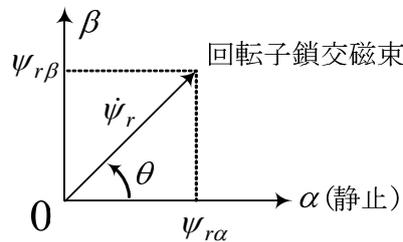


図 a2-1 二次鎖交磁束

(a2-2), (a2-3)の二次磁束演算, (a2-4)の磁束の方向演算によるベクトル制御系の構成を以下に示す。

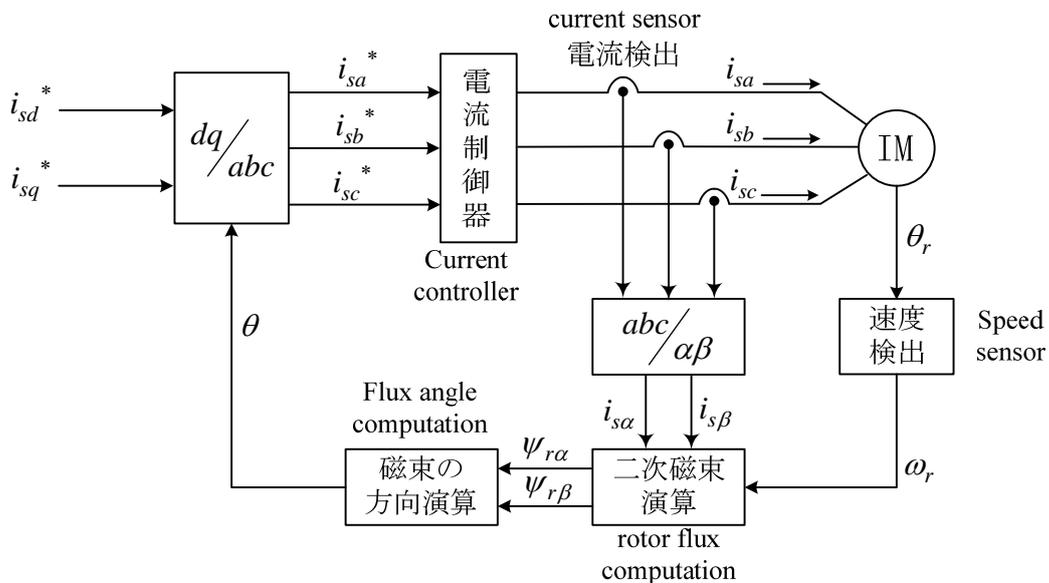


図 a2-2 磁束演算によるベクトル制御 (静止座標系の電流モデル利用)

Vector control system using $\alpha - \beta$ axis current model.

ここで、 $dq/abc, abc/\alpha\beta$ は次式の座標変換 (coordinate transformation) である。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} \quad (\text{a2-5})$$

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-6})$$

○ 磁束の方向を演算により求めるベクトル制御
(回転座標系でのモデル利用)

Vector Control by computing the direction of rotor flux ($d-q$ model in rotating reference frame is used.)

二次鎖交磁束を d 軸に一致させ、磁束と共に回転する座標系を考える。変換式は、

We choose d axis which is on the direction of rotor flux computed by (a2-4). The transformation is

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-7})$$

f は e, i, ψ を意味する。

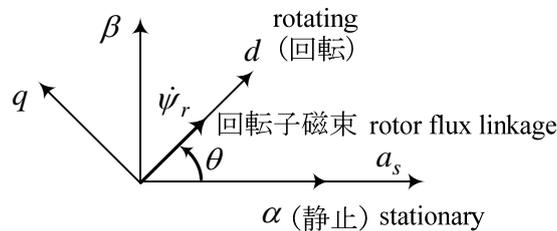


図 a2-3 $d-q$ 回転座標系の定義

一方、 $f_{s\alpha}, f_{s\beta}$ 及び $f_{r\alpha}, f_{r\beta}$ を求める式は、

$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-8})$$

(a2-8)を(a2-2), (a2-3)に代入して, 次式が得られる。

By substituting (a2-8) into (a2-2) and (a2-3), we have

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sd} + \left(\frac{1}{\tau_r} + p\right) \psi_{rd} - (\omega - \omega_r) \psi_{rq} \quad (\text{a2-9})$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sq} + (\omega - \omega_r) \psi_{rd} + \left(\frac{1}{\tau_r} + p\right) \psi_{rq} \quad (\text{a2-10})$$

$$\text{但し, } p \theta = \omega \quad (\text{a2-11})$$

ところで, (a2-7)より,

$$\psi_{rq} = -\psi_{r\alpha} \sin \theta + \psi_{r\beta} \cos \theta$$

である。From (a2-4), $\sin \theta$, $\cos \theta$ are substituted into above equation, then

$$\begin{aligned} \psi_{rq} &= -\psi_{r\alpha} \cdot \frac{\psi_{r\beta}}{\sqrt{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2}} + \psi_{r\beta} \cdot \frac{\psi_{r\alpha}}{\sqrt{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{a2-12})$$

となる。磁束の方向を d 軸に一致させたのだから当然のことなのだが, 確認ができた。

By substituting (a2-12) into (a2-9) and (a2-10), we have

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sd} + \frac{1}{\tau_r} \psi_{rd} + p \psi_{rd} \quad (\text{a2-13})$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sq} + (\omega - \omega_r) \psi_{rd} \quad (\text{a2-14})$$

(a2-14)より,

$$\omega = \omega_r + \frac{M}{\tau_r \psi_{rd}} i_{sq} \quad (\text{a2-15})$$

であり, (a2-11)より次式で θ が計算できる。

$$\theta = \int \omega dt = \int \left(\omega_r + \frac{M}{\tau_r \psi_{rd}} i_{sq} \right) dt \quad (\text{a2-16})$$

この場合の制御系を以下に示す。これは図 a2-2 の制御系で、演算した θ を用いて、二次磁束演算の部分を書き変えたものである。

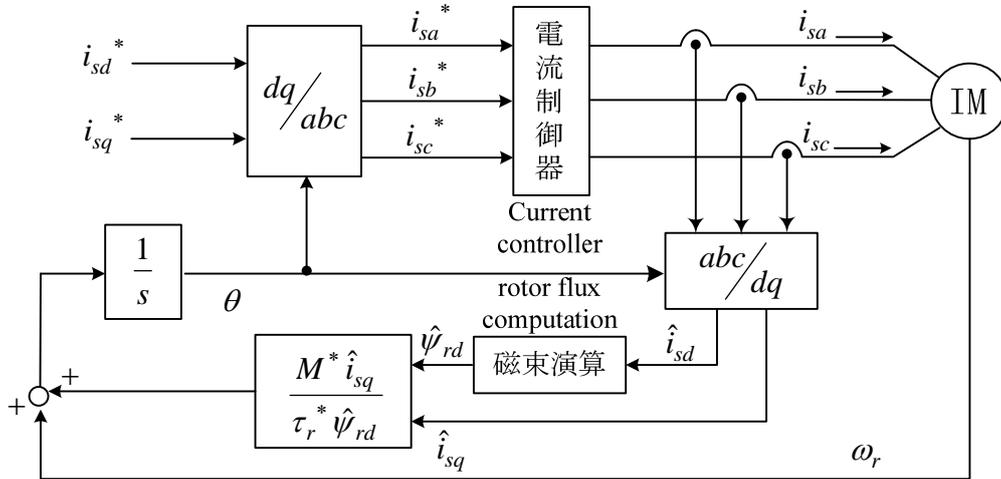


図 a2-4 磁束演算によるベクトル制御（回転座標系のモデル利用）

Vector control system using current model in d - q axis.

図中、定数には* ，変数には^（ハット）をつけている。これは、制御系の定数と実際のモータの定数を区別するためである。たとえば、温度変化で τ_r が変化したりすることがある。また、(a2-13)より磁束の演算(Flux control)は次式で行う。

$$p\hat{\psi}_{rd} = -\frac{\hat{\psi}_{rd}}{\tau_r^*} + \frac{M^*}{\tau_r^*}\hat{i}_{sd} \quad (\text{a2-17})$$

電流制御が理想的で $i_{sa}^* = i_{sa}$, $i_{sb}^* = i_{sb}$, $i_{sc}^* = i_{sc}$ なら、同じ座標変換を用いているから、 $i_{sd}^* = \hat{i}_{sd}$, $i_{sq}^* = \hat{i}_{sq}$ となり、 \hat{i}_{sd} , \hat{i}_{sq} の代わりに i_{sd}^* , i_{sq}^* が利用できる。この結果、図 a2-5 の滑り周波数制御形ベクトル制御が得られる。図 a2-5 で、2相/3相変換 (dq/abc) は次式で演算する。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta^* & -\sin \theta^* \\ \cos(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} \quad (\text{a2-18})$$

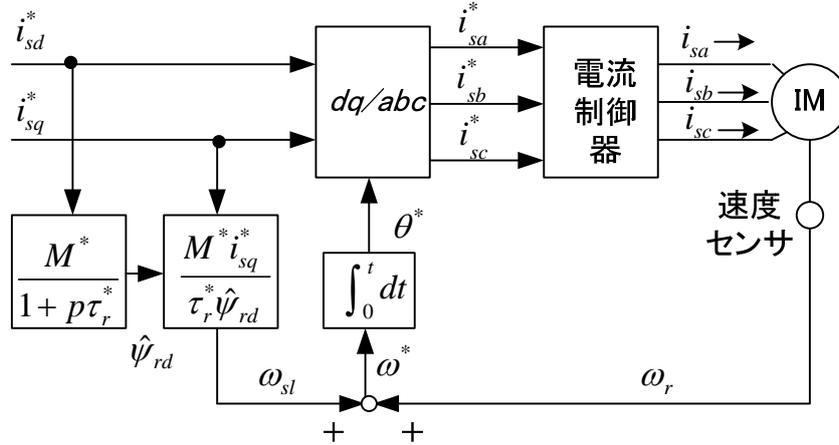


図 a2-5 滑り周波数制御形ベクトル制御 (slip frequency type vector control)

○ ベクトル制御システムの解析 (analysis of vector control system)

図 a2-5 のシステムを解析する。解析するとき、実際の誘導モータ (IM) (制御器でなく) をどのような座標系で解析するか決める必要がある。静止, 回転座標なんでもよいが, 2 軸理論の図 3-1 の θ として, 図 a2-5 の θ^* を選ぶ。すなわち $\theta = \theta^*$ とし θ^* に同期して回転する座標系を選ぶことにする。このとき実際の IM の電流についての変換行列は

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta^* & \cos(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta^* & -\sin(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-19})$$

であり, 図 a2-5 の IM は(3-17)より次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & -\omega^* \sigma L_s & \frac{M}{L_r} p & -\frac{\omega^* M}{L_r} \\ \omega^* \sigma L_s & R_s + \sigma L_s p & \frac{\omega^* M}{L_r} & \frac{M}{L_r} p \\ -\frac{M}{\tau_r} & 0 & \frac{1}{\tau_r} + p & -(\omega^* - \omega_r) \\ 0 & -\frac{M}{\tau_r} & \omega^* - \omega_r & \frac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} \quad (\text{a2-20})$$

電流制御は理想的として, 次式を仮定する。

$$i_{sa}^* = i_{sa}, i_{sb}^* = i_{sb}, i_{sc}^* = i_{sc} \quad (\text{a2-21})$$

この結果, (a2-18), (a2-19), (a2-21)より次式が成立する。

$$\dot{i}_{sd}^* = i_{sd}, \dot{i}_{sq}^* = i_{sq} \quad (\text{a2-22})$$

パラメータは正確に推定されているとして $M^* = M, \tau_r^* = \tau_r$ と仮定する。このとき図 a2-5 よりすべり角周波数は次式となる。

$$\omega^* - \omega_r = \frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}} \quad (\text{a2-23})$$

図 a2-5 で i_{sd}^* と $\hat{\psi}_{rd}$ には, 以下の関係がある。

$$p\hat{\psi}_{rd} + \frac{1}{\tau_r}\hat{\psi}_{rd} = \frac{M}{\tau_r}i_{sd}^* \quad (\text{a2-24})$$

(a2-22), (a2-23)を(a2-20)の 3,4 行目に代入して次式が得られる。

$$\frac{M}{\tau_r}i_{sd}^* = p\psi_{rd} + \frac{\psi_{rd}}{\tau_r} - \frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\psi_{rq} \quad (\text{a2-25})$$

$$\frac{M}{\tau_r}i_{sq}^* = p\psi_{rq} + \frac{\psi_{rq}}{\tau_r} + \frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\psi_{rd} \quad (\text{a2-26})$$

i_{sd}^* と i_{sq}^* を自由に与えて, (a2-24), (a2-25), (a2-26)式を解けば良い。 i_{sd}^* が変化すると(a2-24) だけに関係して $\hat{\psi}_{rd}$ が変化する。そのままでは解きにくいので,

$$\dot{\psi}_r = \psi_{rd} + j\psi_{rq} \quad (\text{a2-27})$$

とおく。(a2-25)+j(a2-26) を考えて次式が得られる。

$$p\dot{\psi}_r + \left(\frac{1}{\tau_r} + j\frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\right)\dot{\psi}_r = \frac{M}{\tau_r}(i_{sd}^* + j i_{sq}^*) \quad (\text{a2-28})$$

$\hat{\psi}_r = \hat{\psi}_{rd} + j\hat{\psi}_{rq}$ ($\hat{\psi}_{rq} = 0$) として,

$$\Delta\dot{\psi}_r = \dot{\psi}_r - \hat{\dot{\psi}}_r = \psi_{rd} + j\psi_{rq} - \hat{\psi}_{rd} \quad (\text{a2-29})$$

の**誤差方程式**を求める。(a2-28)から(a2-24)を引くことにより次式が得られる。

$$p\Delta\dot{\psi}_r + \left(\frac{1}{\tau_r} + j\frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\right)\Delta\dot{\psi}_r = 0 \quad (\text{a2-30})$$

ここで、 i_{sd}^* （よって $\hat{\psi}_{rd}$ ）と i_{sq}^* は時間の関数として自由に変化させる量であり、一般的な線形変係数の微分方程式の公式を利用して解かなくてはならない。

$$\text{公式} \quad \frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t)$$

$$\text{一般解} \quad x(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds} \left[\int_0^t b(s)e^{\int_0^s a(t)dt} ds + x(0) \right]$$

これより、

$$\int_0^t a(t) dt = \frac{t}{\tau_r} + j \int_0^t \frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}} dt = \frac{t}{\tau_r} + j\theta_f \quad \text{但し,} \quad \theta_f = \int_0^t \frac{M i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}} dt$$

とおくと、次式が得られる。

$$\psi_r(t) = \hat{\psi}_{rd}(t) + \{\psi_r(0) - \hat{\psi}_{rd}(0)\} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r} - j\theta_f\right) \quad (\text{a2-31})$$

(a2-31)を実部と虚部に分けて次式が得られる。

$$\psi_{rd}(t) = \hat{\psi}_{rd}(t) + \{\psi_{rd}(0) - \hat{\psi}_{rd}(0)\} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \cos \theta_f + \psi_{rq}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \sin \theta_f \quad (\text{a2-32})$$

$$\psi_{rq}(t) = \psi_{rq}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \cos \theta_f - \{\psi_{rd}(0) - \hat{\psi}_{rd}(0)\} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \sin \theta_f \quad (\text{a2-33})$$

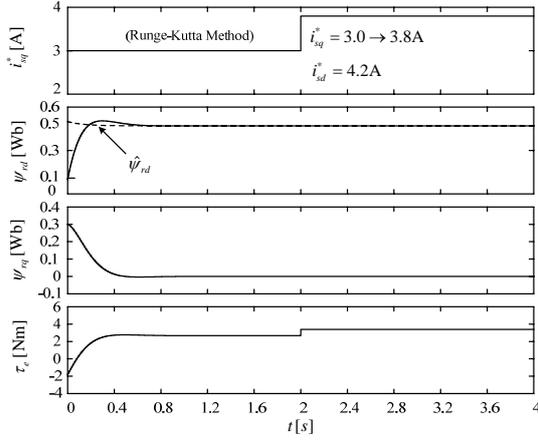
この制御を始めてしばらく（数秒）すると、 i_{sd}^* 、 i_{sq}^* の変化に関係なく次式が成立する。

$$\psi_{rd}(t) = \hat{\psi}_{rd}(t), \quad \psi_{rq}(t) = 0 \quad (\text{a2-34})$$

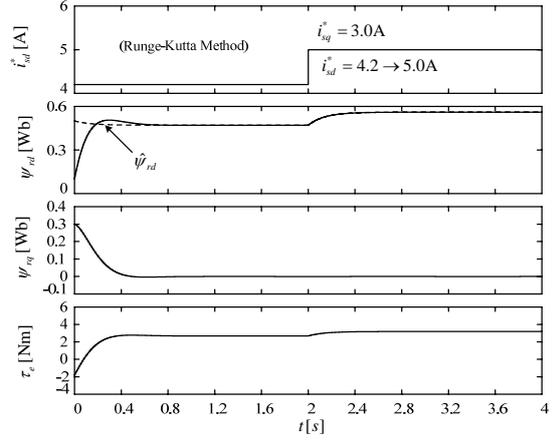
トルクは(3-20)より、(a2-34)が成り立つとき

$$\tau_e = \frac{PM}{2L_r} \hat{\psi}_{rd} i_{sq}^* \quad (\text{a2-35})$$

となる。つまりトルクに過渡現象が起きるのは始動時のみで、その後はたとえ i_{sd}^* 、 i_{sq}^* が変化しても(a2-35)は常に成立することが判る。ある初期値に対し、(a2-24)～(a2-26)を Runge-Kutta 法で解いた結果は図 a2-6 であり、(a2-32)、(a2-33)の結果と一致することを確認している。また、(a2-34)で述べたことが確認できる。すなわち2秒後からの d 軸磁束の変化は、制御器側の磁束の指令値の変化に追従している。従って、実際の運転では始動時に励磁電流 i_{sd}^* のみを流して磁束を確立し、数秒後から i_{sd}^* 、 i_{sq}^* を変化させる。



(a) トルク電流指令のステップ変化



(b) 励磁電流指令のステップ変化

図 a2-6 ベクトル制御系の過渡応答

ベクトル制御の定常解析(steady-state analysis)を行って、相電圧の実効値 E_s 、相電流の実効値 I_s とトルクとの関係を求めておく。(a2-22), (a2-34)を(a2-20)に代入する。回転座標系なので定常状態では $p = 0$ として、 $\hat{\psi}_{rd} = M i_{sd}^*$ (一定) であるから

$$e_{sd} = R_s i_{sd}^* - \omega^* \sigma L_s i_{sq}^* \quad (\text{a2-36})$$

$$e_{sq} = \omega^* \sigma L_s i_{sd}^* + R_s i_{sq}^* + \omega^* M^2 i_{sd}^* / L_r = \omega^* L_s i_{sd}^* + R_s i_{sq}^* \quad (\text{a2-37})$$

(a2-23)より、 $i_{sq}^* = s \omega^* L_r i_{sd}^* / R_r$ だから、(a2-36), (a2-37)に代入し、 $E_s = \sqrt{e_{sd}^2 + e_{sq}^2} / \sqrt{3}$ より

$$(\sqrt{3}E_s)^2 = e_{sd}^2 + e_{sq}^2 = (R_s - \omega^* \sigma L_s s \omega^* \frac{L_r}{R_r})^2 i_{sd}^{*2} + (\omega^* L_s + R_s s \omega^* \frac{L_r}{R_r})^2 i_{sd}^{*2}$$

(a2-35)より

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{PM^2}{2L_r} s \omega^* \frac{L_r}{R_r} i_{sd}^{*2} = \frac{PM^2}{2L_r} s \omega^* \frac{L_r}{R_r} \frac{3E_s^2}{(R_s - \omega^* \sigma L_s s \omega^* \frac{L_r}{R_r})^2 + (\omega^* L_s + R_s s \omega^* \frac{L_r}{R_r})^2} \\ &= \frac{3P}{2} \cdot \frac{\omega^* M^2 s R_r E_s^2}{\Delta_0} \end{aligned} \quad (\text{a2-38})$$

ただし、 $\Delta_0 = s^2 \omega^{*2} L_r^2 (\omega^{*2} L_s^2 \sigma^2 + R_s^2) + 2R_s R_r \omega^{*2} M^2 s + R_r^2 (\omega^{*2} L_s^2 + R_s^2)$
これは(a1-51)と一致する。相電流は

$$I_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{i_{sd}^{*2} + i_{sq}^{*2}} = E_s \sqrt{\frac{R_r^2 + (s \omega^* L_r)^2}{\Delta_0}} \quad (\text{a2-39})$$

これらの式は、ベクトル制御に限らず一般の誘導機で成立する。すなわち、定常時の電圧、電流、トルク、すべり等の関係はベクトル制御でも変わることはない。