

付録6 同期機のインダクタンスとトルク

同期機の電圧，電流，トルクの時間的変化は Park の式を基に計算できた。しかし，Park の式を導く際に使用したインダクタンスについては不明のままであった。また，モータの巻線，磁束密度など空間的分布についてはあまり議論していなかった。さらにトルクがどのように計算できるかも示していなかった。ここでは以上のことを詳しく述べよう。この際，巻線の巻き方が問題になるが，話を単純化するため正弦波の絶対値の数に従って巻かれている**正弦波分布巻線**を考える。詳しく論じた文献は意外に少ないので本稿は貴重なものとなるだろう。空間ベクトルの物理的意味を考える上で役立つ**物理空間モデル**を定義している。磁束についてはこの定義は既になされていたが，電流密度分布などに拡張している。

○ 磁束密度の計算

固定子 a 相巻線に電流 i_a を流したとき，a 相巻線の鎖交磁束 ψ_{aa} を求めることで，自己インダクタンス L_{aa} が求まる。まず， i_a によるエアギャップの磁束密度を求める。図 a6-1 の同期機で，各相の巻線（巻数 N_s ）は正弦波の絶対値に相当する数が図 a6-2 のように巻かれているとする。従って，巻数分布は， $(N_s/P)|\sin\theta|$ で表わせる。角度 θ, α, θ_r は電気角で， P は極数である。全巻数は

$$\frac{P}{2} \int_0^\pi \frac{N_s}{P} \sin\theta d\theta = N_s \quad (\text{a6-1})$$

と確かめられる。図 a6-2(b) では，極数が 4 で，NS の 1 組に対して $N_s/2$ 回巻かれ，全体で N_s 回となる。

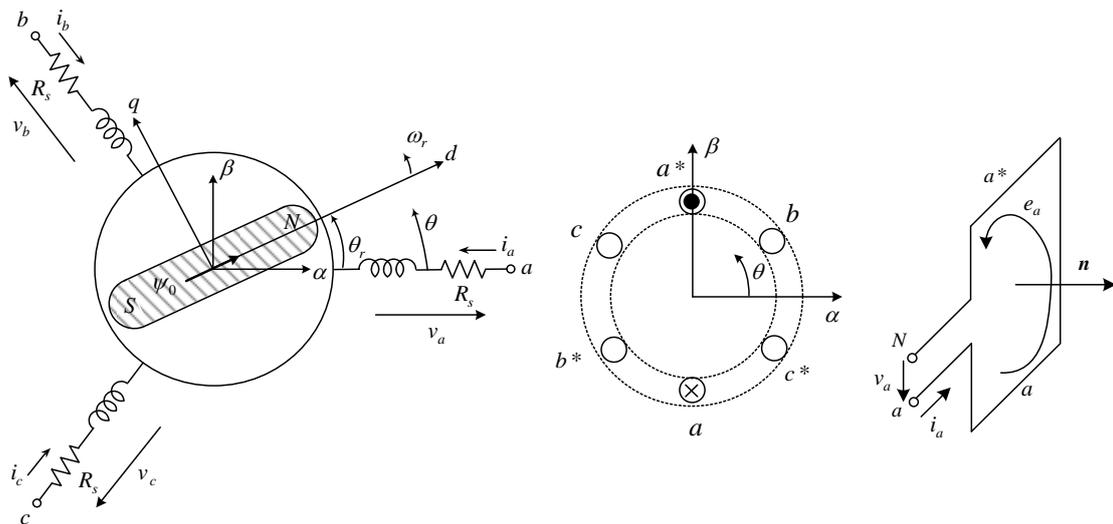


図 a6-1 同期機のモデル（2 極）

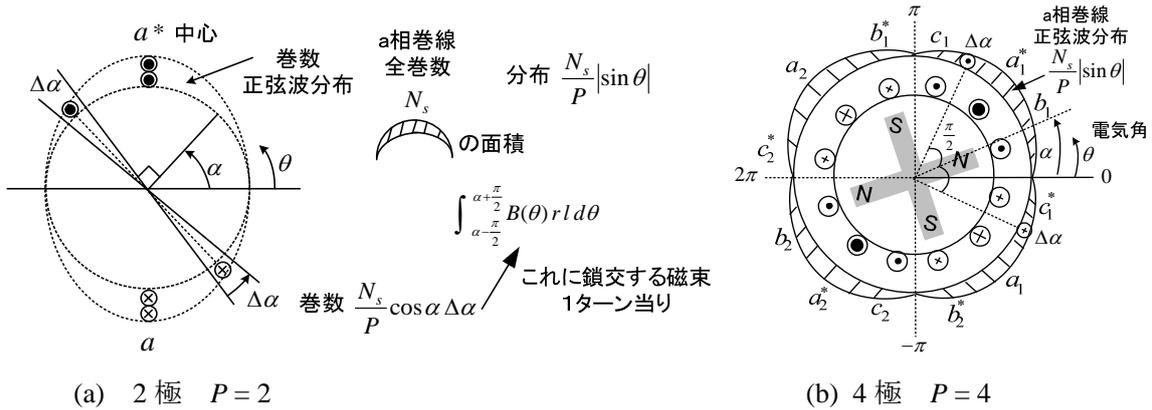


図 a6-2 正弦波分布巻線(sinusoidal distribution winding)⁽¹⁸⁾ (断面図)

図 a6-2 で $\Delta\alpha$ 部分の巻数は $\theta = \alpha + \pi/2$ として、 $\frac{N_s}{P} \left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right| \Delta\alpha = \frac{N_s}{P} |\cos\alpha| \Delta\alpha$ より求まる。

$$\frac{P}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{N_s}{P} \cos\alpha \, d\alpha = N_s \tag{a6-2}$$

である。この積分範囲の式を後で利用する。

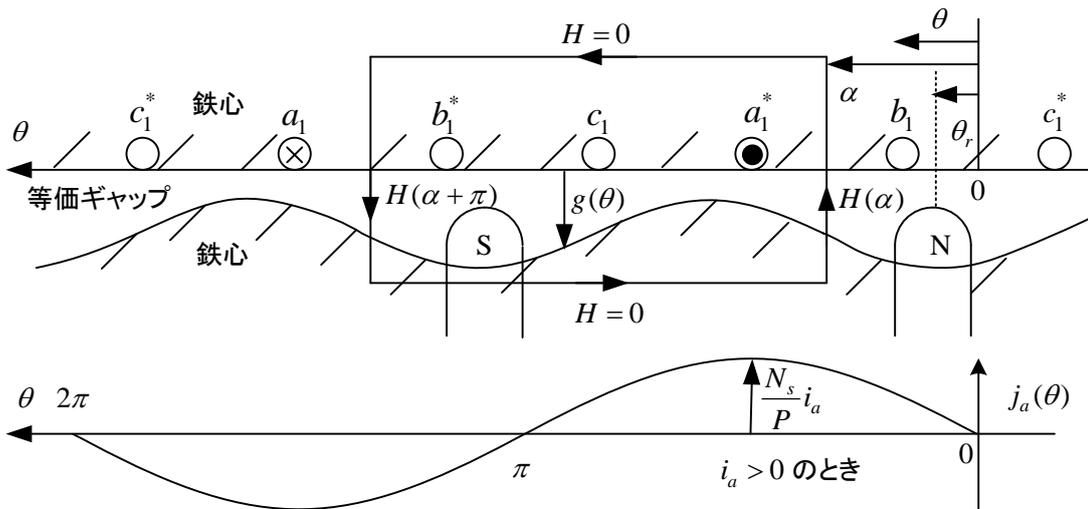


図 a6-3 アンペアの周回積分の法則

図 a6-3 に示すように、a 相巻線に電流 i_a を流したとき、巻線が図 a6-2 の様に正弦波状(sinusoidal distribution of a phase winding)に分布していると **電流密度分布 $j_a(\theta)$** (distribution of current density)⁽²⁵⁾は次式で与えられる。a 相巻線はどこも同じ i_a が流れ、巻数が多いところ程電流分布が大きくなる。b, c 相も同様。 θ は電気角である。

$$j_a(\theta) = \frac{N_s i_a}{P} \sin\theta, \quad j_b(\theta) = \frac{N_s i_b}{P} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \quad j_c(\theta) = \frac{N_s i_c}{P} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{a6-3}$$

$j_a(\theta)$ は単位電気角当りの電流で、電気角で積分すれば全電流が求まる。

(参考) 電流密度として、単位を A/m (円周 1m 当り) を j_m [A/m] とすると

$$j_a d\theta = j_m r \frac{2}{P} d\theta \quad \text{なので,} \quad j_a = j_m r \frac{2}{P} \quad (\text{a6-4})$$

文献 (32) では, この電流密度 j_m が用いられトルクが計算されている。

ギャップ長は回転子位置の複雑な関数であり, 永久磁石は空気と考えてよい。このため永久磁石同期機では, 磁極軸 (d 軸) の方が等価的にギャップ長は長いと考えられる。ギャップ長 $g(\theta)$ を次式で近似する (あとでギャップ長の逆数をとるので, この表現が便利である) ⁽¹⁹⁾。

$$g(\theta) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)} \quad (\text{a6-5})$$

$\theta = \theta_r, \theta = \theta_r + \pi$ でギャップ長は最大となり, $\theta = \theta_r + \frac{\pi}{2}, \theta = \theta_r + \frac{3}{2}\pi$ で最小となる。

$$g_{\max} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad g_{\min} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (\text{a6-6})$$

非突極では, $\alpha_2 = 0$ である。逆に

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{\max}} + \frac{1}{g_{\min}} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{\min}} - \frac{1}{g_{\max}} \right) \quad (\text{a6-7})$$

鉄心中の透磁率を無限大とすれば, 鉄心中では**磁界の強さ** H は 0 となる。ギャップ中の磁界は垂直方向成分のみと仮定し, 図 a6-3 の積分路に関し**アンペアの周回積分の法則**(Ampere's law) を適用すると次式を得る。右辺は積分路内の全電流である。

$$H(\alpha)g(\alpha) - H(\alpha + \pi)g(\alpha + \pi) = \int_{\alpha}^{\alpha + \pi} j_a(\theta) d\theta \quad (\text{a6-8})$$

対称性より (回転子側から固定子側向きが H の正の向きとする) $H(\alpha + \pi) = -H(\alpha)$, $g(\alpha + \pi) = g(\alpha)$ より

$$H(\alpha) = \frac{1}{2g(\alpha)} \int_{\alpha}^{\alpha + \pi} j_a(\theta) d\theta = \frac{N_s i_a}{P g(\alpha)} \cos \alpha \quad (\text{a6-9})$$

よって, **磁束密度** は次式で求められる。

$$B_a(\alpha) = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N_s i_a}{P g(\alpha)} \cos \alpha \quad (\text{a6-10})$$

i_a による α 地点における**起磁力**(magnetomotive force (MMF))⁽¹⁹⁾ $F_a(\alpha)$ は次式で与えられる。

$$F_a(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha + \pi} j_a(\theta) d\theta = \frac{N_s i_a}{P} \cos \alpha \quad (\text{a6-11})$$

巻線係数 k_w を用いた起磁力は, 次式となることがわかっている⁽⁶⁾。

$$F_a(\alpha) = \frac{4k_w N_s i_a}{\pi P} \cos \alpha \quad (\text{a6-12})$$

本稿で考えている**正弦波分布巻線**では, 巻線係数は次式⁽¹⁶⁾で与えられ, (a6-11)が得られる。

$$k_w = \frac{\pi}{4} \quad (\text{a6-13})$$

i_b, i_c による起磁力は次式となる。

$$F_b(\alpha) = \frac{N_s i_b}{P} \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{a6-14})$$

$$F_c(\alpha) = \frac{N_s i_c}{P} \cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{a6-15})$$

起磁力を用いると

$$B_a(\alpha) = \frac{\mu_0}{g(\alpha)} F_a(\alpha), \quad B_b(\alpha) = \frac{\mu_0}{g(\alpha)} F_b(\alpha), \quad B_c(\alpha) = \frac{\mu_0}{g(\alpha)} F_c(\alpha) \quad (\text{a6-16})$$

より磁束密度が求まる。(a6-3)と(a6-11)を比べると、電流分布と起磁力分布は電気角で $\pi/2$ の差がある。電磁気学では起磁力を単純に巻数×電流と考える教科書が多い。しかし、電気機器では起磁力の空間分布が考えられ、これはエアギャップで消費される起磁力として考えられている⁽¹⁶⁾。すなわち、(a6-8)の左辺の各項で、磁界の強さ×磁路長を起磁力という。(a6-11)では、磁界が図 a6-3 の様に 2 回エアギャップ中を通るので集めた電流の 1/2 になっている。

(a6-5)を(a6-10)に代入して、 i_a による角度 α 点でのエアギャップの磁束密度は

$$\begin{aligned} B_a(\alpha) &= \frac{\mu_0 N_s i_a}{P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\alpha - \theta_r)) \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 N_s i_a}{P} \left\{ \alpha_1 \cos \alpha - \frac{\alpha_2}{2} (\cos(3\alpha - 2\theta_r) + \cos(\alpha - 2\theta_r)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{a6-17})$$

b 相電流と c 相電流による磁束密度は起磁力の分布が変わるだけなのでそれぞれ次式となる。

$$B_b(\alpha) = \frac{\mu_0 N_s i_b}{P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\alpha - \theta_r)) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{a6-18})$$

$$B_c(\alpha) = \frac{\mu_0 N_s i_c}{P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\alpha - \theta_r)) \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{a6-19})$$

本稿の理論展開では電流密度分布を用いるので、起磁力を用いなくてもよいが、一般の電気機器の教科書では起磁力を基に理論が展開されているので、起磁力についても説明を加えた。

○ インダクタンスの計算

図 a6-2 の $\Delta\alpha$ の部分の巻線について1ターン当り鎖交する磁束 $\phi_a(\alpha)$ は、磁束密度を $B_a(\theta)$ 、回転子の半径を r 、鉄心の奥行き有効長を l とすると、

$$\phi_a(\alpha) = \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} B_a(\theta) r l \frac{2}{P} d\theta \quad (\text{a6-20})$$

である(図 a6-4 参照)。角度 θ は電気角であるが、磁束を求める場合には面積を掛けるので実際の周の長さすなわち機械角 $(2/P)d\theta$ を使う必要がある。 a 相巻線だけに電流を流した時の鎖交磁束 ψ_{aa} は、 $\Delta\alpha$ の部分の巻数を掛けて、 a 相の全巻線分を集めることで求められる。 l_s は漏れインダクタンスである。

$$\begin{aligned} \psi_{aa} &= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos \alpha \phi_a(\alpha) d\alpha + l_s i_a \\ &= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} B_a(\theta) r l \frac{2}{P} d\theta d\alpha + l_s i_a \\ &= \frac{N_s^2 r l \mu_0 i_a}{P^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \cos \theta (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)) d\theta d\alpha + l_s i_a \end{aligned}$$

$$= \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0 i_a}{P^2} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2} \cos 2\theta_r \right) + l_s i_a \quad (\text{a6-21})$$

$$(\text{注}) \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \cos \theta (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)) d\theta = 2\alpha_1 \cos \alpha + \frac{\alpha_2}{3} \cos(3\alpha - 2\theta_r) - \alpha_2 \cos(\alpha - 2\theta_r)$$

最初の積分範囲の $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ は巻数が正になる範囲で NS 一組の巻線を含むようにした。

(a6-21)は文献(19)の(1.5-25)と $P=2$ のとき一致する。しかし、一般の P に対する (1D-6) とは異なる。後述の L_1 のチェックから、(1D-6) は誤っているだろう。文献(35)は 2 極しか論じていない。日本の教科書では(a6-21)は見当たらないようである。

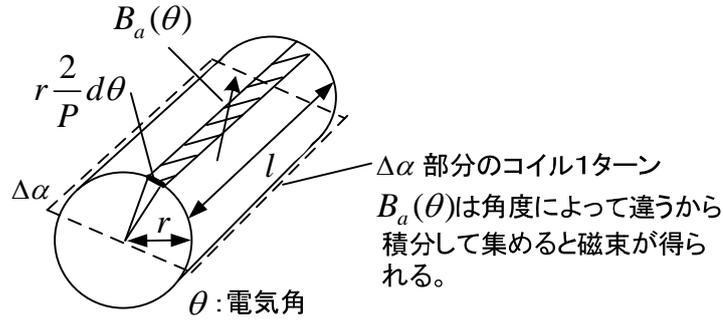


図 a6-4 機械寸法

$\theta_r = 0$ における**直軸インダクタンス**を L_{dd} , $\theta_r = \pi/2$ における**横軸インダクタンス**を L_{qq} とすれば,

$$L_{dd} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2} \right) + l_s \equiv L_{ddm} + l_s \quad (\text{a6-22})$$

$$L_{qq} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} \right) + l_s \equiv L_{qqm} + l_s \quad (\text{a6-23})$$

以上により, $\psi_{aa} = L_a i_a$ より

$$L_a = l_s + L_0 - L_m \cos 2\theta_r \quad (\text{a6-24})$$

$$\text{但し, } L_0 = \frac{L_{ddm} + L_{qqm}}{2} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2} \alpha_1 \quad (\text{a6-25})$$

$$L_m = \frac{L_{qqm} - L_{ddm}}{2} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2} \frac{\alpha_2}{2} \quad (\text{a6-26})$$

$$(\text{a5-29}) \text{より } L_1 = l_s + \frac{3L_0}{2}, \quad L_2 = \frac{3}{2} L_m \quad (\text{a6-27})$$

$$(\text{a5-36}) \text{より } L_d = L_1 - L_2 = \frac{3}{2} L_{ddm} + l_s, \quad L_q = L_1 + L_2 = \frac{3}{2} L_{qqm} + l_s \quad (\text{a6-28})$$

b 相については, θ_r が $2\pi/3$ で, c 相については, θ_r が $4\pi/3$ で, a 相の $\theta_r = 0$ 対応するので

$$L_b = l_s + L_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)) = l_s + L_0 - L_m \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{a6-29})$$

$$L_c = l_s + L_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{4}{3}\pi)) = l_s + L_0 - L_m \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{a6-30})$$

a 相巻線にのみ電流を流したとき, b 相巻線の鎖交磁束 ψ_{ba} は巻線の空間分布が異なるだけなので, 次式により求まる。

$$\begin{aligned}\psi_{ba} &= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi) \phi_a(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{N_s^2 r l \mu_0 i_a}{P^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi) \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \cos\theta (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)) d\theta d\alpha \\ &= \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0 i_a}{P^2} (-\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi))\end{aligned}\quad (\text{a6-31})$$

よって, $\psi_{ba} = M_{ab} i_a$ より

$$M_{ab} = -M_0 - L_m \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{a6-32})$$

ただし,

$$M_0 = L_0 / 2 \quad (\text{a6-33})$$

同様に考えて,

$$M_{bc} = -M_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) - \frac{2}{3}\pi) = -M_0 - L_m \cos 2\theta_r \quad (\text{a6-34})$$

$$M_{ca} = -M_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) - \frac{2}{3}\pi) = -M_0 - L_m \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{a6-35})$$

○ 電流による鎖交磁束

3 相電流

$$i_a = I(t) \cos \theta_i(t), \quad i_b = I(t) \cos(\theta_i(t) - \frac{2}{3}\pi), \quad i_c = I(t) \cos(\theta_i(t) + \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{a6-36})$$

が流れた場合の a 相巻線の鎖交磁束 ψ_a を求めよう。(a6-36)は(a5-21)などより**過渡状態でも成立**する。(a5-2)より

$$\begin{aligned}\psi_a &= L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ca} i_c \\ &= (l_s + L_0 - L_m \cos 2\theta_r) I(t) \cos \theta_i + (-M_0 - L_m \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi)) I(t) \cos(\theta_i - \frac{2}{3}\pi) \\ &\quad + (-M_0 - L_m \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi)) I(t) \cos(\theta_i + \frac{2}{3}\pi) \\ &= l_s I(t) \cos \theta_i + \frac{3}{2} L_0 I(t) \cos \theta_i - \frac{3}{2} L_m I(t) \cos(2\theta_r - \theta_i)\end{aligned}\quad (\text{a6-37})$$

定常状態では同期速度で回転するので, $\theta_r - \theta_i$ は一定で, 高調波成分は生じないと考えられる。(a6-37)は, 界磁成分を除いた 3 相電流による磁束密度を求め, それを積分することでも求められる。以下これを示す。

(a6-36)を(a6-16)に代入して加えると,

$$\begin{aligned}
B_{abc}(\alpha) &= B_a(\alpha) + B_b(\alpha) + B_c(\alpha) = \frac{\mu_0}{g(\alpha)}(F_a + F_b + F_c) \\
&= \frac{\mu_0}{g(\alpha)} \frac{N_s}{P} (i_a \cos \alpha + i_b \cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi) + i_c \cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi)) \\
&= \frac{\mu_0 N_s}{P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\alpha - \theta_r)) \frac{3}{2} I(t) \cos(\theta_i - \alpha) \\
&= \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P} \{ \alpha_1 \cos(\theta_i - \alpha) - \frac{\alpha_2}{2} (\cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i) + \cos(3\alpha - 2\theta_r - \theta_i)) \} \quad (a6-38)
\end{aligned}$$

ある瞬間の空間の磁束密度は、 α 以外を定数と考えると、磁束密度に **3 倍調波の成分**が生じることが判る⁽⁵⁾。 $\cos(\theta_i - \alpha)$ の項は電流の位相と等しい位置の磁束密度が最大となることを意味し、**回転磁界**を意味する。次式の $B_a(\alpha)$ だけでは、**交番磁界**で正相分と逆相分の和である。

$$B_a(\alpha) = \frac{\mu_0 N_s I(t)}{2P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\alpha - \theta_r)) (\cos(\theta_i + \alpha) + \cos(\theta_i - \alpha)) \quad (a6-39)$$

鎖交磁束は

$$\begin{aligned}
\psi_a &= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} B_{abc}(\theta) r l \frac{2}{P} d\theta d\alpha + l_s i_a \\
&= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 N_s}{P} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)) r l \frac{3}{2} I(t) \cos(\theta_i - \theta) \frac{2}{P} d\theta d\alpha + l_s i_a \\
&= \frac{N_s^2 \mu_0 r l 3}{P^2} I(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)) \cos(\theta_i - \theta) d\theta d\alpha + l_s i_a \\
&= \frac{N_s^2 \mu_0 r l 3}{P^2} I(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \{ 2\alpha_1 \cos(\theta_i - \alpha) - \alpha_2 \cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i) + \frac{\alpha_2}{3} \cos(3\alpha - 2\theta_r - \theta_i) \} d\alpha + l_s i_a \\
&= \frac{N_s^2 \mu_0 r l 3}{P^2} I(t) \{ \pi \alpha_1 \cos \theta_i - \pi \frac{\alpha_2}{2} \cos(2\theta_r - \theta_i) \} + l_s i_a \\
&= l_s I(t) \cos \theta_i + \frac{3}{2} L_0 I(t) \cos \theta_i - \frac{3}{2} L_m I(t) \cos(2\theta_r - \theta_i) \quad (a6-40)
\end{aligned}$$

これは(a6-37)に一致している。上式 3 行目の積分で、巻線の正弦波分布があるので 3α 部分の積分が 0 となっている。(a6-40)は過渡状態でも成り立つが、他の文献で見当たらない。(a6-36)の表現が一般性を有することがあまり知られていないためと思われる。

○ トルクの式

3 相分を考えた電流の空間分布は(a6-3)、(a6-36)より次式で表せる。

$$\begin{aligned}
j_{abc}(\alpha) &= j_a(\alpha) + j_b(\alpha) + j_c(\alpha) = \frac{N_s i_a}{P} \sin \alpha + \frac{N_s i_b}{P} \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \frac{N_s i_c}{P} \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \\
&= \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) \sin(\alpha - \theta_i) \quad (a6-41)
\end{aligned}$$

電流の空間ベクトルに関しては、(a6-36)を用いると

$$\dot{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_b + e^{-j\frac{2\pi}{3}} i_c) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} I(t) e^{j\theta_i} = \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) e^{j\theta_i} \quad (\text{a6-42})$$

となる。

磁束密度の空間分布は、(a6-38)に永久磁石の磁束密度を加えて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_{abc}(\alpha) &= B_a + B_b + B_c + B_0 \cos(\alpha - \theta_r) \\ &= \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P} \{ \alpha_1 \cos(\theta_i - \alpha) - \frac{\alpha_2}{2} (\cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i) + \cos(3\alpha - 2\theta_r - \theta_i)) \} \\ &\quad + B_0 \cos(\alpha - \theta_r) \end{aligned} \quad (\text{a6-43})$$

磁極に働くトルクは電流に働く力の反作用だから、フレミングの左手の法則より(a6-41)、(a6-43)を用いて次式で計算できる。最初のマイナスはトルクが電流に働く力と逆向きだからである。電流密度分布の単位は[A/rad]としているので角度を掛けるだけで電流となる（ r の掛け算不要）。最初の $P/2$ は、 $0 \sim 2\pi$ まで電気角で積分されているから、全体にわたり集める。

$$\begin{aligned} \tau_e &= -r \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} j_{abc}(\alpha) B_{abc}(\alpha) l d\alpha && \text{トルク} = \text{半径} \times \text{力} \\ &= -\frac{P}{2} \int_0^{2\pi} \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) \sin(\alpha - \theta_i) l r \left[\frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P} \{ \alpha_1 \cos(\theta_i - \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_2}{2} (\cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i) + \cos(3\alpha - 2\theta_r - \theta_i)) \} + B_0 \cos(\alpha - \theta_r) \right] d\alpha \\ &= \frac{P}{2} \frac{9\mu_0 N_s^2 I^2(t) \alpha_2 l r}{8P^2} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha - \theta_i) \cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i) d\alpha \\ &\quad - \frac{P}{2} \frac{3N_s I(t) B_0 l r}{2P} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha - \theta_i) \cos(\alpha - \theta_r) d\alpha \\ &= -\frac{P}{2} \frac{9\mu_0 N_s^2 \alpha_2 l r \pi}{8P^2} I^2(t) \sin 2(\theta_i - \theta_r) + \frac{P}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N_s B_0 l r \pi}{P} \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) \sin(\theta_i - \theta_r) \\ &= \frac{P}{2} \left\{ -\frac{3}{2} L_2 I^2(t) \sin 2(\theta_i - \theta_r) + \psi \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) \sin(\theta_i - \theta_r) \right\} \quad (\text{a6-47)より} \\ &= \frac{P}{2} \text{Im}(-L_2 e^{-j2\theta_r} \dot{i}_s \dot{i}_s + \psi e^{-j\theta_r} \dot{i}_s) \quad (\text{a6-42)より} \\ &= \frac{P}{2} \text{Im}(\dot{\psi}_s^* \dot{i}_s) \quad (\text{a5-30)より} \quad (\text{a6-44}) \end{aligned}$$

トルクは非常に簡単な式になる。磁束密度の3倍調波の成分はトルクに現れない。

ここで、(a6-44)の導出で用いた ψ について説明する。永久磁石だけを考えて

$$\begin{aligned} \psi_a &= \frac{P}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{P} \cos \alpha \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} B_0 \cos(\theta - \theta_r) r l \frac{2}{P} d\theta d\alpha \\ &= \frac{N_s B_0 r l}{P} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \left[\cos(\theta - \theta_r) \right]_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{2N_s B_0 r l}{P} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cos(\alpha - \theta_r) d\alpha \\ &= \frac{\pi}{P} N_s B_0 r l \cos \theta_r \end{aligned} \quad (\text{a6-45})$$

従って、同期機の2軸理論で定義した(a4-2), (a4-29)より

$$\psi_0 = \frac{\pi}{P} N_s B_0 r l \quad (\text{a6-46})$$

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{P} N_s B_0 r l \quad (\text{a6-47})$$

となる。

○ 物理空間ベクトル

磁束線はモータのエアギャップにおける磁束密度分布を表すので、空間に実際に生じている。**起磁力**は、エアギャップの各部分で消費される起磁力を考えると空間に分布している。一方、モータの巻線は空間に分布しているので、巻線の電流、電圧及び起電力も空間と結びつけて考えられよう⁽⁵¹⁾。一般には、空間の角度 α (電気角)をもつ関数

$$F_x(\alpha) = F_m(t) \cos(\alpha - \theta_x(t)) \quad F_m(t) > 0 \quad (\text{a6-48})$$

が与えられるとき、**物理空間ベクトル**(physical space vector)を次式で定義する⁽⁵⁷⁾。

$$\dot{F}_x = F_m(t) e^{j\theta_x(t)} \quad (\text{a6-49})$$

$\alpha = \theta_x(t)$ の部分で $F_x(\alpha)$ は最大となる。

逆に、

$$F_x(\alpha) = \text{Re}(\dot{F}_x e^{-j\alpha}) \quad (\text{a6-50})$$

である。物理空間ベクトルは筆者が名付けたもので、一般に使われているわけではない。

3相分を考えた電流の空間分布は(a6-3), (a6-36)より

$$\begin{aligned} j_{abc}(\alpha) &= \frac{N_s i_a}{P} \sin \alpha + \frac{N_s i_b}{P} \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \frac{N_s i_c}{P} \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ &= \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) \sin(\alpha - \theta_i) = \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) \cos(\alpha - \theta_i - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (\text{a6-51})$$

これから電流の**物理空間ベクトル**は次式で表わせる。

$$\dot{j}_{abc} = \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) e^{j(\theta_i + \frac{\pi}{2})} = j \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) e^{j\theta_i} = j \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N_s}{P} \dot{i}_s \quad (\text{a6-52})$$

(a6-42)の電流密度の空間ベクトル \dot{i}_s より90度角度が進んでいる。

起磁力は(a6-11), (a6-14), (a6-15), (a6-36)より次式となる。

$$F_s(\alpha, t) = F_a(\alpha, t) + F_b(\alpha, t) + F_c(\alpha, t) = \frac{3N_s}{2P} I(t) \cos(\alpha - \theta_i(t)) \quad (\text{a6-53})$$

この物理空間ベクトル表示は

$$\dot{F}_s(t) = \frac{3N_s}{2P} I(t) e^{j\theta_i} = \frac{3N_s}{2P} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{i}_s \quad (\text{a6-54})$$

となる。このように3相分を合成した起磁力の物理空間ベクトルは電流の空間ベクトルと比例関係にある。

磁束密度の空間分布は、第3調波成分を含み、物理空間ベクトルに表わすことができない。しかし、正弦波巻線分布を考えているので、第3調波成分が鎖交磁束(従って誘起電圧、電流)

やトルクに及ぼす影響はない。従って、第3調波を無視した次式を定義する。

$$\begin{aligned} B_{eabc}(\alpha) &= B_a + B_b + B_c + B_0 \cos(\alpha - \theta_r) \\ &= \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P} \left\{ \alpha_1 \cos(\alpha - \theta_i) - \frac{\alpha_2}{2} (\cos(\alpha - 2\theta_r + \theta_i)) \right\} + B_0 \cos(\alpha - \theta_r) \end{aligned} \quad (\text{a6-55})$$

この物理空間ベクトルは、ある瞬間に磁束密度の空間分布が正弦波となることから

$$\dot{B}_{eabc} = \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P} \left\{ \alpha_1 e^{j\theta_i} - \frac{\alpha_2}{2} e^{j(2\theta_r - \theta_i)} \right\} + B_0 e^{j\theta_r} \quad (\text{a6-56})$$

となる。

(a6-55)と (a4-30)で求めた次式の鎖交磁束の空間ベクトル $\dot{\psi}_s$ の関係を求めよう。

$$\dot{\psi}_s = L_1 \dot{i}_s - L_2 e^{j2\theta_r} \dot{i}_s^* + \psi e^{j\theta_r}$$

$$\text{ここで, } L_1 = l_s + \frac{3L_0}{2} = l_s + \frac{3N_s^2 \pi r l \mu_0}{2P^2} \alpha_1, \quad L_2 = \frac{3N_s^2 \pi r l \mu_0 \alpha_2}{4P^2}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{P} N_s B_0 r l$$

(a6-56)に、電流の空間ベクトルを代入して

$$\dot{B}_{eabc} = \frac{3\mu_0 N_s}{2P} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \alpha_1 \dot{i}_s - \frac{\alpha_2}{2} e^{j2\theta_r} \dot{i}_s^* \right\} + B_0 e^{j\theta_r} \quad (\text{a6-57})$$

よって $\dot{\psi}_s$ と \dot{B}_{eabc} は以下の関係にある。

$$\dot{\psi}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi r l N_s}{P} \dot{B}_{eabc} + l_s \dot{i}_s \quad (\text{a6-58})$$

従って、**鎖交磁束の空間ベクトル $\dot{\psi}_s$** は l_s 分を除いた場合に第3調波成分を無視した**磁束密度の物理空間ベクトル**の向きと一致する。

物理空間ベクトルを用いると、以下のようにトルクが簡単に求められる。

$$\begin{aligned} \tau_e &= -r \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} j_{abc}(\alpha) B_{abc}(\alpha) l d\alpha \\ &= -l r \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} J_m \sin(\alpha - \theta_i) \{ B_m \cos(\alpha - \theta_b) + B_{3m} \cos(3\alpha - \theta_{3b}) \} d\alpha \quad (\text{a6-41}), (\text{a6-43}) \text{より} \\ &= -l r \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} J_m \sin(\alpha - \theta_i) B_m \cos(\alpha - \theta_b) d\alpha \\ &= -\frac{P}{2} r l \pi B_m J_m \sin(\theta_b - \theta_i) \\ &= -\frac{P}{2} r l \pi \text{Re}(\dot{B}_{eabc}^* \dot{j}_{abc}) \quad \dot{j}_{abc} = j J_m e^{j\theta_i}, \dot{B}_{eabc} = B_m e^{j\theta_b} \text{とおけるから} \\ &= \frac{P}{2} I_m (\dot{\psi}_s^* \dot{i}_s) \end{aligned} \quad (\text{a6-59})$$

$$\text{何故なら, } \dot{i}_s = \frac{1}{j} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2P}{3N_s} \dot{j}_{abc} \quad \text{だから,}$$

$$\dot{\psi}_s^* \dot{i}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi r l N_s}{P} \dot{B}_{abc}^* \frac{1}{j} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2P}{3N_s} \dot{j}_{abc} + l_s \dot{i}_s^* \dot{i}_s = -j\pi r l \dot{B}_{abc}^* \dot{j}_{abc} + l_s |\dot{i}_s|^2 \quad \text{より}$$

○ 空間ベクトルの物理的意味

野中によると“誘導起電力や電流の空間ベクトルはある瞬時に於いて、誘導起電力や電流が最大となっているコイルの巻線軸方向に右ねじ系にとる”（以下右ねじ系の考え方と呼ぶ）とされている⁽⁷⁾。このことを過渡状態を含め理論的に考察する。判り易いように式を再掲載して示す。

まず、電流について考える。正弦波の巻線分布を仮定すると、電流分布は(a6-3)より、

$$j_a(\theta) = \frac{N_s i_a}{P} \sin \theta, \quad j_b(\theta) = \frac{N_s i_b}{P} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}), \quad j_c(\theta) = \frac{N_s i_c}{P} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad \text{①}$$

であった。ここで θ は空間の角度（電気角）である。従って、3相電流による電流密度の空間分布は次式で与えられる。

$$j_{abc}(\theta) = j_a(\theta) + j_b(\theta) + j_c(\theta) \quad \text{②}$$

いま、3相電流を

$$i_a = I(t) \cos \theta_i(t), \quad i_b = I(t) \cos(\theta_i(t) - \frac{2\pi}{3}), \quad i_c = I(t) \cos(\theta_i(t) + \frac{2\pi}{3}) \quad \text{③}$$

とする。これは過渡状態でも成立する（このことは従来あまり明確に述べられていなかったように思う）。これにより、過渡状態でも以下の理論が適用可能となる。③を②に代入して、

$$\begin{aligned} j_{abc}(\theta) &= \frac{N_s I(t)}{P} (\cos \theta_i \sin \theta + \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3}) \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta_i + \frac{2\pi}{3}) \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})) \\ &= \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) \cos(\theta - \theta_i - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad \text{④}$$

よって電流密度分布の**物理空間ベクトル**は次式で表わせる。

$$\dot{j}_{abc} = \frac{N_s}{P} \frac{3}{2} I(t) e^{j(\theta_i + \frac{\pi}{2})} \quad \text{⑤}$$

一方、③より電流の空間ベクトルは

$$\begin{aligned} \dot{i}_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} (i_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_b + e^{-j\frac{2\pi}{3}} i_c) = \sqrt{\frac{2}{3}} I(t) (\cos \theta_i + \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3}) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \cos(\theta_i + \frac{2\pi}{3}) e^{-j\frac{2\pi}{3}}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) e^{j\theta_i} \end{aligned} \quad \text{⑥}$$

電流密度 j_{abc} が最大になる角 θ （物理空間ベクトルの方向）は、④より

$$\theta = \theta_i + \frac{\pi}{2} \quad \text{⑦}$$

となって、⑥式の電流の空間ベクトルから90度角度が進むことが判る。例えば、 $\theta_i = 0$ のとき⑥式の空間ベクトルは実軸を向き、③式より $i_a > 0$ で最大となる。⑥式の空間ベクトルと**右ねじ系の考え方**による空間ベクトルが一致するためには、 i_a が正で最大であるとき、 a^* に◎印が

ある必要がある。

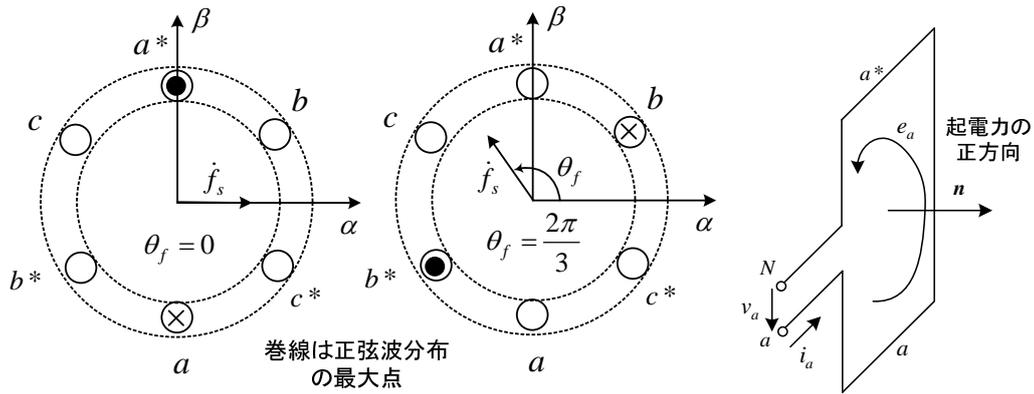


図 a6-5 空間ベクトルの物理的意味

一般の空間ベクトルの定義は

$$\dot{f}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} f_b + e^{-j\frac{2\pi}{3}} f_c) \quad (8)$$

であり、変形して $\dot{f}_s(t) = F(t)e^{j\theta_f(t)}$ とでき、よって

$$f_a = \sqrt{2/3} F(t) \cos \theta_f(t), \quad f_b = \sqrt{2/3} F(t) \cos(\theta_f(t) - \frac{2\pi}{3}), \quad f_c = \sqrt{2/3} F(t) \cos(\theta_f(t) + \frac{2\pi}{3}) \quad (9)$$

と表せる。右ねじ系の考え方による空間ベクトルとなるためには、 f_a が正で最大であるとき、図の a^* に \odot 印がある必要がある。つまり回路中に勝手に矢印で定義した a 相の電圧や電流の全てについて、その量が正で最大であるなら、 a^* に \odot 印がある必要がある。例えば、電流 $i_a' = -i_a$ と定義し、定義に従って

$$\dot{i}_s' = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a' + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_b' + e^{-j\frac{2\pi}{3}} i_c') \quad (10)$$

で空間ベクトルを求めるときも、 $i_a' > 0$ で最大のとき、 a^* に \odot 印がある必要がある。しかし、実際には \otimes 方向に電流が流れているのに表示で \odot なるのは判りにくい。以上のことから、変数を定義する場合にはその値が正で最大になったときに、 a^* に \odot 印があるものがよい。従って、電流は i_a が適する。

端子電圧については、 v_a の方向とする。 $v_a > 0$ のとき最大となり、 a^* に \odot 印が来ると、その \odot 印の方向に電流を流すような端子電圧の方向と考えることができる。起電力については、磁束の向きを定める法線ベクトル n を図 a6-5 の向き（電流と右ねじの関係）に選ぶと起電力 e_a が電流を流す向きにコイル内にできるので実際と一致して適する。起電力 e_a と逆向きに逆起電力 $e_a' = -e_a$ を考える場合には、 $e_a' > 0$ のとき、 a^* に \odot 印が来ると、 \odot 印の方向の電流を妨げるような最大逆起電力がその位置の巻線内に発生していると解釈できる。 a^* が \otimes 印になったら定義した量は負で最小値である。 b^*, c^* に \odot 印があるとき、それぞれ f_b, f_c が正の最大値で

ある。

図 a5-6 などの空間ベクトル図に示す⊙印や⊗印はこのような意味で書かれている。⊙印の点を物理空間ベクトルが向いている。

○ 自己インダクタンス L_1 のチェック

(a6-27)より求まる自己インダクタンス L_1 のチェックを行う。但し、漏れインダクタンスは省いて考える。誘導機も同じである。(a6-25)より

$$L_1 = \frac{3N_s^2 \pi r l \mu_0}{2P^2} \alpha_1 = \frac{3N_s^2 \pi r l \mu_0}{2P^2 g} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{g}) \quad (\text{非突極機}) \quad \textcircled{1}$$

ここで、 g : ギャップ長

野中の文献(6) の(5.30)式より

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\omega k_{w1} N_s \Phi}{\sqrt{2}} = \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \tau l B_m = \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \tau l \frac{6\sqrt{2}\mu_0 k_{w1} N_s}{\pi g} \frac{I_1}{P} \\ &= \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \frac{2\pi r}{P} l \frac{6\sqrt{2}\mu_0 k_{w1} N_s}{\pi g} \frac{I_1}{P} = \omega \left(\frac{k_{w1} N_s}{P}\right)^2 \frac{24rl\mu_0}{\pi g} I_1 \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

k_{w1} : 巻線係数, $\tau = \frac{2\pi r}{P}$: 磁極ピッチ

$$\text{故に, } L_1 = \left(\frac{k_{w1} N_s}{P}\right)^2 \frac{24rl\mu_0}{\pi g} \quad \textcircled{3}$$

$$= \left(\frac{N_s}{P}\right)^2 \frac{3\pi r l \mu_0}{2g} \quad \text{when, } k_{w1} = \frac{\pi}{4} \quad (\textcircled{1} \text{に一致})$$

これは、森安の文献(32)の(4-10)より得られる値とも一致する。金の文献(51)も $2N_{es1} = k_{w1} N_s$ とすると同じ式が得られる。**巻線係数は分布巻係数と短節巻係数を掛けたもの**である。

巻線係数を使う理論で、 $k_{w1} N_s$ の部分を $(\pi/4)N_s$ に置き換えると、正弦波巻線になるので、正弦波巻線で導いた式の N_s を $(4/\pi)k_{w1} N_s$ に置き換えれば、巻線係数を使う理論の式になるはずである。但し、巻線係数は空間高調波ごとに違うので安易に拡張できない。

正弦波巻線には、巻線係数の概念がない。集中巻起磁力の振幅 $(4N_s / \pi P) i_a$ に対して、分布巻や短節巻にして正弦波巻線に近づけると巻数が巻線係数を掛けた $k_{w1} N_s$ (実効巻数) に減少し、起磁力の振幅は $(4N_s k_{w1} / \pi P) i_a$ となる。そして、完全に正弦波になれば $k_{w1} = \pi/4$ した値になると考えられる。巻線係数は磁束密度から相ごとの鎖交磁束や起電力を求める場合にも使われる。これは同じ相の巻線でも位置が異なるためである。

巻線係数を使った理論が正弦波巻線より実用的であるが、巻線の巻き方を考慮しないといけない。その理論では、一般に起磁力の空間高調波を無視するので、電流分布は正弦波、よって巻線分布も正弦波と考えていることになる。巻線係数を導入して等価な正弦波巻線を考えるより、まず正弦波巻線で理解した方がスッキリするだろう。