パワーエレクトロニクスと
電動機制御入門

Power Electronics and Motor Control

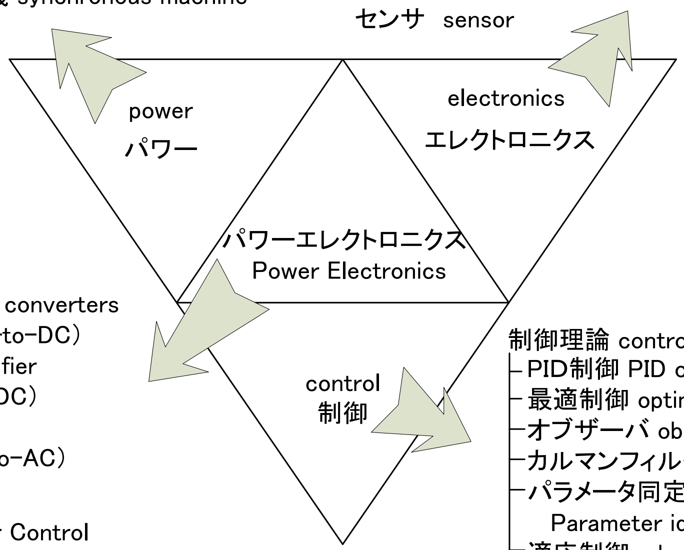
平成 27 年
長崎大学大学院工学研究科
辻　峰男

目　　次

パワーエレクトロニクス　Power Electronics

電気機器 electric machinery
├変圧器　transformer
└回転機 rotating machine
　├直流機　DC machine
　└交流機　AC machine
　　├誘導機 induction machine
　　└同期機 synchronous machine

半導体素子 semiconductor device
　Power transistor,　thyristor, GTO
　Power MOS FET ,IGBT
マイクロプロッセサ microprocessor
DSP digital signal processor
FPGA　Field-Programmable Gate Array
　VHDL言語
アナログIC
　OPアンプ operational amplifier
センサ　sensor



電力変換器
　Power electronic converters
├制御整流器(AC-to-DC)
　　controlled rectifier
├チョッパ(DC-to-DC)
　　Chopper
└インバータ(DC-to-AC)
　　Inverter

電動機制御　Motor Control
├Chopper-DC motor
├Inverter-Induction motor
└Inverter-Synchronous motor

風力発電 wind power generation

静止形電源装置 static power source
├　無停電電源 uninterruptible power supply UPS
├　直流定電圧電源 DC constant voltage power supply
├　太陽電池 solar cell
└　アクティブフィルタ active filter

制御理論 control tehory
├PID制御 PID control
├最適制御 optimal control
├オブザーバ observer
├カルマンフィルタ Kalman filter
├パラメータ同定
　　Parameter identification
├適応制御 adaptive control
└H∞制御(ロバスト制御)
ディジタル制御　digital control
ディジタルフィルタ digital filter
シミュレーションツール
　Simulation tool
　PCIM, Matlab, Scilab
制御プログラム control program
　C言語　C language

電動機の応用(applications of Motors)

電動機の種類 type of motors

- ○　直流電動機 DC Motor = DCM：制御容易，ﾌﾞﾗｼと整流子の保守必要
- ○　誘導電動機 Induction Motor=IM：堅牢・安価，高速運転容易(50000rpm)，並列運転
- ○　表面磁石同期電動機 Surface Permanent Magnet Synchronous Motor=SPMSM
  ：非突極，IPMSM より低ｺｷﾞﾝｸﾞﾄﾙｸ，低ﾄﾙｸﾘｯﾌﾟﾙ
- ○　埋込磁石同期電動機 Interior Permanent Magnet Synchronous Motor=IPMSM
  ：突極，　IM より高効率，高トルク，希土類磁石使用（高価）

制御法（AC モータ）control method (AC motor)

- ○　V/f 一定制御　constant volts per hertz control=Volts/Hertz control=V/f　：制御容易
- ○　ベクトル制御 vector control=VC（ｴﾝｺｰﾀﾞ付）：精密トルク制御，精密速度制御
- ○　速度センサレスベクトル制御 speed sensorless vector control=SVC
  ：ｴﾝｺｰﾀﾞなし，V/f 一定制御とベクトル制御の中間の特性

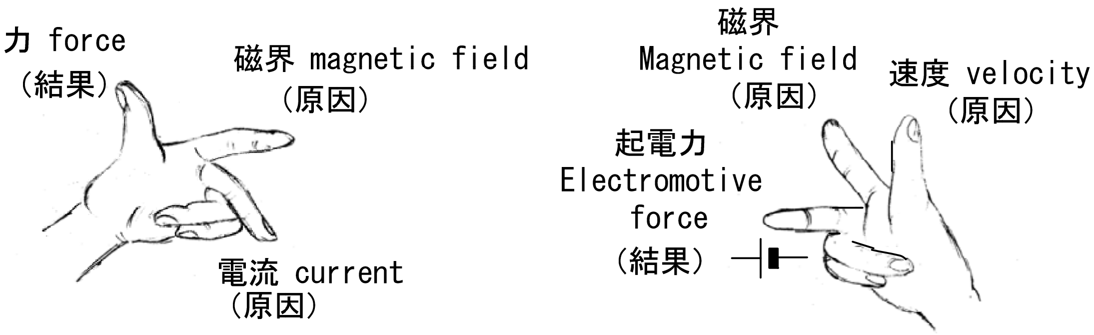
用途 applications	電動機－制御法 Motor -control method	備考 remarks
自動車 car	DCM-多くが電圧一定, ﾁｮｯﾊﾟ電圧制御 (ﾊﾟﾜｽﾃ) SPMSM-VC(ﾊﾟﾜｽﾃ)[2)]	ワイパ，パワーウィンドウ，ミラー，スタータ（直巻），燃料ポンプ，パワステなど大型車で 100 個
自動車 car 車輪駆動 wheel	IPMSM-VC	ハイブリッドカーhybrid car 電気自動車 electric car IM-VC はﾃｽﾗﾓｰﾀｰｽﾞ(ﾄﾖﾀ提携)が販売
電車 electric train	IM-VC PMSM-VC	1964 年新幹線 DCM(直巻)－電圧制御 新幹線は IM-VC，IM-SVC 実用例あり
ファン fan	IM-V/f	SVC に比べ安定性大　速度 1:50~100
ポンプ pump	IM-SVC,IPMSM-SVC	小形，省エネで IPMSM 増加
圧延機 rolling mill	IM-VC,SM-VC	
押出機 extruding machine 印刷機 printing machine	IM-SVC	始動トルク重視 速度範囲 1: 100 以上
製紙 papermaking フィルム film 輪転機 rotary press	IM-VC	トルク精度 3%程度 速度範囲 1: 1000 程度
エレベータ elevator	SMSM-VC	高速エレベータ　電圧形ＰＷＭ整流器 high speed elevator PWM rectifier
工作機械 machine tool	IM-VC, SPMSM-VC	IM-VC 主軸，SPMSM-VC　送り軸
ロボット robot	SPMSM-VC	位置制御 position control
エアコン air conditioner	IPMSM-SVC 圧縮機 compressor	磁極位置演算　正弦波ＰＷＭ 集中巻 concentrated winding
冷蔵庫 refrigerator	IPMSM-SVC 圧縮機 compressor	誘起電圧または相電流より位置演算 矩形波または正弦波　集中巻　２ﾚﾍﾞﾙ
ＡＶ・ＯＡ機器 audio-visual and office automation equipment	SMSM-VC, SVC ｽﾃｯﾋﾟﾝｸﾞﾓｰﾀ stepping motor	複写機ドラム駆動モータ　PMSM-VC 回転精度向上 PLL 制御

文献(41), (42) ,(48) ,(50)

第１章　DC モータ

○　ＤＣモータの原理(Principle of Direct Current Motor)

フレミングの左手の法則は，電流が流れている導体に磁界をかけると，導体に力が働くというものである。一方，**フレミングの右手の法則**は動いている導体に磁界をかけると，導体に**起電力**(electromotive force　略 emf)（**速度起電力**）[16]が生じるというものである。

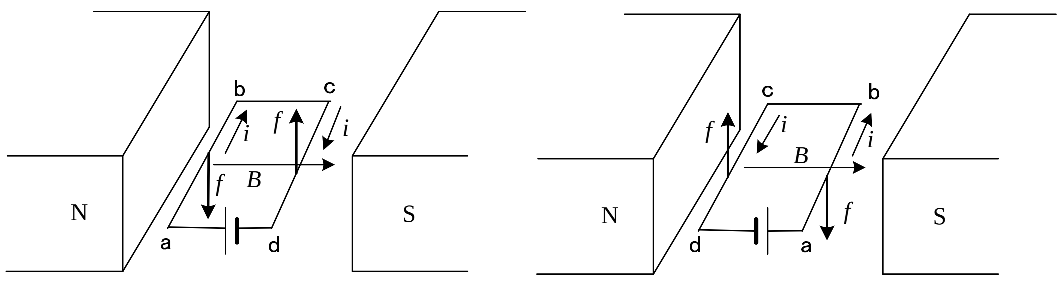


フレミングの左手の法則
Fleming’s left hand law

フレミングの右手の法則
Fleming’s right hand law

図 1-1　フレミングの法則

フレミングの左手の法則を知ったから，これを利用してモータを作ってみよう。図に示すような磁石で作った磁界の中で，コイルに電池(cell)をつないだ回路を考えよう。

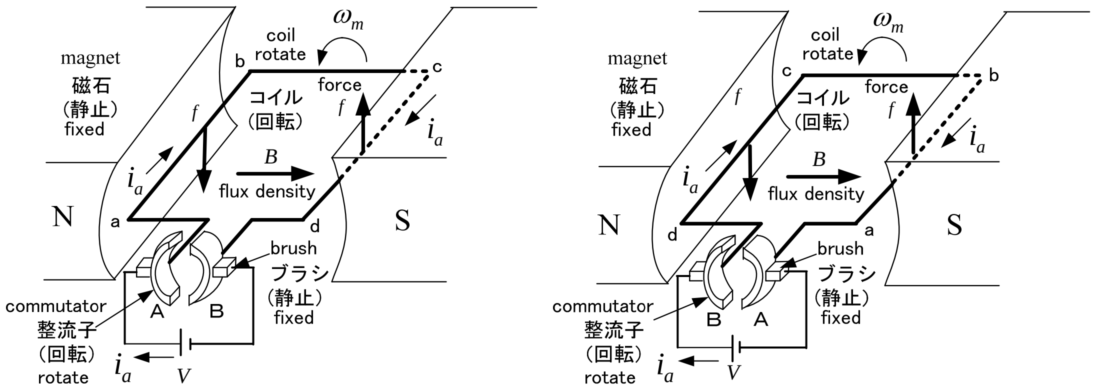


(ａ)　はじめの状態　　　　　　　　　（ｂ）コイルが半回転した状態

図 1-2　この回路でコイルはずっと回りつづけるだろうか？

コイル片 ab（長さを l(m)）には，電流 i(A) が流れ，**磁束密度** B(Wb/m^2) の磁界がかかっているから，フレミングの左手の法則により図の方向に力 f(N) が働く。 $f = Bli$ である。同様に，コイル片 cd にも図の方向に力 f(N) が働く。この結果，コイルは回転しはじめる。これで，DC モータになるだろうか？答えは，NO である。モータになるためには，同じ方

向に力が働きつづけなければならないが，コイルが半回転した図(b)の状態を考えると，力は図の向きに働き反対方向に回ろうとする。これでは，回り続けることはできない。では，どうするか？　半回転したところで，電流を$d \to c \to b \to a$の方向に流せばよく，電池のつなぎ方を逆にする。この仕組みを，**ブラシ**(brush)と**整流子**(commutator)を使って行うのが，**DCモータ（直流電動機）**である。DC モータは，図 1-3 のような構造になっている。整流子は２つの丸くした銅板からなり，コイルと一緒に回転する。電池につながるブラシは，回転せず，整流子とは接触しながら電気を伝える。図 1-3(a)の最初の状態は，図 1-2(a)と同じである。ところが，コイルが半回転したら，図 1-3(b)の状態になる。半回転すると，整流子 A が今度は右のブラシにつながり，コイルの d のところと電池のプラス端子がつながる。電池から流れる**電機子電流**(armature current) i_a は常に同じ方向で直流であるが，コイルに流れる電流は$b \to c, c \to b$と向きが変わっているから交流である。



(a)はじめの状態（電流 b→c）　　(b)コイルが半回転した状態（電流 c→b）

図 1-3　Principle of　DC motor.

図 1-3 の DC モータを図 1- 4 のモデルで表す。ただし，ここでは永久磁石の代わりに**界磁電流**で磁束を作っている。実際の DC モータの回転子には多くの巻線が巻かれ整流子もそれに合わせて分割されているが，その場合も図 1-4 のモデルで書く。

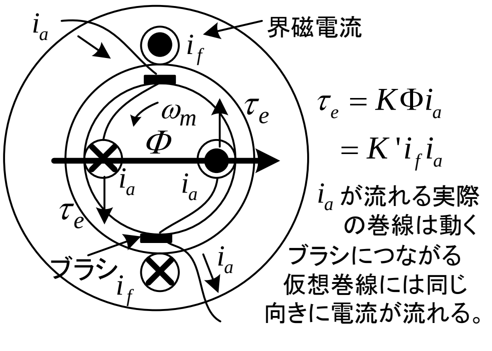


図 1- 4　DC モータのモデル

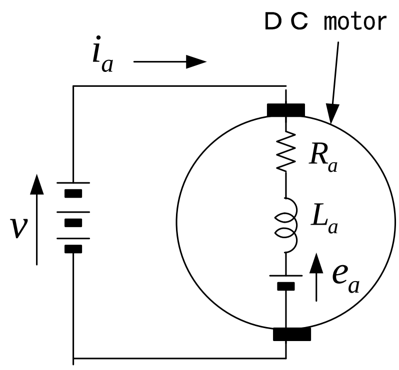


図 1-5　ＤＣモータの等価回路

ブラシの左側には⊗の向き，右側には⦿の向きに常に電流が流れる（図 1-3 で確認せよ）。従って，回転しているときも図 1- 4 の状態は変わらない。図 1-3 の場合にはコイルは真横だけでなく斜めの位置もあるが, 実際にはたくさん巻線を巻くので, 図 1- 4 のように左側が⊗, 右側が⦿の仮想巻線として書く。図 1-6 に 4 個の整流子片の場合を示す。

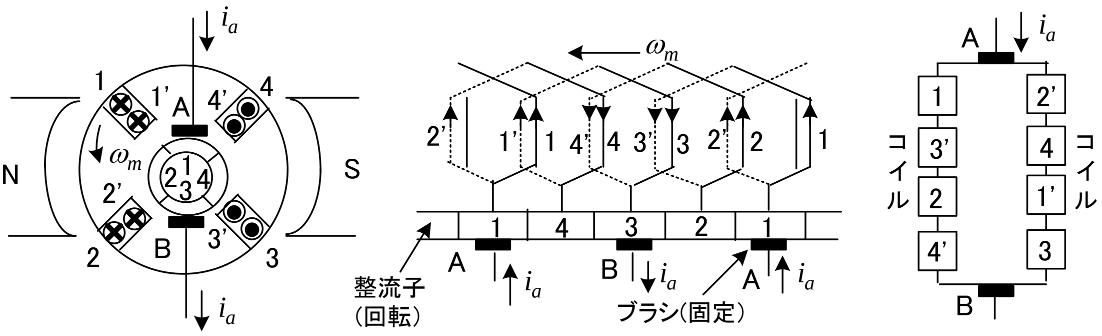


図 1-6　4 個の整流子片，2 層巻，重ね巻の場合の電機子巻線と電流分布

さて，コイルが回ると磁界の中であるから，フレミングの右手の法則により起電力が発生し，これは磁束とコイルの回転角速度に比例する。起電力の向きは流そうとする電流の向きで，図 1-1 の電池の向きである。従って，DC モータは，図 1-5 に示す等価回路で表される。回路の式は,

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \tag{1-1}$$

ここで，　起電力 e_a はフレミングの右手の法則より，次式で与えられる。

$$e_a = K\Phi\omega_m \tag{1-2}$$

K ：定数(constant)，Φ ：界磁が作る磁束 magnet flux [Wb]
R_a ：電機子巻線の抵抗 [Ω] resistance of armature winding
L_a ：電機子巻線のインダクタンス [H] inductance of armature winding
$\omega_m = 2\pi N / 60$ ：回転角速度 angular speed（機械角 mechanical angle）[rad/s]
N ：1 分間の回転数 [min^{-1}]　revolution per minute

DC モータの場合にはブラシと整流子の働きで磁界と電機子電流が常に直交しているため，モータの発生トルク(producing torque) τ_e [Nm]は，フレミングの左手の法則より

$$\tau_e = K\Phi i_a \tag{1-3}$$

と表される。DC モータは，電機子電流 i_a に比例してトルクが簡単に制御できる特徴をもっ

ている。(1-3)の K は(1-2)の K と一致する[7]。

モータの負荷としてはいろいろあるが，モータと負荷が一体となって回転すると考えることが多い。この場合，運動方程式が次式で表される。

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = \tau_e - R_m\omega_m - T_l \tag{1-4}$$

ここで，J ：慣性モーメント(moment of inertia) [kgm^2]（DC モータ＋負荷）

R_m ：制動係数 damping coefficient [Nms]，　T_l ：負荷トルク(load torque)[Nm]

DC モータの出力(output power) P_{out} [W]は，エネルギーの微分であり次式で与えられる。

$$P_{out} = \tau_e\omega_m \tag{1-5}$$

これは，直線運動の**仕事率**＝力×速度に対応する。(1-2), (1-3)より，

$$P_{out} = \tau_e\omega_m = e_a i_a \tag{1-6}$$

が成立し，DC モータの起電力に送り込まれる電力が出力となっていることが判る。

ところで，モータの速度が高く（あるいは加える電圧が低く），$e_a > v$ であれば $i_a < 0$（電流は逆方向）で，DC 発電機になる。このとき，負荷からの機械エネルギーが電気エネルギーに変換される。また，DC 発電機が出すトルクは速度を低くするように働く。

定常状態(steady state)では，全ての変数が一定で，微分を 0 とおいて，(1-1)より次式が成立する。

$$v = R_a i_a + e_a \tag{1-7}$$

運動方程式については(1-4)より次式が成り立ちモータに働く全てのトルクの和は 0 である。

$$0 = \tau_e - R_m\omega_m - T_l \tag{1-8}$$

○　ＤＣモータのブロック線図

次に，制御系としてのブロック線図を求める。(1-1)，(1-2)，(1-3)，(1-4)式をラプラス変換して，初期値を零と置くことにより，以下の式が得られる。

$$V(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + K\Phi\Omega_m(s) \tag{1-9}$$

$$Js\Omega_m(s) = K\Phi I_a(s) - R_m\Omega_m(s) - T_l(s) \tag{1-10}$$

これより，DC モータの**ブロック図**(block diagram)は次のようになる。

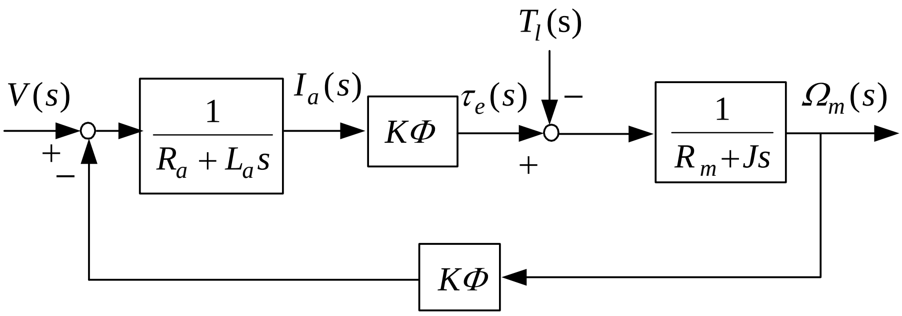


図 1-7　DC モータのブロック図(Block diagram of DC motor).

DC モータのブロック図は以上のように簡単に求まり，トルクや速度の制御も容易である。しかし，ブラシと整流子の接触部分を有しているため火花が発生することがあり保守の点で問題がある。このため中大容量機には殆ど使われない。しかし，永久磁石 DC モータは低コストと駆動・制御が簡単であることから，小容量のモータとしてエンジン制御，パワステアリング，ファン，エアコン，ワイパー用として自動車に利用されている。

問題１　DC モータを DC 発電機として運転するにはどうすればよいか。また，このとき DC 発電機が発生する電磁トルクは速度を低くするように働く理由を述べよ。

問題２　定格電圧 210 V の DC モータがあり，その電機子抵抗は 0.2 Ω である。このモータを定格電圧で運転しているとき, 電機子電流は 50 A, 回転数は $1000\,\mathrm{min}^{-1}$ であった。

(1)　モータの出力を求めよ。

(2)　モータが出すトルクを求めよ。

(3)　電圧を半分にしたとき，モータの回転数はいくらか。ただし，制動係数は 0 とし，回転数に関係なく負荷トルクは一定とする。また，界磁磁束は変化しないとする。

(解) 定常状態として考える。

(1)　起電力 $e_a = v - R_a i_a = 210 - 0.2\times 50 = 200\,\mathrm{V}$

$$P_{out} = e_a i_a = 200\times 50 = 10{,}000\,\mathrm{W}$$

(2) $$\tau_e = \frac{P_{out}}{\omega_m} = \frac{10000}{2\pi\frac{1000}{60}} = \frac{300}{\pi} = 95.5\,\mathrm{Nm}$$

(3)　負荷トルクが変わらないので，発生トルクも変わらない。したがって，$\tau_e = K\Phi i_a$ で界磁磁束 Φ は一定であることから，$i_a = 50\,\mathrm{A}$ である。

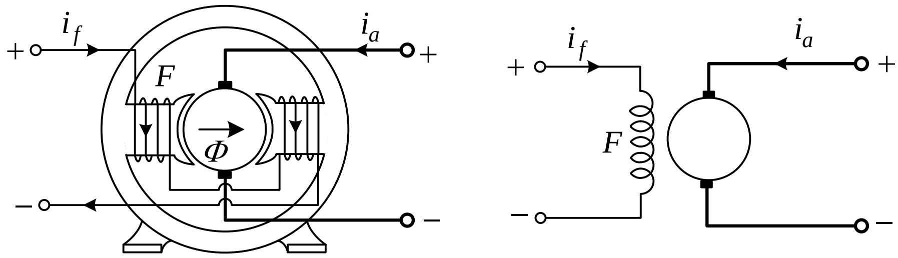
$$e_a = v - R_a i_a = 105 - 0.2\times 50 = 95\ \mathrm{V}$$

$e_a = K\Phi\omega_m = K'N$　より，

$$\frac{N}{1000} = \frac{95}{200}\quad \therefore N = 475\,\mathrm{min}^{-1}$$

これまでは，永久磁石(permanent magnet)を使って磁束を作ったが，電磁石(electromagnet)を用いることもできる。電磁石を作るために流す電流を**界磁電流**，その巻線を**界磁巻線**(field winding)という。

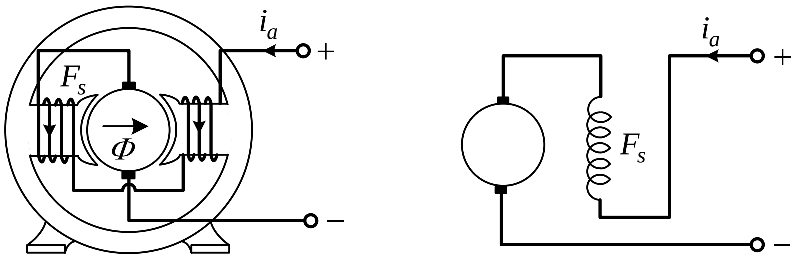
直流他励電動機(separately excited direct-current motor) は以下のような構造をしている[7]。



磁束Φは界磁電流(field current)i_fに比例し，次式が成立する。

$$\Phi = k\ i_f \tag{1-11}$$

直流直巻電動機(series direct-current motor) は以下の構造をしている。



界磁電流と電機子電流i_aは等しい。従って，

$$\Phi = k\ i_a \tag{1-12}$$

であり，発生トルクは

$$\tau_e = K\Phi\, i_a\ = K\, k\, i_a^2 \tag{1-13}$$

であり，電機子電流の２乗に比例する。

モータの始動(starting)時には起電力が小さいので大きな電機子電流i_aが流れる。さらにその２乗であれば，始動時非常に大きなトルクが得られる。以前はこの特性を利用して，直流直巻電動機は電車用の電動機として用いられた。現在でも，長崎の路面電車(street car)にはこのモータが走っている。また，現在でも自動車用のスタータ(セルモータ)として，始動時にエンジンを回す用途に用いられている。エンジンが回って，オルタネータが発電し，ガソリンが噴射されエンジンが点火される。

第２章　誘導モータ

○　誘導モータはなぜ回るの？

誘導モータ(induction　motor)は工場の動力源，電車(electric train)（新幹線），ポンプ(pump)，ファン(fan)などに広く利用されている。まず，その原理を述べよう。

図 2-1 に示すように, 銅板をひもでつるし, その上で磁石をすばやく動かすと, 銅板が動く。銅板は磁石にはくっつかないから, 磁石に引き寄せられて動くのではない。その理由は, 磁石によって銅板に**誘導電流**（**うず電流**：eddy current）が生じ, その電流と磁石による**磁界**(magnetic field)との間で, **フレミングの左手の法則**(Fleming's left hand rule)で力が働くためである。誘導電流は，ファラデー(Faraday)の**電磁誘導**(electromagnetic induction)**の法則**により, 磁界の変化を妨げるように流れるから, 磁界がこれから来る部分ではそれを弱めるように, 磁界が過ぎ去る部分では磁界を強める方向に流れる。

回転させるためには, 図 2-2 に示すように銅板を丸めて軸を作り, 磁石を回転させると, 銅板に力が働き回転する。しかし，ここで大きな問題点がある。それはどうやって磁石を回すかすなわち回転する磁界（**回転磁界** rotating magnetic field）を作るかである。

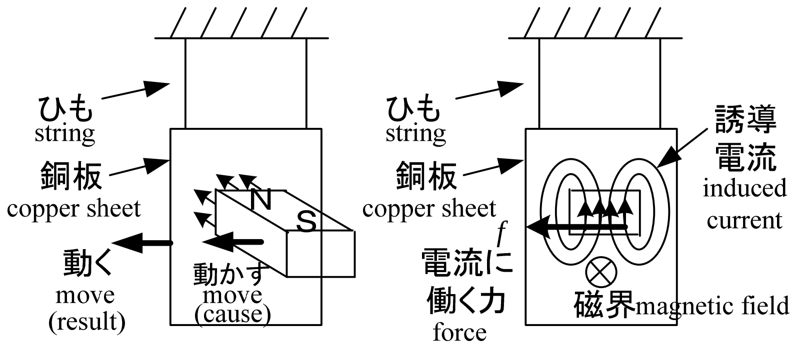


図 2-1　誘導電流に働く力(induced current and force)

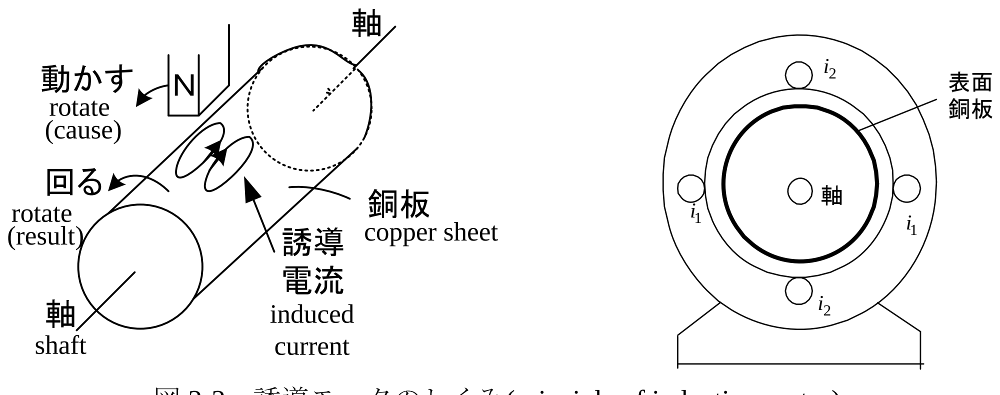


図 2-2　誘導モータのしくみ(principle of induction motor)

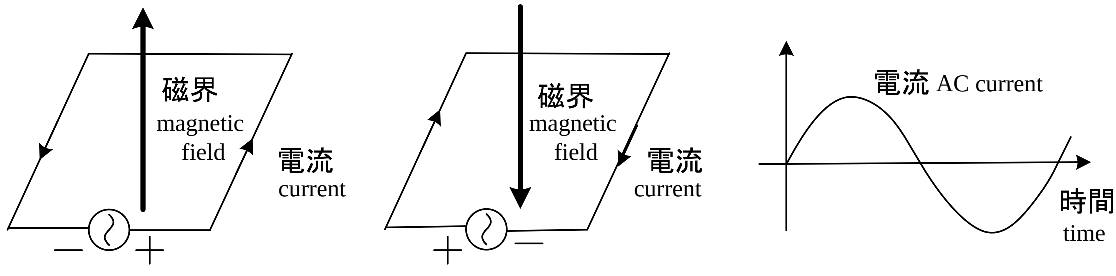


図 2-3　1 つのコイル（単相巻線）による磁界(交番磁界)

図 2-3 のように，1 つのコイル(coil)に交流電流(AC current)を流しても，磁界は上下方向を向くだけで回転する磁界とはならない。そこで，2 つのコイルを空間的に直交するように配置し, コイルにタイミングが 90 度ずれた電流を図 2-4 に示すように流してやる。すると，各時刻のコイルの断面図から判るように，みごとに磁界が回転する。このコイルと銅板を図 2-2 のように配置すれば誘導モータができる。

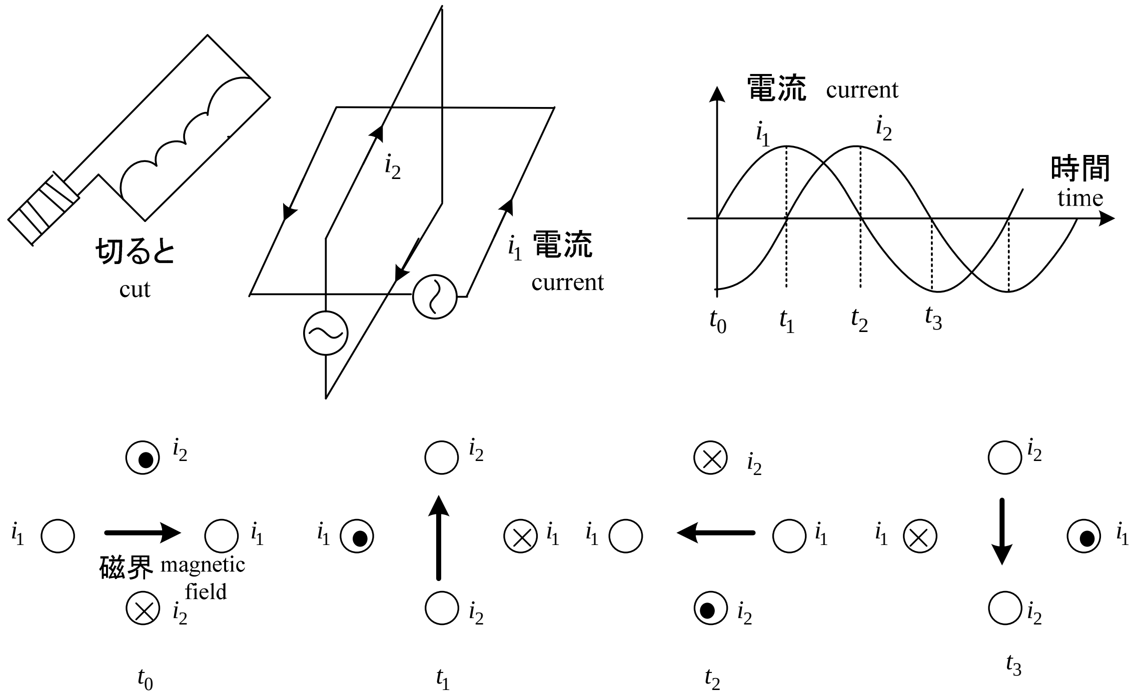


図 2-4　二相巻線による回転磁界(rotating magnetic field)

○　三相巻線による回転磁界の作り方

実際の誘導モータには**三相巻線**が巻いてあり，三相交流を流して回転磁界を作っている。まず図 2-5 の**単相巻線**を説明する。実際にはコイルは何回も巻いてあるが，1 回巻で考えよう。空間にできる磁界を表すのは**磁束密度**(flux density) $\boldsymbol{B}$ であり，その力線である**磁束線**

が用いられる。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ をある面（例えばコイルの面）で面積分(surface integral)したものが**磁束** ϕ (magnetic flux)である。磁束 ϕ はスカラー(scalar)である。ϕ の正の向きとしては面に垂直な法線ベクトル(vertical normal vector)の向きで，一般に電流の矢印の向き（自分で決める）に対して右ねじの進む向きにとる。電気機器の分野では，“**磁束**”と言う言葉が“**磁束密度**”の力線である“**磁束線**”の意味で使われることが多いので注意すること。次に，**三相巻線**とは空間的に 120 度ずつずれたコイルのことである。図 2-5 のように立体的に書くと回路として見にくいので，三相巻線を図 2-6 のように書くことが多い。

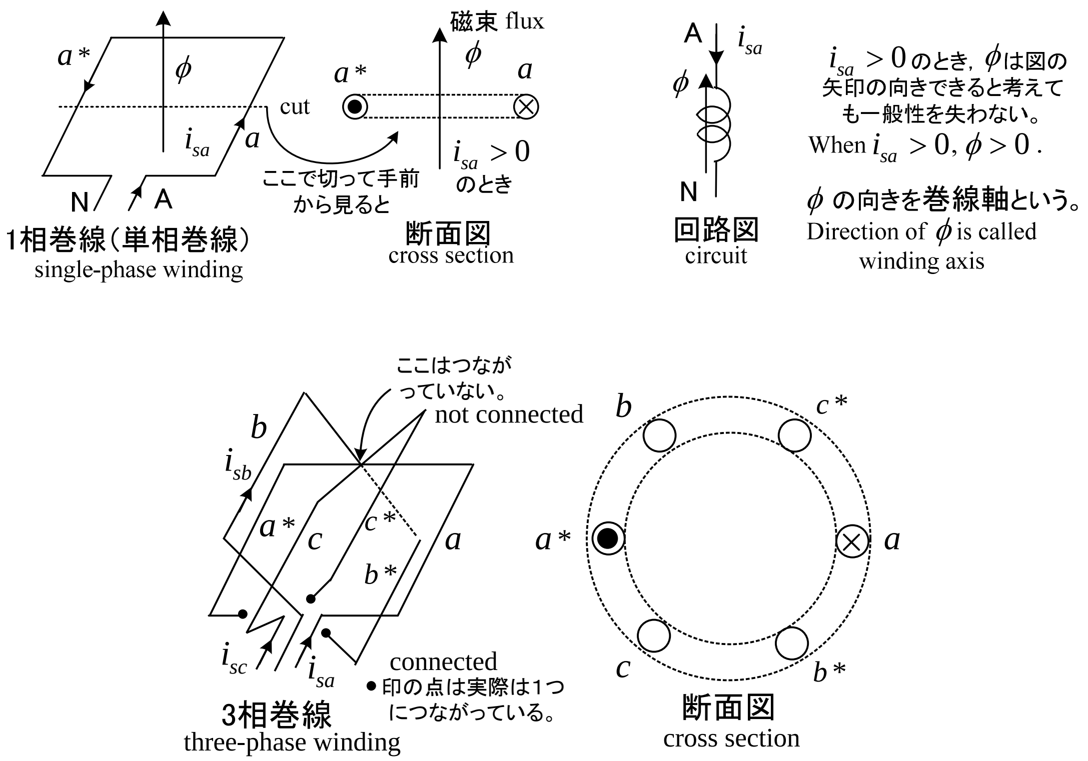


図 2-5　単相巻線(single-phase winding)と三相巻線(three-phase winding)

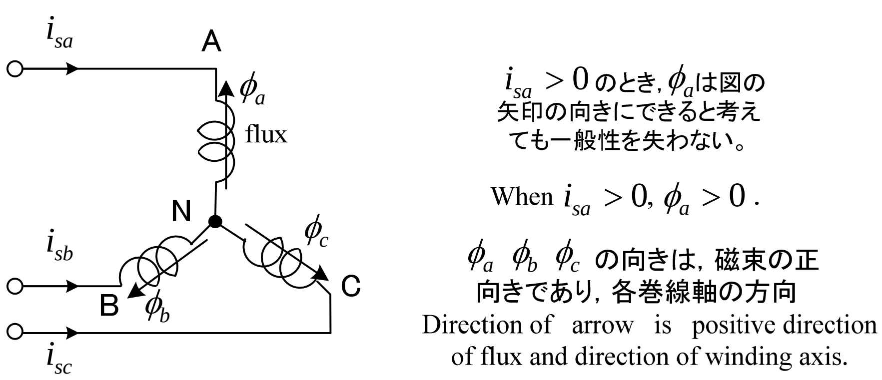
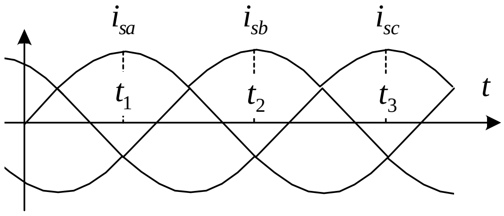


図 2−6　三相巻線の回路的表現(circuit of three-phase winding)

三相交流とは，120°ずつ時間的にずれた交流のことである。これを，三相巻線に流すと**回転磁界**ができる。図 2-7 は時間とともに磁界が回転していることが判る。これは，等価的に図に書いた NS 極の磁石が回るのと同じ効果(effect)がある。



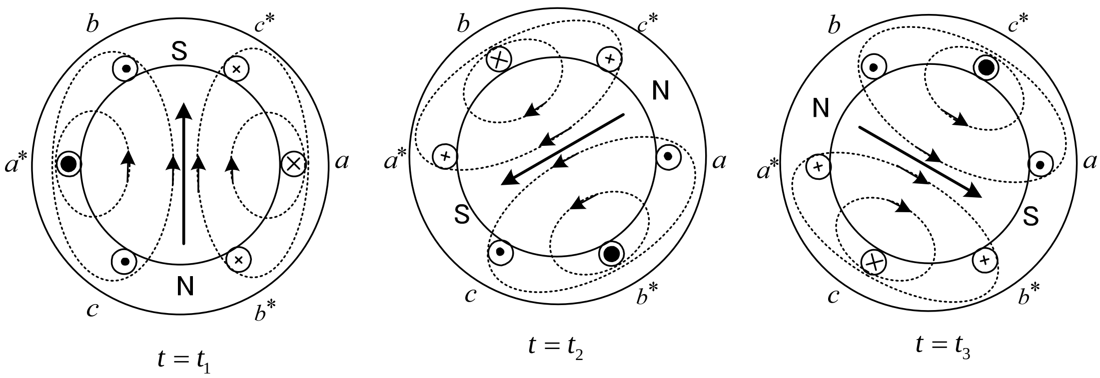


図 2-7　三相交流による回転磁界（磁束線）（２極機）

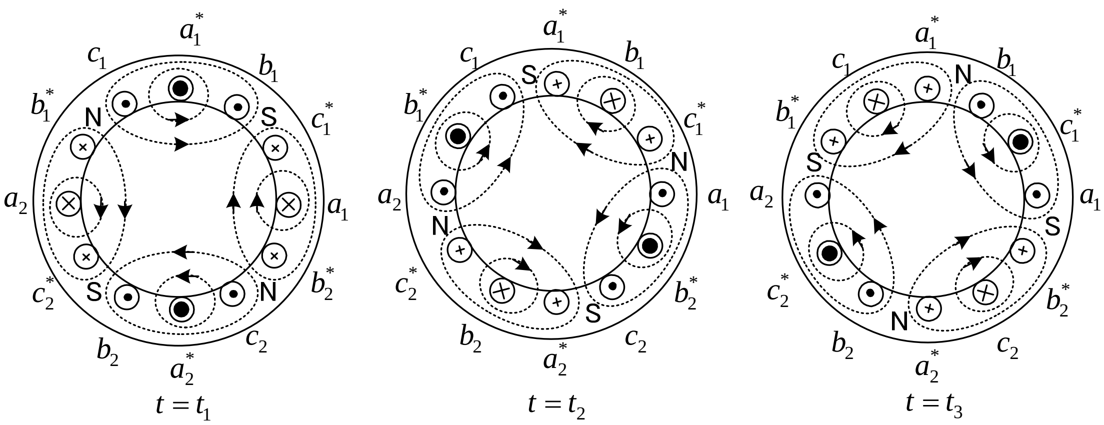


図 2-8　三相交流による回転磁界（磁束線）（４極機）

回転磁界（例えば磁極 magnetic pole N）が回る速度は**同期速度**(synchronous speed)と呼ばれ，通常 1 分間に何回転するかを min^{-1} (revolution per minute)で表す。交流電源(AC power source)の周波数(frequency)を f[Hz]とすると回転磁界は 1 分間に何回転するか？　図 2-7 の 2 極機の場合には，電流の 1 周期(period)で，回転磁界が 1 回転する。 f[Hz]ということは，1 秒

間に周期が f 個入っていることだから，回転磁界は 1 秒間に f 回転する。従って**同期速度**を N_0[min^{-1}] とすると，$N_0 = 60f$ となる。図 2-8 の 4 極機の場合には，電流が 1 周期しても回転磁界は半回転しかしない。図 2-7，2-8 の磁界は厳密には磁束密度の**磁束線**を表す。

一般に**同期速度**(synchronous speed)は**極数**(number of poles) P に関係し，次式で与えられる。

$$N_0 = \frac{120f}{P} \quad (= 60\frac{2}{P}f) \quad [\mathrm{min}^{-1}] \tag{2-1}$$

○　誘導モータの基本的特性(basic characteristic of Induction Motor)

回転磁界は磁石をぐるぐる回すのと同じ効果があることを頭に入れて，誘導モータの基本的特性を考えることにしよう。いま，モータの 1 分間の回転速度を N[min^{-1}] とする。

$$s = \frac{N_0 - N}{N_0} \tag{2-2}$$

を**すべり**(slip)と呼ぶ。また，$N_s = s\ N_0 = N_0 - N$ を**すべり速度**(slip speed)と呼ぶ。

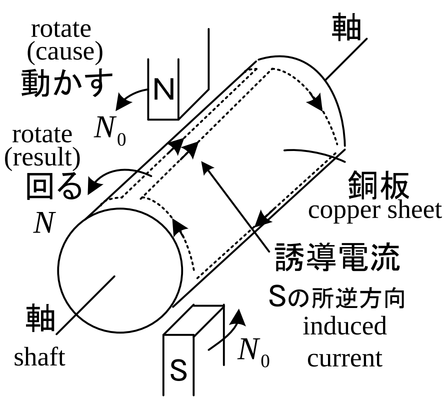


図 2-9　回転磁界で回る誘導モータ

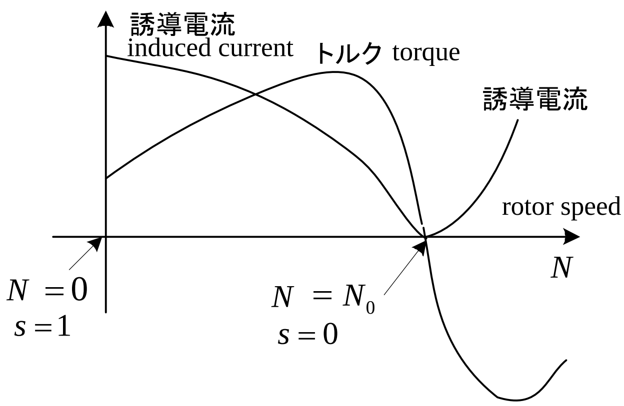


図 2-10　誘導モータの基本特性

$N = N_0$ のとき：　この場合銅板上のある点に対して，磁界の動く速度は 0 である。このとき，磁界の変化が起こらず，**誘導起電力**が発生しない。よって，誘導電流は流れない。誘導電流が流れないから，銅板に働く力も 0 になる。普通の運転では，トルクが働かないのに回ることはないが，負荷側からのトルクにより同期速度で回ることはあり得る。このとき，$s = 0$ である。

$N < N_0$ のとき：　モータが回転磁界より遅れて回る場合である。銅板上のある点でみると，磁界が $N_0 - N$ の速度で動いている。従って，図 2-1 で説明したような誘導電流が流れ，力はモータの回転方向に働く。これは，普通の誘導モータとしての運転状態である。普通，小出力機で $s = 0.05 \sim 0.1$，中・大出力機で $s = 0.025 \sim 0.05$ で運転(operation)され，この付近が**力率**，**効率**も高い。

$N > N_0$ のとき：　モータが回転磁界より速く回る場合である。銅板上でみると，磁界が $N - N_0$ の速度で回転と反対方向に動いている。この場合には，図 2-1 で説明したものと逆方向の誘導電流が流れる。よって，モータに対しては**ブレーキ力**となる。**誘導発電機**(induction generator)として運転されている状態で，モータを車に使ったとき，坂道を降りる場合に起こることがある。$s < 0$ である。

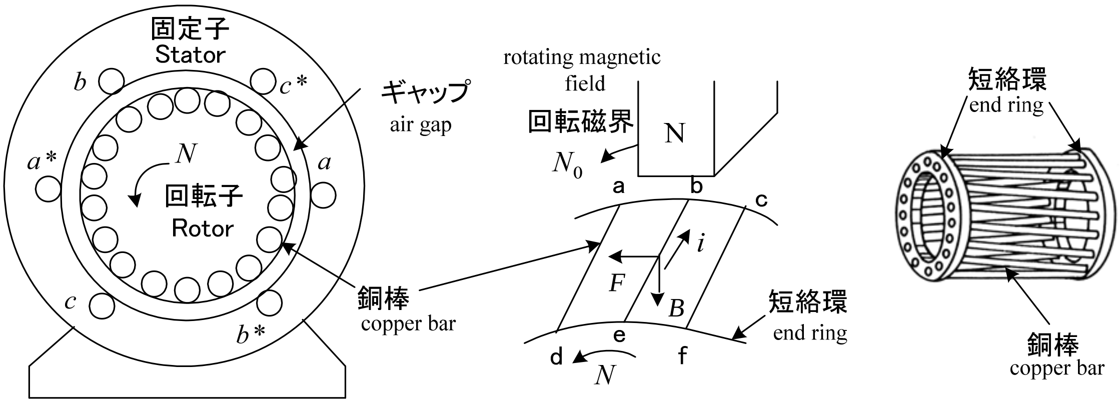
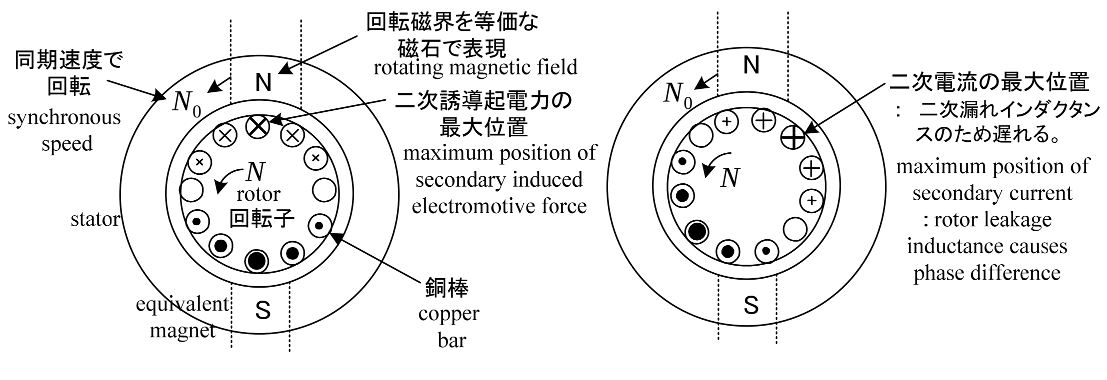


図 2-11　モータの断面図(cross section)とトルク発生の原理(principle)

実際の回転子は，銅板の代わりに図 2-11 に示されるように銅棒やアルミ棒を**端絡環**(end ring)（銅またはアルミ）でつないだ構造（**かご形誘導電動機**：squirrel-cage induction motor）である。しかし，考え方は全く同じである。すなわち，回転磁界（磁束密度 B）は N 極から S 極に向かってできているが，N 極の下では誘導電流が図の向きに流れる。よって，フレミングの左手の法則より図の向きに力(force) Fを生じ，回転子(rotor)は回る。

図 2-11 をもう少し詳しく書くと図 2-12 のようになる。磁石の真下では起電力が最大になるが，誘導電流（二次電流）は銅棒（二次回路）の**漏れインダクタンス**のため最大となるタイミングが遅れる。起電力や二次電流が最大となる位置は同期速度 N_0 で移動する。回転子はもともと N 回転しているから，その差 $N_0 - N$ が**二次回路の周波数**に対応する。



(a) 起電力の分布　　　　　　　　(b) 誘導電流（二次電流）の分布

図 2-12　回転磁界により回転子に誘導する起電力と誘導電流（二次電流）(断面図)[(6)]

ある銅棒に目印をつけておく。その銅棒には誘導起電力が生じるが，向きは時間とともに変化する。等価な磁石のN極が来たら（上を通過したら）⊗方向に生じ，S極が来たら⊙方向に生じる。このNとSが1秒間に何回通過するかが，銅棒の周波数である。1分間当たりで考えると，等価な磁石のN極は同期速度N_0回回るが，回転子もN回回転しているから，その差$N_0 - N$回だけ目印の点をN極が追い越していくのである。

○　誘導モータの等価回路

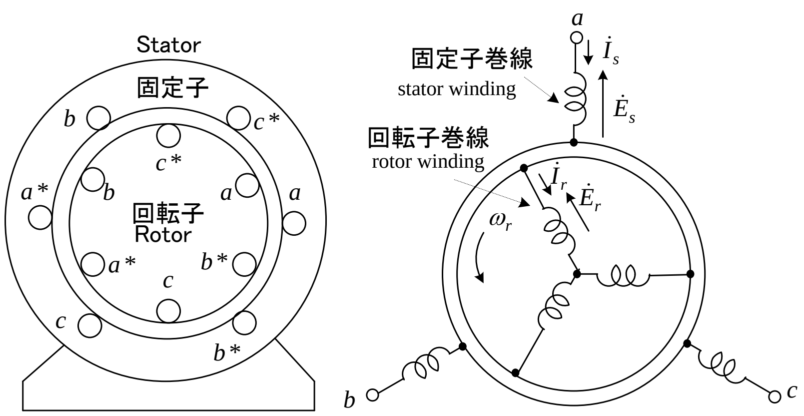
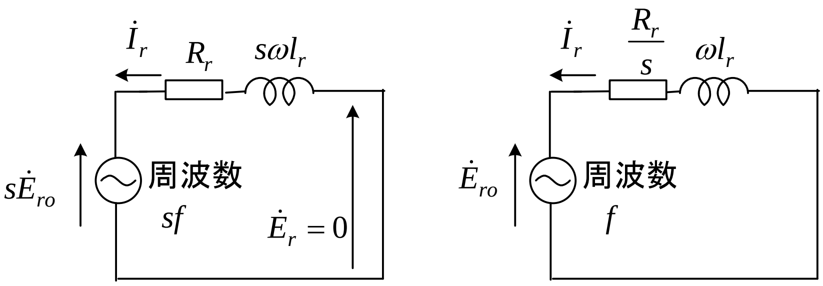


図 2-13　回転子も等価な3相巻線で表した誘導モータモデル

これまで回転子は銅板や銅棒で考えた。実際，かご形の銅棒またはアルミニウムがよく用いられる。このほかに回転子にも固定子と同じように三相巻線を巻いた**巻線形誘導電動機**がある。巻線形は回転子巻線から**スリップリング**を通して3相の端子が出ており，抵抗を接続したり，インバータを接続したりする（**両側給電誘導機**[51]doubly-fed induction motor 風力発電に利用）ことができる。かご形，巻線形いずれの場合も，理論解析を行うときは，図2-13に示すように回転子を3相巻線として考えてよい。

速度が 0 で静止しているとき，固定子巻線と回転子巻線の関係は**変圧器**とみなすことができる。それでは，**すべり**sで回転しているときはどうであろうか？回転子巻線に誘起する電圧（誘導起電力 induced electromotive force 略 emf）は，相対速度に比例するから，静止時のs倍となる。また，誘導起電力の周波数も電源周波数のs倍すなわちsfとなる。これは図2-12で説明した。よって，1相分について，回転子は図2-14(a)で表せる。図中，電源の角周波数は$\omega = 2\pi f$で，コイルは**リアクタンス**(reactance)で表示している。時間を含めて電圧と電流のフェ-ザ表示を考えると

$$\dot{I}_r\, e^{js\omega t} = \frac{-s\dot{E}_{ro}e^{js\omega t}}{R_r + js\omega l_r} = \frac{-\dot{E}_{ro}e^{js\omega t}}{\dfrac{R_r}{s} + j\omega l_r} \tag{2-3}$$



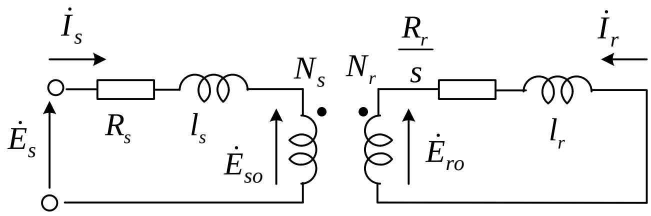
(a)　実際の回路　　　　　　　　(b)　等価回路

図 2-14　回転子 1 相分の等価回路(equivalent circuit)

両辺に　$e^{j(1-s)\omega t}$ を掛けて

$$\dot{I}_r\, e^{j\,\omega t} = \frac{-\dot{E}_{ro}e^{j\,\omega t}}{\dfrac{R_r}{s} + j\omega l_r} \tag{2-4}$$

となる。よって $\dot{I}_r$, $\dot{E}_{r0}$ は周波数 f のフェーザと考えても良い（(b)図）。(b)の等価回路を用いることで，同じ周波数になったので変圧器の等価回路がそのまま使えて，誘導モータの等価回路が図 2-15 ように得られる。図 2-14 (a) で $\dot{E}_r = 0$ となっているのは，図 2-13 に示すように回転子巻線の端子(terminal)を短絡(short)しているため（かご形はもともと短絡している）である。$\dot{E}_{s0}$ と $\dot{E}_{r0}$ は同位相である。変圧器同様，固定子を**一次**，回転子を**二次**という。



R_s ：固定子巻線抵抗(stator resistance) ， R_r ：回転子巻線抵抗(rotor resistance)

l_s ：固定子漏れｲﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ(stator leakage inductance)， l_r ：回転子漏れｲﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ (rotor)

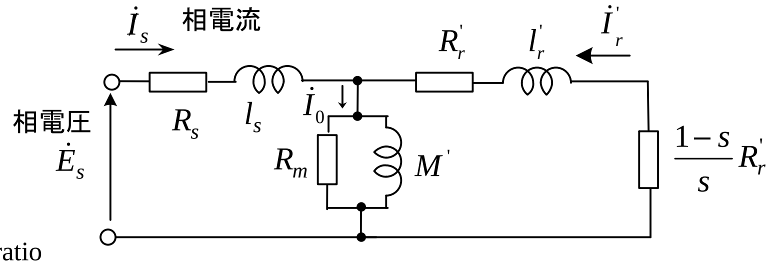
図 2-15　すべり s で運転中の誘導モータの定常等価回路（1 相分）

モータが出すトルクを求めるために，エネルギーの流れを考えよう。

$$\frac{R_r}{s} = R_r + \frac{1-s}{s}R_r \tag{2-5}$$

と分解すると． R_r で消費されるエネルギーは**銅損**(copper loss)で熱となる．従って，$(1-s)R_r/s$ で消費されるエネルギーが**機械的出力**となりトルクを発生すると考えてよい。このように分解すると，変圧器と同じように，回転子側を固定子側に換算し，鉄損を含めたモータの等価回路が図 2-16 のように求められる． $\dot{I}_0$ は**励磁電流**(exciting current)と呼ばれ

る。M' が作る磁束がエアギャップにできる**ギャップ磁束**である。ギャップ磁束は一次電流 $\dot{I}_s$ と二次電流 $\dot{I}_r$ によって作られる**回転磁界**である（$\dot{I}_r$ も回転磁界を作る）。R_s と l_s は小さいので，励磁電流 $\dot{I}_0$ や M'の作るギャップ磁束は端子電圧と周波数だけでほぼ決り，二次電流（負荷，すべり）にほとんど関係しない。負荷が変化し二次電流が変化して二次巻線が作る磁束が変化しても，それを打ち消すような一次電流が流れてその分の磁束を打ち消し，ギャップ磁束はあまり変わらないと考えてよい。これは低速運転時以外の定常状態でほぼ成立する。なお変圧器でも同じことが言える。**相電圧**$|\dot{E}_s|$は，**線間電圧**(line voltage)の実効値（モータ端子間の電圧計(voltmeter)の読み）を $\sqrt{3}$ で割ることで得られる。なお，モータの回転子側定数は固定子側に換算され，$R_r' = a^2 R_r, l_r' = a^2 l_r, M' = aM$ として測定される。



turn ratio

実効巻数比 $a = N_s / N_r,\ R_r' = a^2 R_r,\ l_r' = a^2 l_r,\ \dot{I}_r' = \dot{I}_r / a,\ M' = aM$

R_m：鉄損抵抗(iron loss resistance)，M'：相互インダクタンス(mutual inductance)

図 2-16　**誘導モータの T 型定常等価回路**(steady-state equivalent circuit)（1 相分）

図より，モータの**機械的出力** P_0［W］は，三相分では 3 倍して，

$$P_0 = 3\frac{1-s}{s}R_r' \left|\dot{I}_r'\right|^2 \tag{2-6}$$

となる．従って，**モータが発生するトルク**(torque)T_e［Nm］は，

$$T_e = P_0 / \omega_m \tag{2-7}$$

ここで，ω_m は**回転角速度（機械角）**[rad/s]で，$\omega_m = 2\pi N / 60$ である。

回転角速度（電気角）は，$\omega_r = \frac{P}{2}2\pi\frac{N}{60}$，**同期角速度（電気角）** $\omega = \frac{P}{2}2\pi\frac{N_0}{60} = 2\pi f$

である。

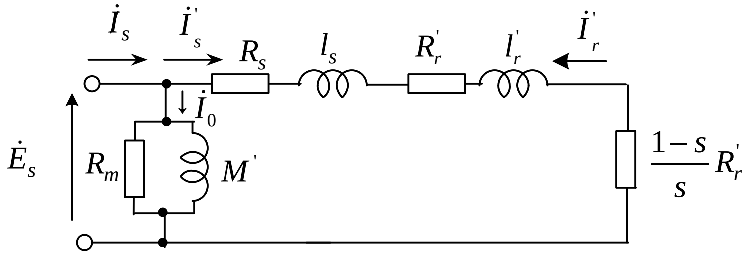


図 2-17　定常時の簡易等価回路(approximate equivalent circuit)

簡易等価回路は R_s と l_s の電圧が相対的に小さいと考えることで得られる。簡易等価回路を用いると，電流やトルクが容易に計算できる。しかし，低速運転時は加える端子電圧が低いので誤差が大きくなる。

$$\left|\dot{I}_r^{'}\right| = \frac{\left|\dot{E}_s\right|}{\sqrt{(R_s + \frac{R_r^{'}}{s})^2 + (\omega l_s + \omega l_r^{'})^2}} \tag{2-8}$$

(2-6),(2-7),(2-8)より， $\omega_m = 2(1-s)\omega / P = 4(1-s)\pi f / P$ だから近似トルクは次式となる.

$$T_e = \frac{3P}{4\pi f}\left|\dot{E}_s\right|^2 \frac{R_r^{'} / s}{(R_s + R_r^{'} / s)^2 + (\omega l_s + \omega l_r^{'})^2} \tag{2-9}$$

(2-9)を s で微分するとトルクが最大となるすべり s_m が次式よりもとまる。

$$s_m = \frac{R_r^{'}}{\sqrt{R_s^2 + \omega^2 (l_s^2 + l_r^{'2})}} \tag{2-10}$$

問題 1　60Hz,　4 極の三相誘導モータが 1710min^{-1} で回転し，2kW の機械的出力を出している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　同期速度はいくらか。

(2)　すべりはいくらか。

(3)　回転子の誘導起電力の周波数はいくらか。

(4)　モータが発生しているトルクはいくらか。

(5)　回転子電流が作る回転磁界は，(a)回転子に対して，(b)固定子に対して，(c)固定子電流が作る回転磁界に対して，それぞれいくらか。

〔答〕(1)　1800 min^{-1}　(2)　5%　(3)　3Hz　(4)　11.2Nm　(5)(a) 90 min^{-1}　(b)　1800 min^{-1}
(c)　0 min^{-1}

○　誘導モータの特性

図に示すように，誘導モータで電気自動車のタイヤを回すことを考えてみよう。

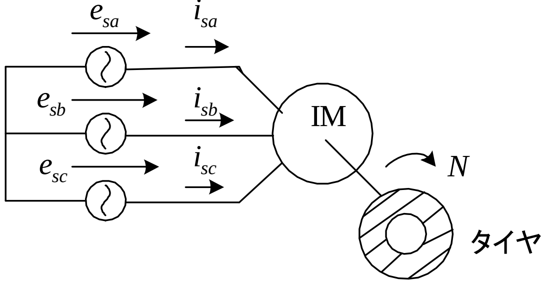


図 2-18　誘導モータを使った電気自動車

三相電源電圧は次式で与えられ，V,ω は一定とする（実際に電気自動車を動かすならV,ω は可変でなくてはならない）。

$$\begin{aligned} e_{sa} &= \sqrt{2}V\sin\omega t \\ e_{sb} &= \sqrt{2}V\sin(\omega t - 2\pi/3) \\ e_{sc} &= \sqrt{2}V\sin(\omega t + 2\pi/3) \end{aligned} \tag{2-11}$$

但し，$\omega = 2\pi f$ ：電源角周波数(angular frequency)[rad/s]

V：相電圧実効値(effective value of phase voltage)[V]，$V = \left|\dot{E}_s\right|$ （図 2-16）

図 2-19 に示すように，電源の周波数 f によって同期速度 N_0 が決まり，モータの**発生トルク** T_e，流れる相電流 I （実効値）は回転速度 N によって大きく変化する。電流は，定常時

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi) \\ i_{sb} &= \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3) \\ i_{sc} &= \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi + 2\pi/3) \end{aligned} \tag{2-12}$$

で表される。 $I = \left|\dot{I}_s\right|$ の関係がある(図 2-16)。

坂道を登る場合を考えよう。モータには，重力(gravity)と風の圧力(pressure)がかかり，合計としての**負荷トルク**(load torque)T_l が図の特性とする。$T_e > T_l$ では，電気自動車は加速(acceleration)し，最終的に $T_e = T_l$ となるところで速度が一定となる。これがⅠの**力行運転**(motoring operation)である。図の発生トルク T_e は同期速度 N_0 の向きを正として表わしている。負荷トルク T_l は同期速度 N_0 の逆向きを正とする。

坂道を下るときに，同期速度よりも速い速度で回転すると，誘導機はブレーキ力を発生する。この場合を**回生運転**(regenerating operation)と呼び，**誘導発電機**(induction generator)として電源にエネルギーを返す。低速の場合でも，インバータで電源周波数を低くして同期速度 N_0 を小さくすればⅡの回生運転になる。同期速度で回転し，すべりが 0 のときモータの出すトルクは 0 で，電流は最小(minimum)となる．このときの電流が**励磁電流**(exciting current)$\left|\dot{I}_0\right|$ （図 2-16）である。

通常は，ⅠまたはⅡの運転状態になる。Ⅲの運転状態は**逆相制動(plugging)**と呼ばれ，回転磁界と逆方向にモータが回転している。この制動法は，回転している電動機の 3 端子のうち２端子の接続を運転中に入れ替えて（相順の入れ替え）回転磁界の向きを逆にし $s \approx 0$ から $s \approx 2$ にして，回転を急停止する場合に利用できる。逆回転を防ぐため，停止寸前に電源から切り離す必要がある。図のような発生トルクと負荷トルクの特性であれば，両者が一致する点は不安定で，速度は 0 に向うか回転磁界と逆向きに増加することになる。電源と負荷のエネルギーが主に二次抵抗で消費されるので，モータの過熱に注意が必要である。

自動車をバックさせる場合は，$\omega < 0$ として，相順を逆(3 端子の 2 つを入れ替える)にして逆方向の回転磁界を作ればⅠ，Ⅱ，Ⅲの運転が同様に可能である(Ⅲでは $\omega > 0$ とする)。

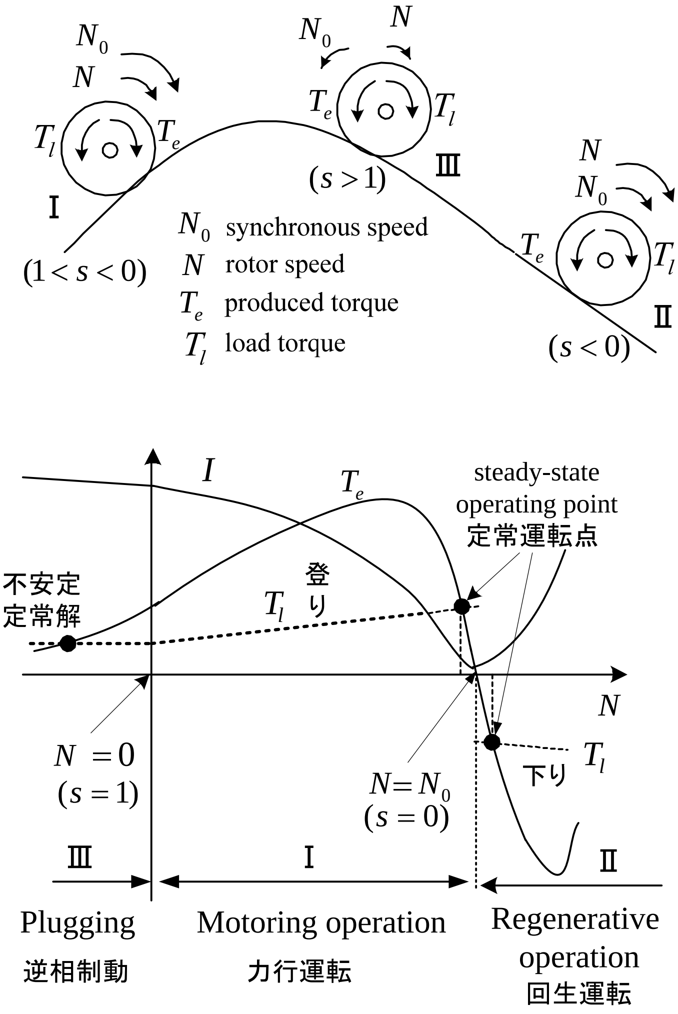
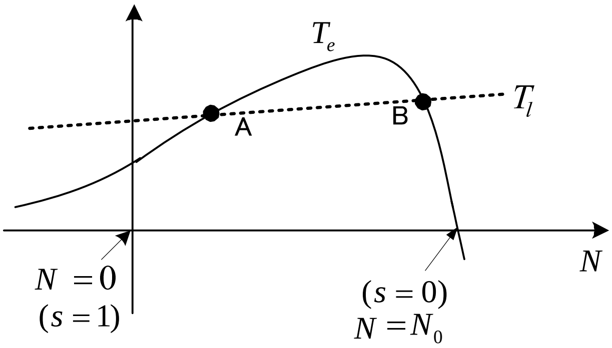


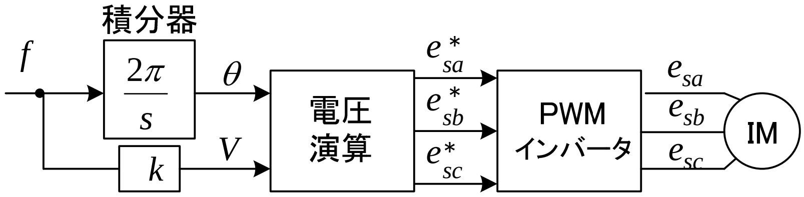
図 2-19　**誘導モータの定常特性**

問題 2　速度が一定の定常運転時には，発生トルクと負荷トルクは等しくならなければならない。図の定常トルク特性で A 点は不安定となり運転できないが，B 点は安定運転点である。この理由を説明せよ。（厳密には，過渡状態の安定解析をしないといけないが，この定常トルク特性から安定性が推測できる場合が少なくない。）



○　誘導モータの *V/f* 一定制御

誘導モータをインバータで速度制御する場合，最も簡単な制御法が電圧と周波数の比を一定に保ちながら，両者を変化させる ***V/f*** **一定制御**である。図 2-20 に *V/f* 一定制御を示す。



$$e_{sa}^* = \sqrt{2}V\sin\theta \quad e_{sb}^* = \sqrt{2}V\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \quad e_{sc}^* = \sqrt{2}V\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)$$

図 2-20　*V/f* 一定制御(constant volts/Hz control)（比例定数 k ）

この原理を以下に示す。図 2-16 で，一次抵抗 0，漏れインダクタンス 0，鉄損抵抗∞とすると図 2-21 の等価回路が得られる。図より相電圧 V とインバータ周波数 f の比を一定に保つと励磁電流 I_0 が一定となり，その結果ギャップ磁束が一定になる。これは磁束の飽和を避けるのに都合が良い。また，トルクは(2-9)より，次式となり, すべり周波数 f_{sl} に比例する。

$$T_e = \frac{3P}{4\pi}(\frac{V}{f})^2 \frac{f_{sl}}{R_r^{'}} \qquad f_{sl} = s\,f \tag{2-13}$$

このときのトルク－速度特性は図 2-22 となり，周波数と電圧を同時に変えて速度が制御できる。しかし，実際には無視した一次抵抗の影響で特に低速運転時にトルクが低下し，運転できなくなる（図 2-23）。このため低速時には V に**ブースト電圧**を加えてトルクの低下を防ぐ。

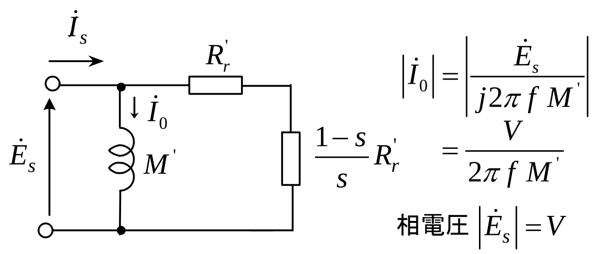


図 2-21　理想誘導機

V/f 一定制御は定常等価回路に基づいた制御であり，過渡状態も含めた瞬時トルクを制御することはできない。

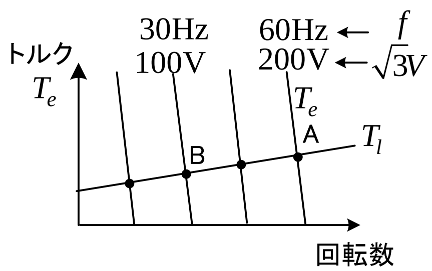


図 2-22　理想誘導機の *V/f* 一定制御

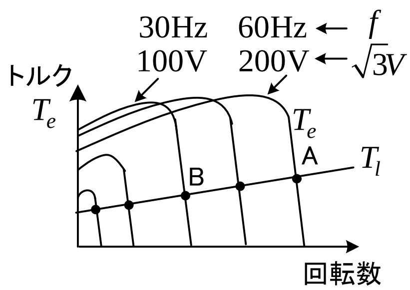


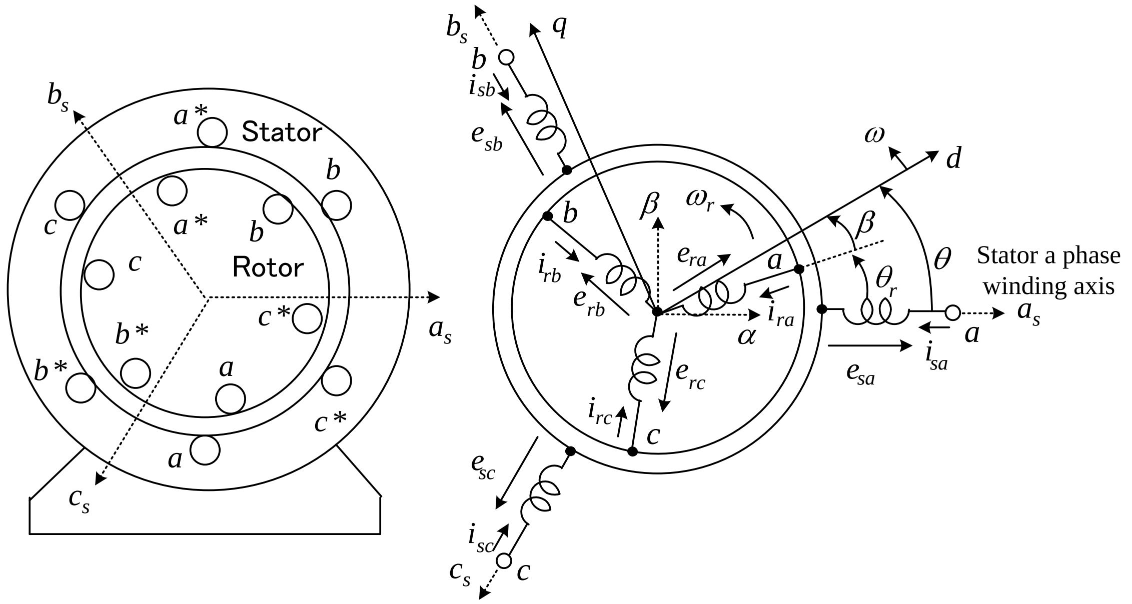
図 2-23　*V/f* 一定制御(ブーストなし)

第３章　誘導モータのベクトル制御

○　誘導モータのモデリング(modeling of induction machine)

誘導モータを電気回路として数学的に表現するために，三相回路について成り立つ微分方程式（モデル）を変数変換して静止座標系または回転座標系の簡単な式（モデル）にしたものが良く用いられている(1)(2)(9)(16)(19)(35)(47)(51)。ここで導出するモデルは定常及び**過渡状態**で成立し一般的である。この理論を同期機も含め**2軸理論**と呼ぶことにする。

図 3-1 に，2 極，三相の誘導モータを示す。かご形回転子の場合にも等価的に三相巻線と考えて良い。P 極のモータでもモデルは同じで，単にトルクの項が $P/2$ 倍になる。



断面図(cross section)　　　　3 相巻線モデル(3 phase winding)

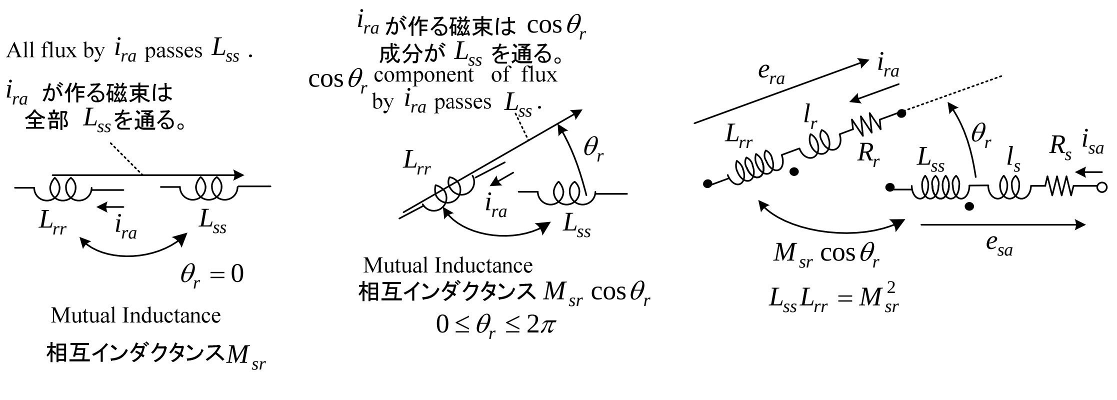


図 3-1　2 極(2 poles)，三相誘導モータ(three-phase induction motor)と d-q 軸(d-q axis)

各巻線のインダクタンスを**漏れインダクタンス**(leakage inductance) l_s, l_r とそれを除いた**主自己インダクタンス** L_{ss}, L_{rr} の和で表すと，固定子と回転子の間の**相互インダクタンス**(mutual inductance) M_{sr} （巻線軸が一致したとき）には密結合の条件が成り立ち，次式で表せる。

$$L_{ss} = N_s^2 / R\,,\ L_{rr} = N_r^2 / R,\ M_{sr} = N_s N_r / R,\ L_{ss} L_{rr} = M_{sr}^2 \tag{3-1}$$

ここで，N_s ：一次実効巻数，N_r ：二次実効巻数，R : 磁気抵抗。図の様に電流を定義し，固定子(stator)及び回転子(rotor)の三相巻線の**鎖交磁束**(fluxlinkage)をそれぞれ $\psi_{sa}, \psi_{sb}, \psi_{sc}$ 及び $\psi_{ra}, \psi_{rb}, \psi_{rc}$ とすると, 他の巻線による磁束の寄与を**巻線軸**(winding axis)のなす角の余弦(cos)成分と考えることができて以下の式を得る。例えば，i_{sb} の ψ_{sa} への寄与は，なす角が $2\pi/3$ で L_{ss} 同士のなので相互インダクタンスも L_{ss} となり，$L_{ss}\cos(2\pi/3) i_{sb}$ となる。

$$\begin{bmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s + L_{ss} & -L_{ss}/2 & -L_{ss}/2 \\ -L_{ss}/2 & l_s + L_{ss} & -L_{ss}/2 \\ -L_{ss}/2 & -L_{ss}/2 & l_s + L_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}$$

$$+ M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_r + L_{rr} & -L_{rr}/2 & -L_{rr}/2 \\ -L_{rr}/2 & l_r + L_{rr} & -L_{rr}/2 \\ -L_{rr}/2 & -L_{rr}/2 & l_r + L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix}$$

$$+ M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

ここで，θ_r は**回転角速度**(rotor angular speed) ω_r を用いて次式で表せる。

$$\theta_r = \int_0^t \omega_r \, dt + \theta_r(0) \quad (\ \omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}\ ) \tag{3-4}$$

2 極のモデルで角度を定義してい るが，P 極の場合には θ_r, ω_r を**電気角**(electrical angle)表示と考えればよい。

三相巻線に成り立つ電圧の式(voltage equation)は，鎖交磁束を用いて次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

$$\begin{bmatrix} e_{ra} \\ e_{rb} \\ e_{rc} \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

ここで，$p = d/dt$ は微分演算子(derivative operator)である。
図より，三相電流について

$$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0 \tag{3-7}$$
$$i_{ra} + i_{rb} + i_{rc} = 0 \tag{3-8}$$

が成り立つ。これらを(3-5)，(3-6)式に代入して次式を得る。

$$e_{sa} + e_{sb} + e_{sc} = 0 \tag{3-9}$$
$$e_{ra} + e_{rb} + e_{rc} = 0 \tag{3-10}$$

いま，次式に示す固定子 a,b,c 三相量から $d,q,0$ 量への変数変換（置き換え）を定義する。≜使用。d,q 量は，a,b,c 相の巻線軸と d,q 軸との成す角の cos 成分を用いて作られる。

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \\ f_{s0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} \tag{3-11}$$

逆に，

$$\begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \\ f_{s0} \end{bmatrix} \tag{3-12}$$

(3-11)，(3-12)の f **は一次電流**(primary current) i，**一次相電圧**(primary phase voltage) e，**一次鎖交磁束**(primary flux linkage) ψ **を意味し**，**同じ変数変換を行う**。ここで，θ は図 3-1 に示すように<u>任意の角速度</u>(arbitrary angular speed) ω で回転する q 軸と a 相巻線軸のなす角で，次式で表せる。ω は一定とは限らない。静止させて $\omega = 0$ でもよい。

$$\theta = \int_0^t \omega dt + \theta(0) \quad , \quad \omega = d\,\theta / d\,t \tag{3-13}$$

また，回転子側の $d-q$ 変換にも，巻線軸の cos 成分を考え，(3-11)，(3-12)式で，θ の代わりに $\beta = \theta - \theta_r$ を用いる。添え字は s の代わりに r を用いる。すなわち，

$$\begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \\ f_{r0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\beta & -\sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \tag{3-14}$$

逆も同様に求められる。

(3-14)の f は**二次電流**(secondary current) i，**二次相電圧**(secondary phase voltage) e（かご形では0），**二次鎖交磁束**(secondary flux linkage) ψ を意味し，同じ変数変換を行う。

(3-5)，(3-6)を(3-11)，(3-14)で $d,q,0$ 量へ変換し， 0 相成分が 0 になることから，これらの式を除くと次式が得られる（導出は付録 1 参照）。

任意座標系モデル(arbitrary reference frame model)：

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e_{rd} \\ e_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega L_s & Mp & -\omega M \\ \omega L_s & R_s + L_s p & \omega M & Mp \\ Mp & -(\omega - \omega_r)M & R_r + L_r p & -(\omega - \omega_r)L_r \\ (\omega - \omega_r)M & Mp & (\omega - \omega_r)L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

但し， $L_s = M + l_s$, $L_r = M + l_r$, $M = \frac{3}{2} M_{sr}$

(3-15)には， $\theta(0)$は入らないが，座標変換するときに関係し，d-q 量が違ってくる。**かご形モータ**では二次側が短絡されているので，$e_{rd} = e_{rq} = 0$ としてよい。なお測定値がそのまま使えるように二次側の諸量は図 2-16 に示したように一次側に換算した値とする (13)。本来なら(3-15)は，**実効巻数比** $a = N_s / N_r$ を用いて， $e_{rd}^{'} = a\,e_{rd}$, $e_{rq}^{'} = a\,e_{rd}$, $M^{'} = aM$,
$M_{sr}^{'} = aM_{sr}$, $L_r^{'} = a^2 L_r$, $l_r^{'} = a^2 l_r$, $R_r^{'} = a^2 R_r$, $i_{rd}^{'} = i_{rd} / a$, $i_{rq}^{'} = i_{rq} / a$ 　のようにダッシュを書くべきだが簡単のため省いた。**以下も二次側の諸量は全て一次側に換算した値である。**

鎖交磁束(flux linkage)については，

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

が成立することが証明できる。(3-16)の二次側の鎖交磁束も一次側に換算した値で $\psi_{rd}^{'}(=a\psi_{rd})$, $\psi_{rq}^{'}(=a\psi_{rq})$ を意味する（ダッシュを書くべきだが省く）。**回転子（二次）鎖交磁束**(rotor flux linkage)を用いた次式はベクトル制御などの理論としてよく利用される。

任意座標系モデル(arbitrary reference frame model)：

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & -\omega\sigma L_s & \dfrac{M}{L_r} p & -\dfrac{\omega M}{L_r} \\ \omega\sigma L_s & R_s + \sigma L_s p & \dfrac{\omega M}{L_r} & \dfrac{M}{L_r} p \\ -\dfrac{M}{\tau_r} & 0 & \dfrac{1}{\tau_r} + p & -(\omega - \omega_r) \\ 0 & -\dfrac{M}{\tau_r} & \omega - \omega_r & \dfrac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

ただし， $\sigma = 1 - \dfrac{M^2}{L_s L_r}$， $\tau_r = \dfrac{L_r}{R_r}$ （**回転子時定数**：rotor open circuit time constant）

静止座標系(stationary reference frame)で考える場合には， $\omega = 0$ とおいて，区別するため $d \to \alpha, q \to \beta$ と置き換えるだけでよい。変換行列は， θ に一定の値を入れるなら θ はどんな値でもよい。普通は， $\theta = 0$ と選ぶ。このとき，固定子側の変換は

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s0} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

であり，電圧や鎖交磁束も全く同じ変換行列となる。回転子側は，(3-14)で， $\theta = 0$ なので $\beta = -\theta_r$ とすればよい。回転子側の変換行列は固定子側と違って**静止座標系でも**定数にならない。(3-17)に $\omega = 0$ を代入し，次式となる。

静止座標系(stationary reference frame)：

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & 0 & \dfrac{M}{L_r} p & 0 \\ 0 & R_s + \sigma L_s p & 0 & \dfrac{M}{L_r} p \\ -\dfrac{M}{\tau_r} & 0 & \dfrac{1}{\tau_r} + p & \omega_r \\ 0 & -\dfrac{M}{\tau_r} & -\omega_r & \dfrac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

誘導モータの**発生トルク(torque)**は,

$$
\begin{aligned}
\tau_e &= \frac{P}{2} M (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \\
&= \frac{P}{2} \frac{M}{L_r} (i_{sq} \psi_{rd} - i_{sd} \psi_{rq}) \\
&= \frac{P}{2} \frac{M}{L_s} (i_{rd} \psi_{sq} - i_{rq} \psi_{sd}) \qquad (3\text{-}20)
\end{aligned}
$$

で与えられる。なお, 静止座標系でも $d \to \alpha, q \to \beta$ とするだけで上式はそのまま使える。

以上述べた式は，誘導モータの基本式として極めて重要で，多くの論文がこれらの式から出発している。

定常状態の解析では，回転座標系で考える場合は d-q 量は一定値になるので $p = 0$，静止座標系で考える場合には α–β 量は正弦波となるからフェーザ表示して $p = j\omega$（ω は電源の角周波数）とすればよい。また定常時の一相分の等価回路として図 3-2 が導出できる（導出は付録 1 図 a1-5)。図 3-2 は図 2-16 で鉄損抵抗を除いたものと全く同じものである。先に述べたように図 3-2 の二次側の抵抗やインダクタンスは一次側に換算した値である。

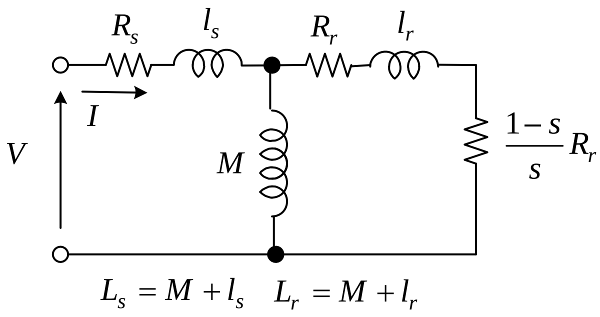
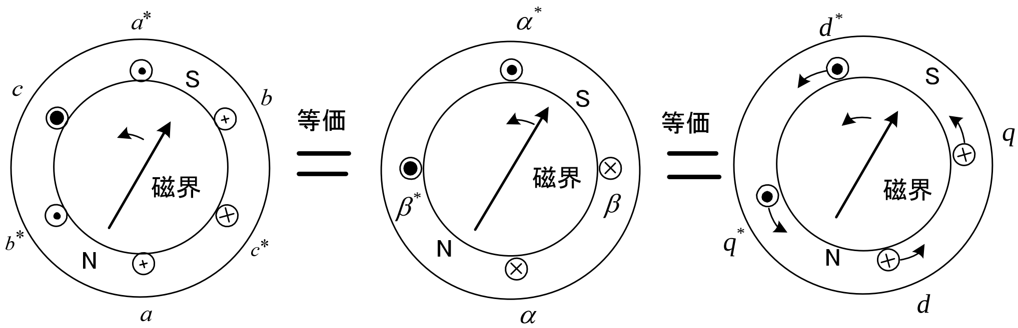


図 3-2　定常運転時の等価回路（1 相分）steady state equivalent circuit

○　**誘導モータのベクトル制御**(vector control of induction motor)

誘導モータの断面図で固定子電流の分布をまず考えてみよう（図 2-7 参照)。図 3-3 に示すように固定子の三相巻線は動かないが三相交流を流すことで**回転磁界**ができる。二相 α，β 巻線でも二相交流を流せば回転磁界ができる（図 2-4 参照)。一方，２つの直交する d，q 巻線に直流電流を流し，同期速度で巻線を回転させると（想像上）やはり回転磁界ができる。従って同じ回転磁界を作るなら，これらの電流分布は等価と考えてよい。

誘導モータは３相交流電流を固定子巻線に流して回転磁界を作り，その結果回転子の導



(a) 3相巻線：固定(静止)
3相交流を流す。

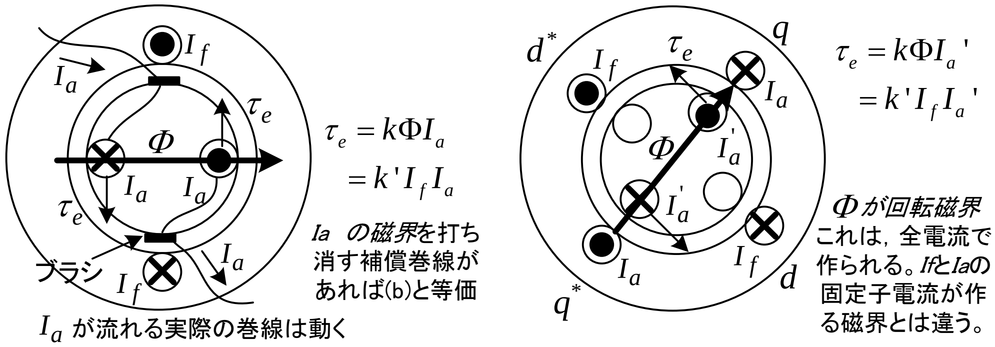
(b)2相巻線：固定(静止)
2相交流を流す。

(c)2相巻線：回転
直流を流す。

図 3-3　回転磁界を作る巻線はいろいろ考えられる！

体に誘導電流が流れる。回転子電流はすべり速度で回転する回転磁界を回転子上に作るが，回転子自体が回転するので，外から見れば同期速度で回転する回転磁界を作る。従って，ギャップにできる**回転磁界（ギャップ磁束）**$\varPhi$ は，最終的に固定子電流と回転子電流の両方で作られることになる。この場合でも，$\varPhi$ はどこかを向いて同期速度で回転している。そこで，図 3-3 (c)の考え方を回転子側にも適用して，$\varPhi$ の向きを基にして，図 3-4 (b)の固定子と回転子に仮想巻線（２軸理論で詳述）を考えてみる。これらの巻線は全て $\varPhi$ と一緒に同期速度で回転するものとする（注 $I_a{}'$ は回転子と同じ速度で回転していない)。すると電流分布は図 3-4(b)のようになり，I_a と $I_a{}'$ が作る磁束は打ち消し合うはずである。そうでないと $\varPhi$ がその向きであることと矛盾する。この結果 I_f が $\varPhi$ を作っていることとなる。回転子の○印の巻線には I_f が一定なら電流が流れない（後述の解析で明確になる)。

ところで，直流モータでは，界磁電流 I_f による磁束 $\varPhi$ の向きが固定され，ブラシと整流子の働きでこれと巻線軸が直交する電機子巻線(たえず変化)に電機子電流 I_a が流れ，トルクが簡単に制御できた。もし，IM でセンサを使い回転磁界 $\varPhi$ の向きが検出できるなら，これを DC モータの界磁磁束とみなし，これと巻線軸が直交する回転子の仮想巻線に電流 I_a を瞬時に流してやることで過渡状態でも同様なトルク制御ができそうである。



(a) DC motor　　　　(b) Induction Motor

図 3-4　DC モータと同じように IM でトルクを発生できないか？

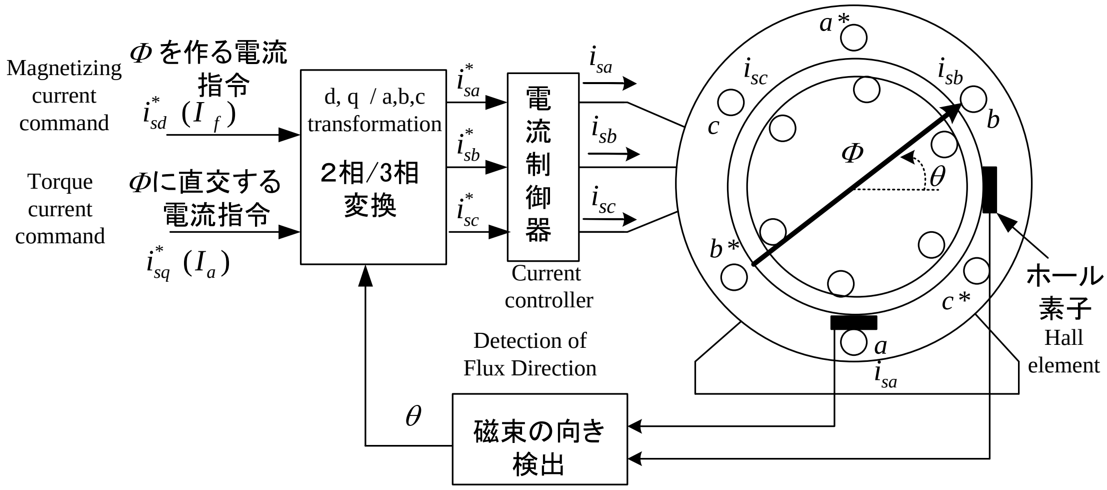


図 3-5　磁束センサを利用した**ベクトル制御**(vector control using flux sensor)

直接形ベクトル制御(direct vector control)

この原理によるトルク制御法は，磁界の向きに基づいて制御することから欧米では，**フィールドオリエンテーション制御**(field-oriented control)，日本では**ベクトル制御**(Vector control) と呼ばれる。なお，この実用化には日本が大きく貢献したので，ベクトル制御という言葉は世界的に使われている。

図 3-5 は, 磁束センサを利用したベクトル制御の基本構成である。ホール素子(Hall element)で回転磁界（磁束Φ）の向き（ギャップの磁束密度の最大位置）θを検出する。2 相/3 相変換は，図 3-4 (b)で直交する仮想 d,q 巻線に流れる直流電流I_f と I_a の空間的な電流分布と三相固定子巻線に流す三相交流電流i_{sa}, i_{sb}, i_{sc} の空間的な**電流分布を等価**（両者が作る磁界を同じにする）にする演算で，次式で与える。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

これを導いてみよう。図 3-6 で，電流が等価となるには，各電流が作る磁束の向き（巻線軸方向）を考慮し，図 3-3(a),(c)の合成磁束が同じになればよいので， k を定数として次式が成り立つ。なお，各電流が作る磁束密度はギャップ中で正弦波状に分布すると考えてよくベクトル的に加算できる。

$$\dot{i}_s = k\,(i_{sa} + i_{sb} e^{j\frac{2}{3}\pi} + i_{sc} e^{-j\frac{2}{3}\pi}) = i_{sd}\, e^{j\theta} + i_{sq}\, j\, e^{j\theta} \tag{3-22}$$

(3-22)の両辺の実部を比べよ。$e^{-j\frac{2}{3}\pi}$ を両辺に掛けて実部を比べよ。これから(3-21)が導ける。

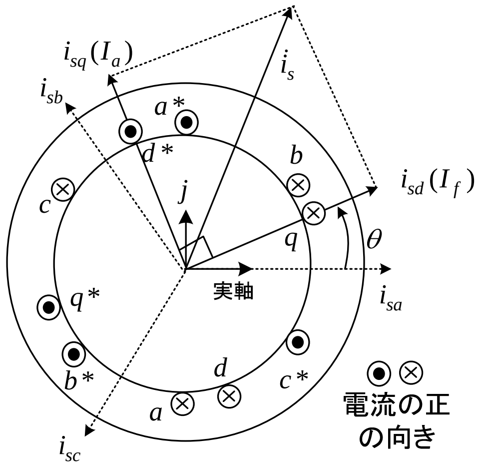


図 3-6　等価な電流分布

$k \;=\sqrt{2/3}$ が d, q 巻線の電力やトルクに余分な係数がつかないからよく用いられる。**絶対変換**と呼ばれる。ただし，d, q 量の大きさの決め方(定義)で k は自由に選べる。$d-q$ 変換は軸の成す角の cos 成分を取って定義したが，その発想が多少理解できよう。

図 3-5 で電流制御は理想的で，次式が成り立つものとする。

$$i_{sa}^* = i_{sa},\, i_{sb}^* = i_{sb},\, i_{sc}^* = i_{sc} \tag{3-23}$$

例えば，I_a を増やしたい場合には b 相巻線に電流を流せばよく，I_f を増やしたいなら a, c 相巻線に電流を流す。DC モータでは, 直接トルクを発生する図 3-4(a)の I_a を制御できるが, IM で直接制御できるのは I_a でベクトル制御を行うとその磁束を打ち消すように I_a' が流れ, 図 3-4(b)のトルクを発生する。

詳しく始動状態から考えてみよう。まず $I_a=0$ で I_f だけを与える。初期値 $\theta=0$ として２相/3 相変換して，$i_{sa}=\sqrt{2/3}I_f$, $i_{sb}=-I_f/\sqrt{6}, i_{sc}=-I_f/\sqrt{6}$ の直流電流が流れる。I_f を流したあと電磁誘導で回転子側にも電流が流れるが i_{sa}, i_{sb}, i_{sc} は直流電流だからすぐに流れなくなる。この結果固定子電流だけで磁界ができて,その方向 θ が検出される。その値は $\theta=0$ となることが図より確認できる。このあと I_a を与えると電磁誘導により I_a' が流れ, トルクが発生して回転子が回転を始める。回転すると I_a' の位置も変わるので θ は 0 でなくなる。しかし，θ の位置を検出しているから常に磁界に直交したところに I_a と I_a' を流すことができ,トルクが発生できる。磁束の向きを検出して I_a を流しているので，I_a と I_a' の電流が作る磁界は常に打ち消し合うはずである。図 3-4 (b)の<u>電流分布はベクトル制御に限らず誘導機の定常時に一般的なもの</u>であるが(d 軸を磁束の向きに選べば良い。過渡状態では○の電流は 0 でない)，I_f, I_a を<u>区別して制御できるのがベクトル制御</u>である。それができるのは θ の検出にある。

理論的に図3－5のシステムを解析してみよう。

実際の誘導機の解析を行うためにはまず座標軸を選ばないといけない。静止，回転なんでも良いが，解析しやすいように図 3-7 のように磁束の方向に d 軸をとる。このとき，(3-11)より $d-q$ 軸電流と三相電流の関係は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \tag{3-24}$$

(3-21)，(3-23)，(3-24)より，次式が成り立つ。(　　)は電流指令の定義。

$$i_{sd} = I_f (\equiv i_{sd}^*),\ i_{sq} = I_a (\equiv i_{sq}^*) \tag{3-25}$$

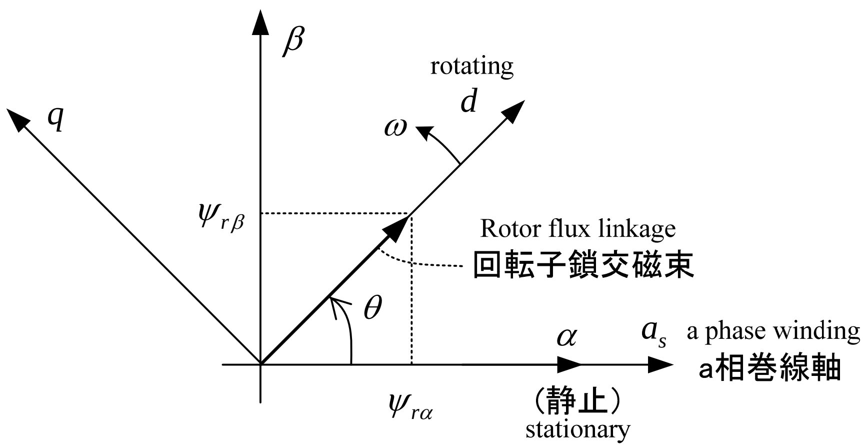


図 3-7　回転磁界 $\boldsymbol{\Phi}$（厳密には回転子鎖交磁束）の向きに d 軸を選ぶ座標系

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{3-26}$$

と定義すると，(3-25)を用いて，(3-17)式より誘導機の回転子側の式は，次式で与えられる。

$$\frac{M}{\tau_r} i_{sd}^* = p\psi_{rd} + \frac{\psi_{rd}}{\tau_r} - (\omega - \omega_r)\psi_{rq} \tag{3-27}$$

$$\frac{M}{\tau_r} i_{sq}^* = (\omega - \omega_r)\psi_{rd} + p\psi_{rq} + \frac{\psi_{rq}}{\tau_r} \tag{3-28}$$

回転子鎖交磁束の向きに d 軸を定義しているから，(3-27)，(3-28)式で

$$\psi_{rq} = 0 \tag{3-29}$$

とおける。厳密には，磁束センサで検出するのはギャップの**磁束密度 $\boldsymbol{B}$**（**回転磁界のこと**）で，回転子鎖交磁束ではないが，回転子鎖交磁束の方向を補正して検出できるものと仮定する。従って，

$$p\psi_{rd} = -\frac{1}{\tau_r}\psi_{rd} + \frac{M}{\tau_r} i_{sd}^* \tag{3-30}$$

$$\omega - \omega_r = \frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r\, \psi_{rd}} = \omega_{sl} \tag{3-31}$$

が成り立つ。i_{sq}^* を変化させると**滑り角周波数** ω_{sl} が変化することが判る。このとき，誘導モータの発生トルクは(3-20) , (3-25), (3-29)より次式で与えられる。

$$\tau_e = \frac{PM}{2L_r} i_{sq}^* \psi_{rd} \tag{3-32}$$

i_{sq}^* に比例してトルクが制御できることがわかる。通常は i_{sd}^* を一定にして磁束の大きさを一定に保つことが多く，この場合(3-30)の解を求めると制御後数秒以内に次式が成立する。

$$\psi_{rd} = M\, i_{sd}^* \tag{3-33}$$

以上のことから，i_{sd}^* を**磁化電流指令**(magnetizing current reference)，i_{sq}^* を**トルク電流指令**(torque current reference)と呼び, これらはそれぞれ DC モータの界磁電流 I_f と電機子電流 I_a に対応する。ベクトル制御では i_{sd}^* を<u>一定にしなければならない訳ではない</u>ので注意せよ。

(3-16), (3-25), (3-29)式より，

$$i_{rd} = \frac{1}{L_r}(\psi_{rd} - M\, i_{sd}^*) = -\frac{p\psi_{rd}}{R_r},\ i_{rq} = -M\, i_{sq}^* / L_r \tag{3-34}$$

これらは，図 3-4(b)の回転子の電流分布に対応する。i_{sd}^* が I_f，i_{sq}^* が I_a，i_{rd} が○印，i_{rq} が $-I_a'$ に対応する。なお，図の場合 i_{sd}^* は一定と仮定し，$i_{rd} = 0$ よりその部分の電流は○で表示している。i_{sd}^* を変化させる場合，(3-30)，(3-34)式で求まる電流が○に流れる。*d*,*q* 軸が仮想巻線の巻線軸で，そこに上記の電流が流れており，図 3-4(b)に対応する。

<u>ベクトル制御を一口で言うと：「誘導モータの磁束の向きを検出し，その向きに基づいてモータの電流を制御し，その結果モータが出すトルクを瞬時に制御しようとする方法である。電流の指令はｄ軸電流とｑ軸電流で，それぞれ直流モータの界磁電流と電機子電流に相当する。つまりｄ軸電流で磁束の大きさを決めて，ｑ軸電流でトルクを制御する。ｄ軸が磁束の向きで，ｑ軸はｄ軸と直交する。」</u>

センサにより磁界を検出するためには，モータにセンサを埋め込む必要があり望ましくなく，実際には用いられていない。実用化されている方法は，誘導モータの数学モデルを利用して，磁束の向きと大きさを演算するものである。

そこで，電流指令 i_{sd}^*, i_{sq}^* を与えて，(3-26), (3-30), (3-31)より次式で磁束の大きさと向きを演

算することにしよう。

$$p\hat{\psi}_{rd} = -\frac{1}{\tau_r^*}\hat{\psi}_{rd} + \frac{M^*}{\tau_r^*} i_{sd}^* \tag{3-35}$$

$$\theta^* = \int_0^t \omega^* dt = \int_0^t (\omega_r + \frac{M^* i_{sq}^*}{\tau_r^* \hat{\psi}_{rd}}) dt \tag{3-36}$$

定数の星印は制御演算に用いる推定値を意味する。この場合の制御系を図 3-8 に示す。もちろん，推定する磁束の方向 θ^* と実際の磁束の方向 θ が等しいとは限らない。

2 相/3 相変換（*dq/abc*）は次式で演算する。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta^* & -\sin\theta^* \\ \cos(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} \tag{3-37}$$

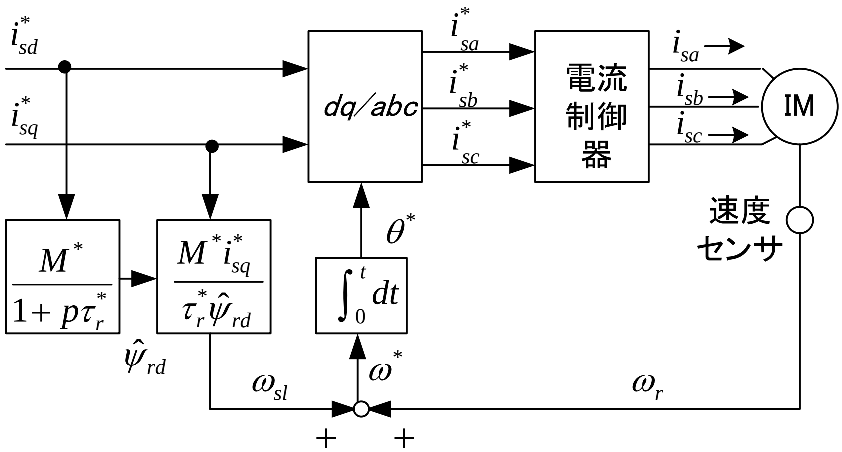


図 3-8　**滑り周波数制御形ベクトル制御**(slip frequency type vector control)
または**間接形ベクトル制御**(indirect vector control)

次の条件，

１．定数は正確である。すなわち，$\tau_r^* = \tau_r, M^* = M$ である。

２．電流制御は理想的である。すなわち，$i_{sa}^* = i_{sa}, i_{sb}^* = i_{sb}, i_{sc}^* = i_{sc}$ である。

３．初期値が定常値である。これは，始動時に i_{sd}^* のみを与え，直流電流を流して磁束を確

立し（しばらく待って定常状態にする），その後 i_{sq}^{*} を変化させる。

を満足するとき，次式が導出できる（付録 2 で詳しく述べる）。

$$\psi_{rd} = \hat{\psi}_{rd}, \psi_{rq} = 0 \tag{3-38}$$

このとき，誘導モータの発生トルクは次式で与えられる。

$$\tau_e = \frac{PM}{2L_r} i_{sq}^{*} \hat{\psi}_{rd} \tag{3-39}$$

従って，i_{sq}^{*} に比例してトルクが制御できることがわかる。通常は i_{sd}^{*} を一定にして磁束の大きさを一定に保つことが多く，この場合(3-35)式より次式が成立する。

$$\hat{\psi}_{rd} = M\, i_{sd}^{*} \tag{3-40}$$

(3-39)が成立するには，3 つの条件が必要であった。しかし，二次抵抗は温度で変化し，インダクタンスは電流で変化する（飽和がある）問題点がある。そこで，パラメータをオンラインで同定する（推定する）研究も行われている。

ベクトル制御された誘導電動機は，新幹線などの電車，工作機械の主軸をはじめ鉄鋼圧延ライン，エレベータ，製紙機，印刷機などに利用されている。

d-q 量と三相量の関係に関して，述べておく。これは誘導機に限らず同期機でも言えることで，(3-12)で定義される固定子の相電圧，相電流に関して成り立つ。

$$\begin{aligned} f_{sa} &= \sqrt{\frac{2}{3}}(f_{sd}\cos\theta - f_{sq}\sin\theta) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{f_{sd}^2 + f_{sq}^2}\ \cos(\theta + \varphi) \end{aligned} \tag{3-41}$$

但し，$\varphi = \tan^{-1}\dfrac{f_{sq}}{f_{sd}}$

従って，相電圧の実効値 V_e や相電流の実効値 I_e は次式で計算できる。

$$V_e = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{e_{sd}^{2} + e_{sq}^{2}}\ ,\ I_e = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{i_{sd}^{2} + i_{sq}^{2}} \tag{3-42}$$

第４章　同期モータ

○　同期発電機のしくみ(mechanism of synchronous generator)

　発電には，水力発電，火力発電，原子力発電，エンジン発電などがあるが，その原理は簡単で，磁界の中でコイルを機械的に回転させる（またはコイルの中で磁石を回転させる）だけでよい。自転車のライトもこの原理である。電磁誘導の法則により，コイルに誘導起電力を発生させるのである。発電の違いは，何により回転させるかの違いで，火力発電ではボイラで蒸気を発生させタービンを回し，その力で発電機を回す。

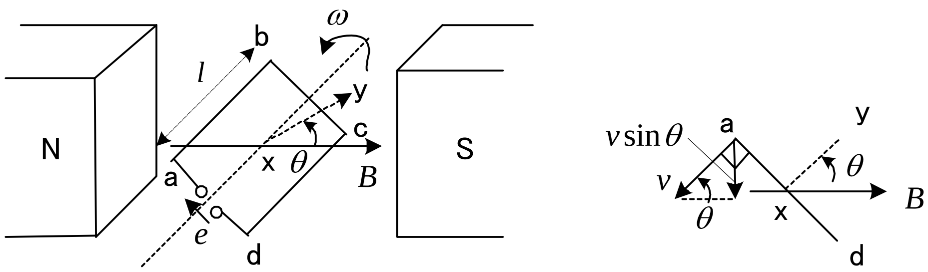


図 4-1　発電機のしくみ

磁束密度(magnetic flux density) B(Wb/m^2) の磁界中で，コイル abcd に力を加え角速度 ω(rad/s) で回転させる。すると，コイルには，電磁誘導により誘導起電力(電圧) e(V) が生じる。これを求めてみよう。コイル片 ab と cd は磁束を切るように動くので電圧が生じる。コイルの角速度は ω だから，その周辺速度 v(m/s) は，半径を掛けて $d\omega/2$ となる。B に直角方向の速度は，その $\sin\theta$ 成分である。従って，**フレミングの右手の法則**(Fleming's right-hand rule)より，ab 間の電圧 e_{ab}（b 点に対する a 点の電圧）は，

$$e_{ab} = Blv\sin\theta = Bl\frac{d}{2}\omega\sin\theta \tag{4-1}$$

cd 間の電圧 e_{cd} も同様に考えて，$e_{cd} = e_{ab}$ となる。なお，B と速度ベクトルのある面に垂直な方向の電圧しか生じないので，bc，ad 間には電圧は生じない。従って，

$$e = e_{ab} + e_{cd} = Bld\,\omega\sin\theta \tag{4-2}$$

となる。これを，図に描くと，図 4-2 のようになる。最大値 E_m を大きくするには，強力な磁石を使って磁束密度 B を大きくするか，発電機を速く回して ω を大きくすれば良い。
自転車のライトもこの原理で発電している。ペダルを速くこぐほど明るくなるのはこのためである。

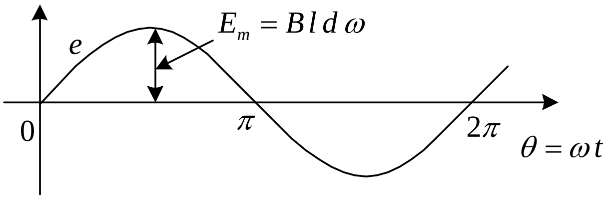


図 4-2　発電機に生じる電圧

原理は変わらないが，実際には磁石を回転させた方が，起電力の取り出しに便利である。これを**回転界磁形**とよび一般に用いられている。

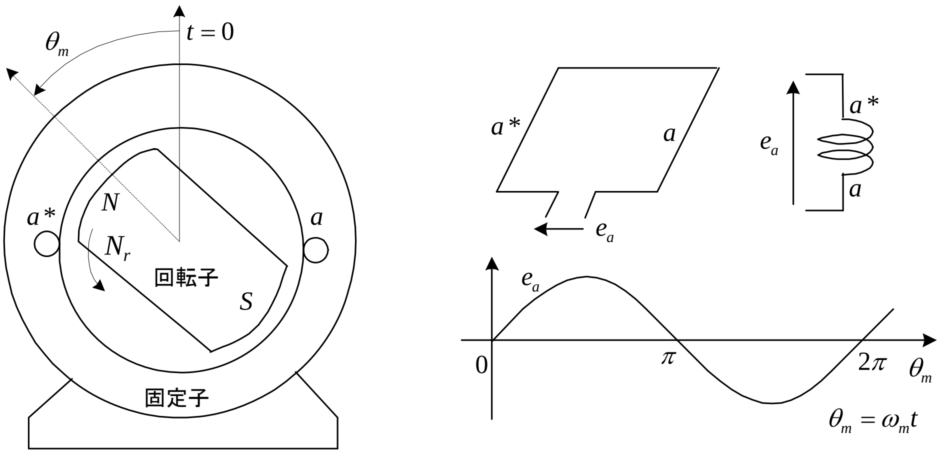


図 4-3　単相同期発電機（2 極 2 poles）

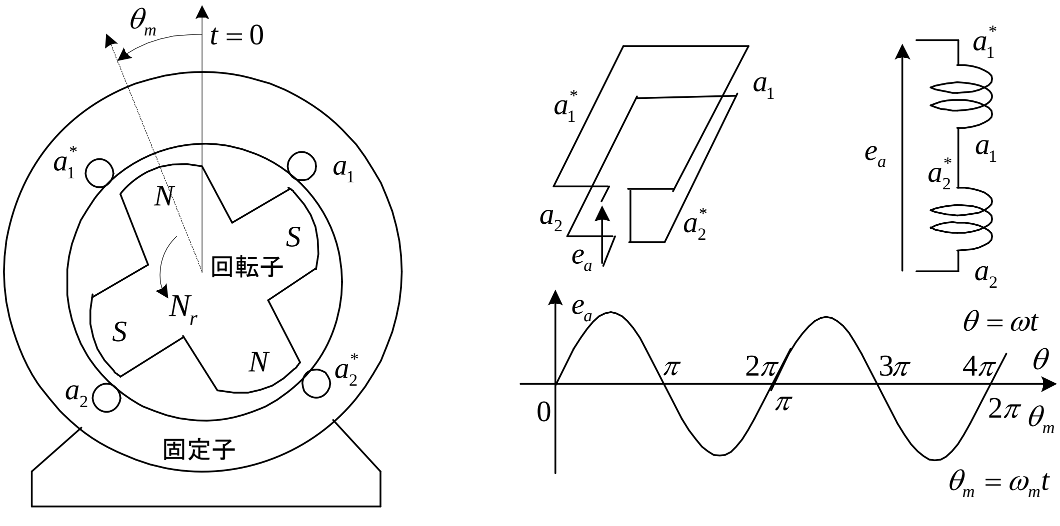


図 4-4　単相同期発電機（4 極 4 poles）

図 4-4 のように，磁石を２つ（磁極の数は４で４極という）用いて回転させるとどうなるだ

ろうか？　回転子を１回転（機械的角度の変化）させると，２周期分の電圧（電気的角度で表す）を生じる。両者を区別するため，**機械角**(mechanical angle) θ_m と**電気角**(electrical angle) θ を用いる。

$$\theta = \frac{P}{2}\theta_m \tag{4-3}$$

である。ただし， P ：極数(number of poles)
(4-3)を微分して角周波数（電気角） ω と角速度（機械角） ω_m の関係は

$$\omega = \frac{P}{2}\omega_m \tag{4-4}$$

電圧の周波数(frequency)を $f\,[\mathrm{Hz}]$, 回転子の１分間の回転数（**同期速度** synchronous speed）を $N_s\,[\mathrm{min}^{-1}]$ とすると， $\omega = 2\pi f$ だから

$$N_s = \frac{120}{P} f \tag{4-5}$$

問題１　水車発電機が，200[min^{-1}]で回転し，60Hz の周波数の電圧を発生している。この発電機の極数はいくらか。

（解） $P = \dfrac{120}{N_s} f = 36$ 極

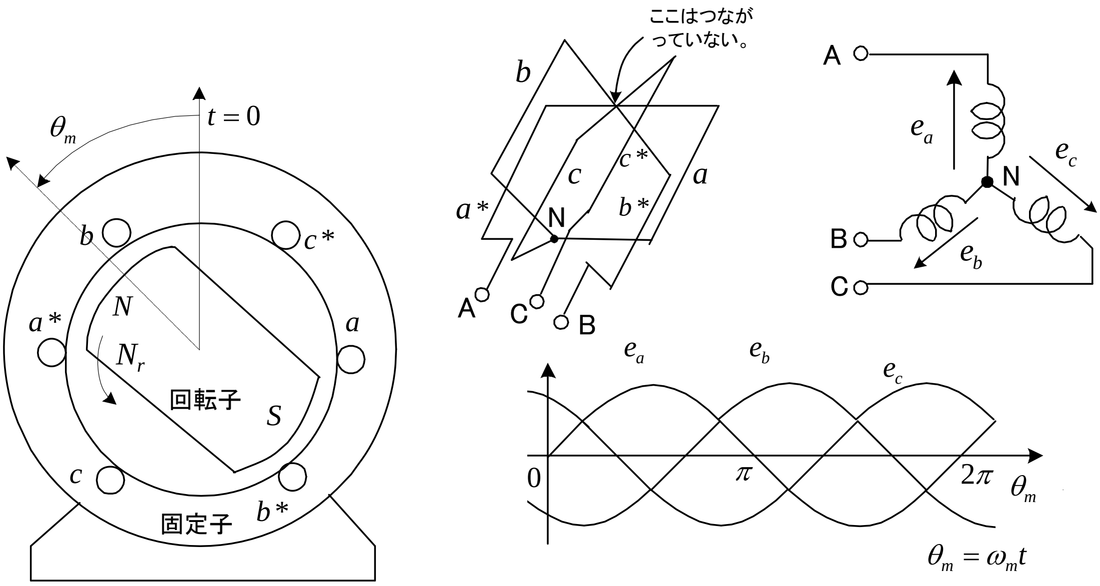
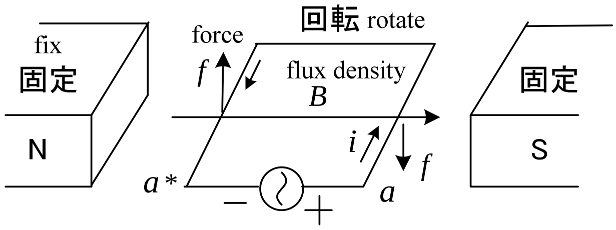


図 4-5　三相同期発電機（2 極）

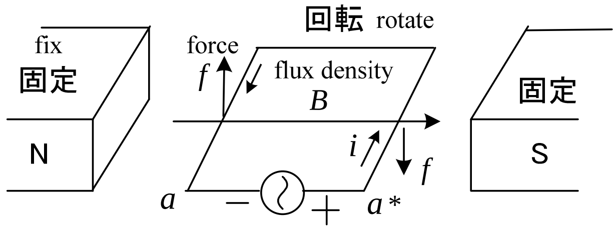
実際に発電所で使われているのは，**三相同期発電機**である。図 4-5 にその原理図を示す。

○　同期モータの原理（ブラシレス DC モータ Brushless DC motor ）

図 4-1 のように，磁界の中でコイルを回転させると交流電圧を生じた。それでは逆に，コイルに交流電圧を加えてやると，コイルは回転するだろうか？



(a)　最初の状態(initial state)

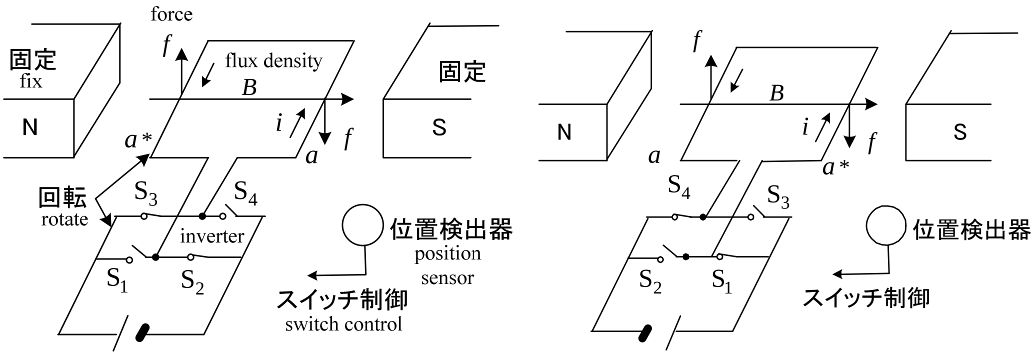


(b)コイルが半回転した状態(half rotation)

図 4-6　同期モータの原理 (principle of synchronous motor)

図 4-6 で考えてみよう。始めに(a) 図に示すように，電流が流れていると，**フレミングの左手の法則**(Fleming's left-hand rule)で図の力が働き回転する。そしてちょうど半回転したとき，電源電圧の極性もちょうど反転して電流も同じく反転したなら，うまい具合に同じ方向に力が働き回転を続けることができる。しかし，実際には電源電圧の周期とモータが回る周期は一致するとは限らない。特に，モータが回り始めるときは，回転の方がゆっくりであろう。したがって，単純に交流電源を接続しただけでは回転させることはできない。

この問題を解決するうまい方法がある。これは実際よく用いられている方法で，図 4-7 に原理を示す。直流電源，スイッチ，コイルは同時に回転できるものとする。



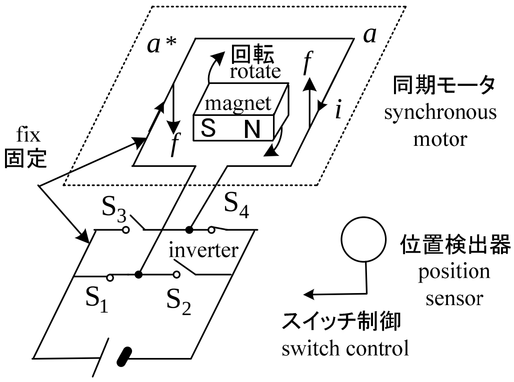
(a)　初めの状態(initial state)　　　(b)コイルが半回転した状態(half rotation)

図 4-7　同期モータをうまく回転させる方法

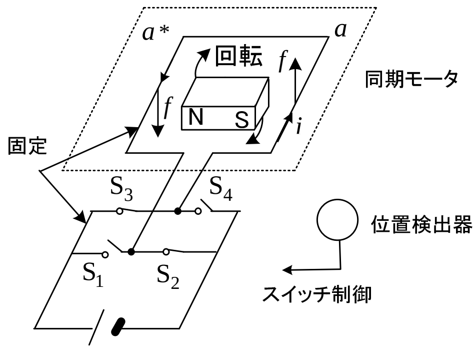
図(a)の位置にコイルがあるとき，S_2 と S_3 をオンする。すると電流が図の向きに流れ，図の向きの力が働く。半回転したら，今度は S_1 と S_4 をオンする。このとき，コイル片 $a*$ は右側に来ているが，$a*$ では上向きに電流は流れる。従って，力の向きは変わらずコイルは回転し続ける。このためには，コイルが半回転したことを知るセンサ（位置検出器）が必要で，この情報によりスイッチを切り替える。従って，コイルには交流電流が流れる。4 つのスイッチは，直流から交流を作る装置で，**インバータ**(inverter)と呼ばれる。

この話はどこかで聞いたことがあるはずだ。そう，DC モータの原理と同じである。DC モータのブラシと整流子は，図 4-7 のスイッチと位置検出器の役割と全く同じである。ブラシと整流子を位置検出器付きのインバータと呼んでもいいだろう。このことから，図 4-7 のモータを**ブラシレス DC モータ**と呼ぶことがある。DC モータに比べて，機械的に接触する部分がないことが優れている。

ところが，これではコイルや直流電源を回転することになるので実用的でない。そこで，力の作用と反作用により，磁極は逆向きに力を受けているので，磁極を回転できるようにしてコイルや電源を静止させておくことが考えられる。これを図 4-8 に示す。磁石はコイルに働く力の反作用で回転する。なお，電気信号でオン，オフするスイッチとしては，トランジスタが使われる。**ブラシレス DC モータ**という言葉は, モータに流れる電流が方形波（きれいな正弦波でない）の場合に用いられている。



(a)　初めの状態(initial state)



(b)磁石が半回転した状態(half rotation)

図 4-8　実際の同期モータの運転法（ブラシレス DC モータ）

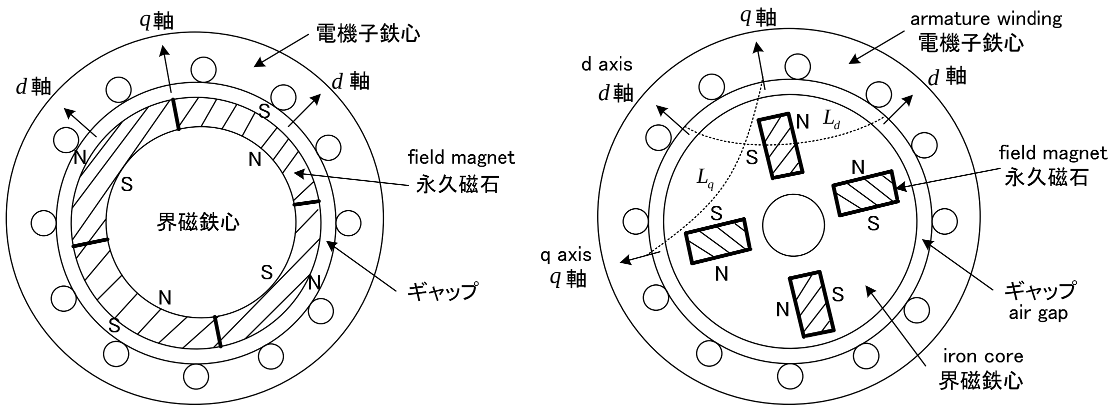
Brushless DC motor.

○　永久磁石同期モータ

永久磁石同期モータは誘導モータに比べてモータのコストは高いが，効率，力率が高い利点があり，小・中容量のモータとして用途が拡大している。永久磁石を回転子表面に張り付けた**表面磁石同期電動機**（**SPMSM**：Surface Permanent Magnet Synchronous Motor）と回転

子内部に永久磁石を埋め込んだ**埋込磁石同期電動機**（**IPMSM**：Interior Permanent Magnet Synchronous Motor）に分類される。SPMSM はトルク脈動が小さくサーボモータとしてロボットや工作機械に広く利用されている。IPMSM は，リラクタンストルクも有効に利用することができ，結果として効率や**トルク/電流**（電流あたりのトルク）が改善されることから自動車や家電製品に広く用いられている。高速運転は，巻線に生じる起電力が大きくなるが，インバータの出力電圧には上限があるので制御できなくなる。このため**弱め磁束制御**(field weakening control)を行い，起電力を小さくして高速領域までの運転を行っている。

フェライト磁石は掲示物などに使用される磁石で, 磁力は弱いが安価なモータに利用されている。最近は**希土類磁石**(rare earth magnet)が広く採用されている。特に強力な磁力をもつネオジムー鉄ーボロン（Nd-Fe-B）磁石が主流として使われている。このとき保持力を高めるために添加する元素がディスプロシウム(Dy)である。Nd, Dy いずれも希土類であるが，Dy は特に埋蔵量が少なく，しかも中国に偏在している。Dy はあと十数年で枯渇するという見通しもあり，今後の永久磁石の開発や永久磁石を使わないモータの性能向上が望まれている。



(a)　SPMSM　　　　　　　　(b)　IPMSM

図 4-9　永久磁石同期モータの断面図(cross section of PM motor)（4 極）

PM 同期モータの数学モデルとしては, 図 4-10 に示す突極形のモータを考えればよい。IPMSM の数学モデルがこれに対応し，SPMSM のモデルはこの特殊なケースとして得られる。d 軸(direct-axis)を N 極上に，q 軸(quadrature axis)をそれと直交する方向に取った座標軸を用いてモデル化した Park の式が広く用いられている。Park の式(Park’s equation)は次式となる（導出は付録 4 参照）。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_d p & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + L_q p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix} \tag{4-6}$$

ここで，R_s :電機子巻線抵抗，L_d :d 軸インダクタンス，L_q : q 軸インダクタンス
ω_r :回転角速度（電気角），ψ :速度起電力係数，p :微分演算子

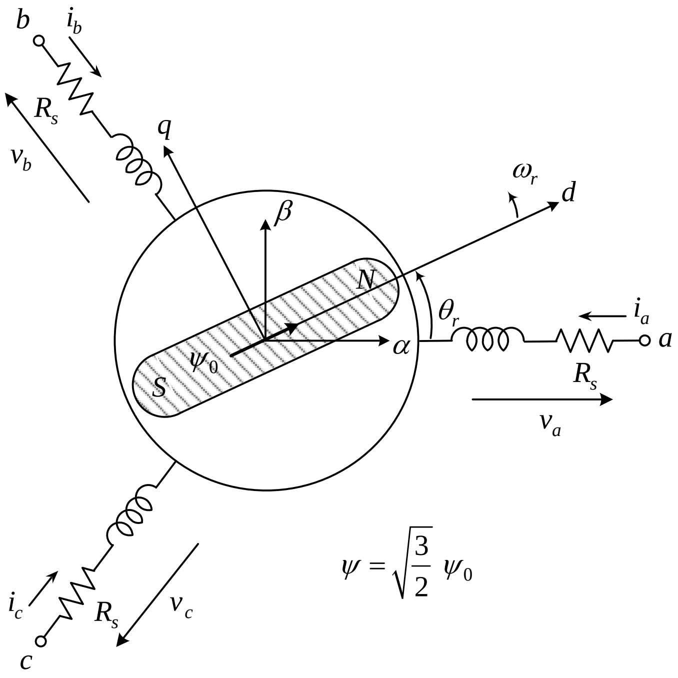


図 4-10　PM 同期モータの *d*-*q* 軸(*d*-*q* axis of PMSM)

鎖交磁束を用いると(4-6)の Park の式は，次式で表される。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega_r \\ \omega_r & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \psi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

変数変換は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_r & -\sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \tag{4-9}$$

ただし，$\dfrac{d\theta_r}{dt} = \omega_r$（電気角），　f ：相電圧 v，相電流 i，鎖交磁束 ψ を意味する。

逆に，

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{bmatrix} \tag{4-10}$$

中性点を接地しないとき，**零相成分**は　$f_0 = 0$ としてよい。このとき，(4-10)より

$$f_a = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_d \cos\theta_r - f_q \sin\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{3}} V_a(t) \cos(\theta_r + \varphi_f) \tag{4-11}$$

ただし，$V_a(t) = \sqrt{v_d^2 + v_q^2}$，$\varphi_f = \tan^{-1} \dfrac{f_q}{f_d}$　(4-12)

b, c 相はそれぞれ $2\pi/3,\ 4\pi/3$ 遅れる。PM 同期モータの発生トルクは，次式で与えられる（導出は付録 6 参照）。

$$\tau_e = \frac{P}{2}\{\psi i_q + (L_d - L_q) i_d i_q\} \tag{4-13}$$

第 1 項が磁石によるトルク，第 2 項が磁気的な**突極性**(saliency)によって生じる**リラクタンストルク**(reluctance torque)である。SPMSM のモデルは，$L_d = L_q$ とすればよくリラクタンストルクはない。図 4-9 の IPMSM では，$L_d < L_q$ となる。永久磁石の透磁率は極めて小さく，空気と同じと考えてよい。従って，磁界は透磁率の高い鉄心を通るので L_q が大きくなる。

次に，**定常解析**を行ってみよう。定常状態では，電源電圧に同期して電動機が一定速度で回転していると仮定する。このとき，(4-9)より，v_d, v_q は一定値になる。(4-6)より，入力電圧が一定の定常解は $p = 0$ とおいて得られる。また，このときトルクは(4-13)より脈動がなく一定値となるので，最初に仮定した一定速度が成立する。以上のことから $p = 0$ として定常解が得られる。(4-6)より定常解は

$$v_d = R_s i_d - \omega_r L_q i_q \tag{4-14}$$

$$v_q = R_s i_q + \omega_r (L_d i_d + \psi) \tag{4-15}$$

図 4-11 に $i_d < 0$ の場合の定常状態での空間ベクトル図を示す。**空間ベクトル**は次式で与えられる。

$$\dot{v}_{dq} = v_d + j v_q,\ \dot{i}_{dq} = i_d + j i_q,\ \dot{\psi}_{dq} = \psi_d + j\psi_q \tag{4-16}$$

$d - q$ 軸上からみたこれらのベクトルは一定である。各ベクトルに $e^{j\theta_r}$ を掛けたものが静止座標系での空間ベクトルであり時間と共に回転する。これは $d - q$ 軸が角速度 ω_r で回転していることに対応している。

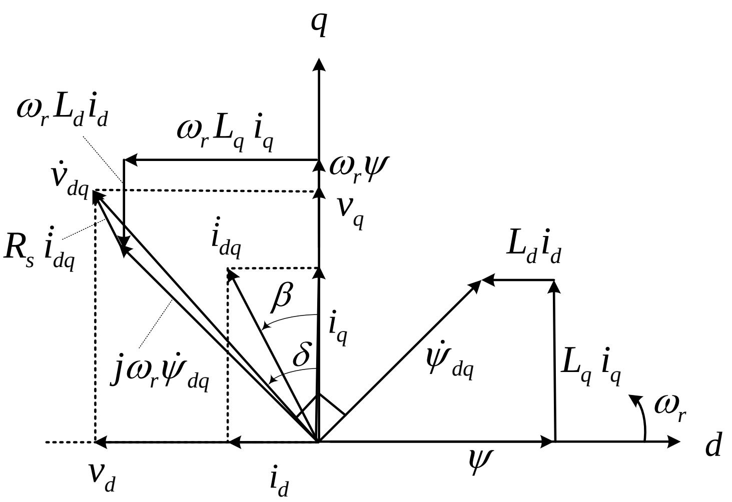


図 4-11　定常状態の空間ベクトル図(36)

電流の大きさを

$$\left| i_{dq} \right| = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} = I_a = \sqrt{3}\, I_e \qquad (4\text{-}17)$$

ここで，I_e：**相電流の実効値**（(4-11)参照）

とおくと，

$$i_d = -I_a \sin\beta\,,\quad i_q = I_a \cos\beta \qquad (4\text{-}18)$$

である。β は**電流進み角**と呼ばれている。トルクは

$$\tau_e = \tau_m + \tau_r \qquad (4\text{-}19)$$

$$\tau_m = \frac{P}{2}\psi\, i_q = \frac{P}{2}\psi I_a \cos\beta \qquad (4\text{-}20)$$
：**マグネットトルク**

$$\tau_r = \frac{P}{2}(L_d - L_q) i_d\, i_q = \frac{P}{4}(L_q - L_d) I_a^2 \sin 2\beta \qquad (4\text{-}21)$$
：**リラクタンストルク**

と表せる。

電圧については，

$$\left| \dot{v}_{dq} \right| = \sqrt{v_d^2 + v_q^2} = V_a = \sqrt{3} V_e \qquad (4\text{-}22)$$

ここで，V_e：**相電圧の実効値**（V_a：線間電圧の実効値）

とおくと，　$v_d = -V_a \sin\delta$，$v_q = V_a \cos\delta$　(4-23)

である。δ は**負荷角**と呼ばれている。定常状態で，**力率**は

$$\cos\varphi = \cos(\delta - \beta) \qquad (4\text{-}24)$$

となる。これは，位相差 $\varphi = \delta - \beta$ が，静止座標でも変わらず，一般の a 相電圧フェーザと a 相電流フェーザの位相差に相当するためである。

(4-11)から，δ の正負によらず a 相電圧の瞬時値は次式で与えられる。b, c 相はそれぞれ $2\pi/3,\ 4\pi/3$ 遅れる。

$$v_a = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_d\cos\theta_r - v_q\sin\theta_r) = \sqrt{2}V_e\cos(\theta_r + \delta + \frac{\pi}{2}) \qquad (4\text{-}25)$$

また，空間ベクトルについては次式が得られる。

$$\dot{v}_s = \sqrt{3}V_e e^{j(\theta_r+\delta+\frac{\pi}{2})},\ \dot{v}_{dq} = \sqrt{3}V_e e^{j(\delta+\frac{\pi}{2})} \qquad (4\text{-}26)$$

以上の結果は，V/f 一定制御，ベクトル制御，センサレスベクトル制御いずれに対しても成立する。制御の違いは，何が既知数（指令値）で何が未知数かの違いである。

PM 同期モータのトルク制御である**ベクトル制御**は容易である。回転子位置を検出することで，磁極の位置がわかるので，永久磁石が作る磁束の向き θ_r が検出できる。あとは，誘導モータと同様に電流制御を行えばよい。このときのブロック図を図 4-12 に示す。この場合，電流はきれいな正弦波になるので，**ブラシレス DC モータ**の用語は用いない。図の 2 相/3 相変換は(4-10)により，次式で演算する。

$$\begin{bmatrix} i_a^* \\ i_b^* \\ i_c^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_d^* \\ i_q^* \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}27)$$

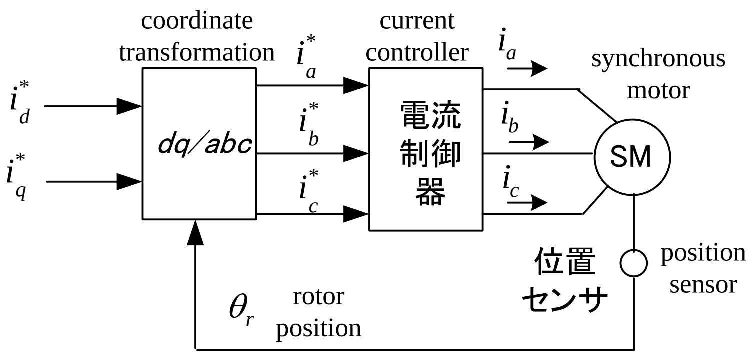
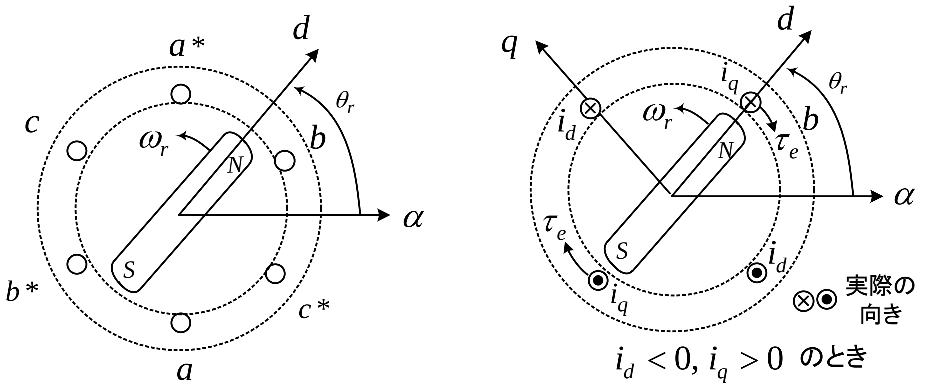


図 4-12　PM 同期モータのベクトル制御(Vector control of PMSM)



実際の三相巻線　　　　　　　　　　等価な *d-q* 巻線

図 4-13　PM 同期モータのベクトル制御(Vector control of PMSM)

図に示す等価な *d-q* 巻線に指令した *d-q* 電流 i_d^*, i_q^* を流すため，実際の三相巻線に流す電流を計算するのが(4-27)である。等価とは同じ磁束分布になるということ。磁極の位置に基づいて直流から交流に変換するので，(4-27)の座標変換は DC モータのブラシと整流子の動作に類似している。DC モータのブラシと整流子は単に直流から交流に変換するだけでなく，磁極の位置に基づいて巻線が切り替わっている。i_q に働くトルクの反作用として磁石に反対向きで同じ大きさのトルクが働き図の向きに回転する。

同じベクトル制御でも SM の場合は磁石が作る磁束の向き（一次電流が作る磁束は入っていない）を検出しているが，誘導機の場合には一次電流と二次電流の両者で作る磁束の向きを検出(推定)している点が異なる。DC モータは，$i_d^* = 0$ とした SM のベクトル制御に等価である。*q* 軸電流が電機子電流に対応する。

図 4-12 のシステムを解析する。電流制御が理想的で次式が成り立つとする。

$$i_a^* = i_a,\ i_b^* = i_b,\ i_c^* = i_c \tag{4-28}$$

SM の解析を行う座標軸は θ_r に同期した回転座標軸を選ぶことにする。すなわち(4-9)で変換する。このとき(4-9)，(4-27)，(4-28)より，次式が成り立つ。

$$i_d = i_d^*,\ i_q = i_q^* \tag{4-29}$$

従って，(4-6)の Park の式とトルクは次式で表わせる。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_d p & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + L_q p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^* \\ i_q^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix} \tag{4-30}$$

$$\tau_e = \frac{P}{2}\{\, \psi\, i_q^* + (L_d - L_q) i_d^* i_q^* \} \tag{4-31}$$

ベクトル制御では，磁極位置の d 軸電流と q 軸電流が直接制御でき，この結果(4-31)よりトルクが瞬時に制御できる。端子電圧は電流制御の結果自動的に定まり(4-30)から計算できる（これは誘導機のベクトル制御でも同じことである）。ベクトル制御で重要なのは磁極位置の検出と電流制御である。実際に用いられている電流制御法は d-q 軸電流に直して PI 制御する方式で，これについては第 8 章で詳しく述べる。

速度制御を行うには，速度の偏差を PI 制御して，その出力を q 軸電流指令 i_q^* とすればよい。これについても第 8 章で詳しく述べる。d 軸電流指令 i_d^* については，いろいろの与え方が考えられている。SPMSM の場合には, 高効率(high efficiency)で運転する場合には $i_d^* = 0$ と制御するのが望ましい。IPMSM の場合には，$L_d < L_q$ だから $i_d^* < 0$ として，積極的に d 軸電流を流してリラクタンストルクを有効に利用し，同一の電流で最大のトルクを得る制御法が開発されている。(4-8)より $i_d < 0$ なら磁束は弱まる。

永久磁石同期電動機の分類(classification)を表 4-1 に示す。この中で，永久磁石を用いないでリラクタンストルクだけを利用する**リラクタンスモータ**は, 回転子が鉄心のみで安価であり, 高速回転や高温に強い。しかし，振動や騒音が大きくなる問題がある。英国製の掃除機や米国製の洗濯機で実用化されており，今後，永久磁石を用いないことから電気自動車への応用も期待されている。

表 4-1 同期電動機の分類[40]

駆動方式 ＼ タイプ大別	回転子位置フィードバックあり（センサレス方式もある）		回転子位置フィードバックなし
	正弦波電流駆動	非正弦波電流駆動	
永久磁石同期モータ **(PMSM)** (Permanent Magnet Synchronous Motor)	● 表面磁石同期モータ **(SPMSM)** (Surface Permanent Magnet Synchronous Motor) ● 埋込磁石同期モータ **(IPMSM)** (Interior Permanent Magnet Synchronous Motor)	● ブラシレス DC モータ **(BLDCM)** (Brushless DC Motor)	
リラクタンスモータ **(RM)** (Reluctance Motor)	● シンクロナスリラクタンスモータ **(SynRM)** (Synchronous Reluctance Motor)	● スイッチトリラクタンスモータ **(SRM)** (Switched Reluctance Motor)	
ステッピングモータ **(Stepping Motor)**			● **PM** 形 ● **HB** 形 ● **VR** 形

第５章　整流器

○ダイオードの特性(Characteristics of Diode)

P 形半導体(Positive : 正の)と **N 形半導体**(Negative : 負の)を接合して作られる**ダイオード**は，交流から直流を作る整流回路や電子回路などに広く利用されている。P **形半導体**とは，電子が入る穴（**ホール**または**正孔**）が多く存在し，N**型半導体**では自由に動き回る電子が多く存在する。

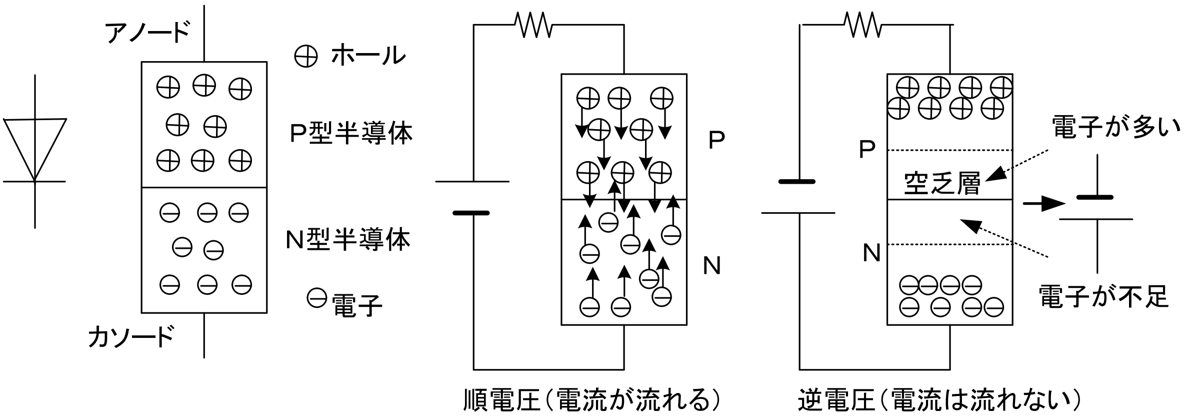


図 5-1　ダイオードの構造(structure of diode)

図 5-2 にその特性を示す。$v > 0$ すなわち**アノード**に正の電圧が加わると電流が流れ，素子自体の電圧降下は 0.6V 程度なので電力用としては通常無視できる。逆に，**カソード**側に正電圧が印加される場合には電流はほとんど流れない。

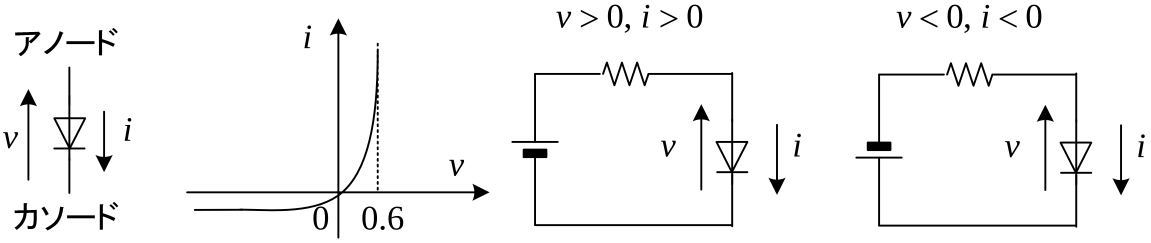


図 5-2　ダイオードの特性**(characteristic of diode)**

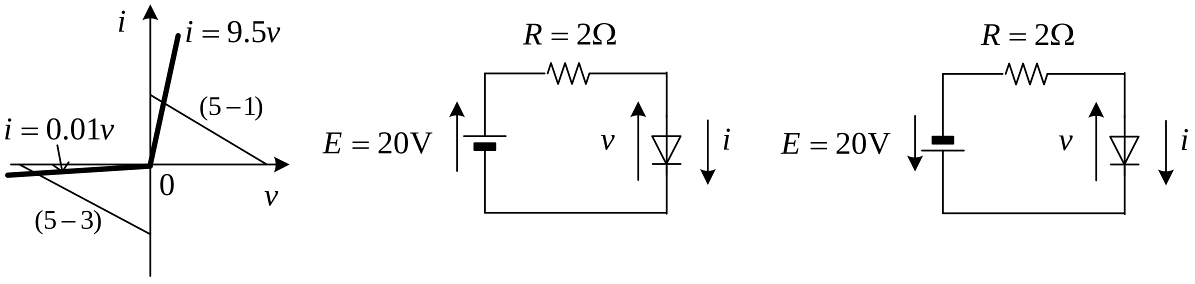
仮にダイオードの特性を図 5-3(a)太線と仮定して（実際とは異なるが），回路(b)，(c)に流れる電流を求めてみよう。
図(b)の場合，

$$E = Ri + v \qquad \therefore\ i = -\frac{1}{R}v + \frac{E}{R} = -0.5v + 10 \qquad (5\text{-}1)$$

このグラフを(a)の上に書いて，交点が求めるダイオードの電圧と電流になる。なぜなら，ダイオードは図(a)の特性を満足し，なおかつつながった回路の条件(5-1)も満足しないといけないからである。仮定されたダイオードの特性は，

$$i = 9.5v \qquad (5\text{-}2)$$

である。従って，(5-1)，(5-2)より， $v = 1\text{V},\ i = 9.5\text{A}$ となる。ダイオードの特性が直線でないときは，その特性の上に(5-1)を書いて，グラフから読み取る必要がある。



(a)　(b)　(c)

図 5-3　ダイオードに流れる電流

図(c)の場合，

$$-E = Ri + v \qquad \therefore\ i = -\frac{1}{R}v - \frac{E}{R} = -0.5v - 10 \qquad (5\text{-}3)$$

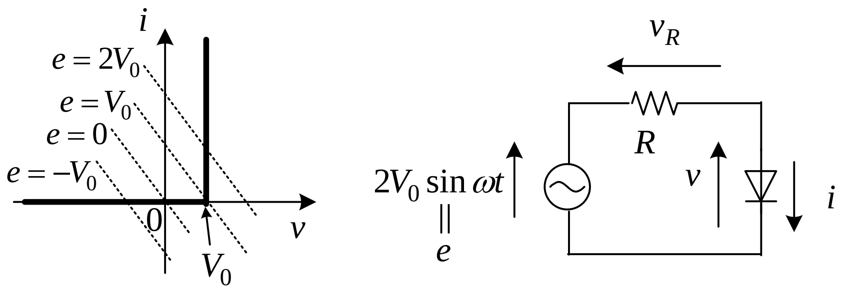
このグラフを(a)の上に書いて，交点が求めるダイオードの電圧と電流になる。仮定されたダイオードの特性は，

$$i = 0.01v \qquad (5\text{-}4)$$

である。(5-3)，(5-4)より， $v = -19.6\text{V},\ i = -0.196\text{A}$ となる。

理想的なダイオードの特性は，(5-2)の傾きが非常に大きく，(5-4)の傾きが非常に小さい。この結果どの交点になっても，(b)の回路では， $v = 0$ （導体），(c)の回路では， $i = 0$ （絶縁体）と考えてよい。そうすると，(b)の回路では， $i = 10$ ，(c)の回路では， $v = -20$ となる。

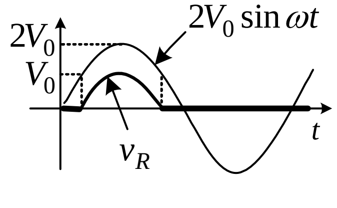
問題 1　ダイオードの特性が図の様に与えられている。抵抗の両端の電圧を図示せよ。



(解)電源電圧が V_0 以上で電流が流れる。

このとき，ダイオードの電圧は V_0 で，

その分引く。図の点線の式を求めよ。



○　ダイオードによる整流回路

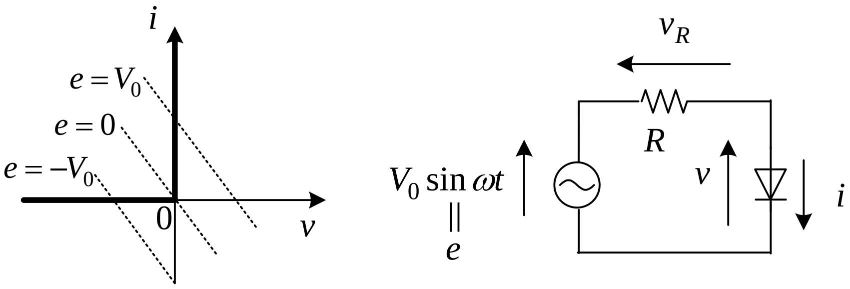


図 5-4　理想的なダイオードの特性と半波整流回路

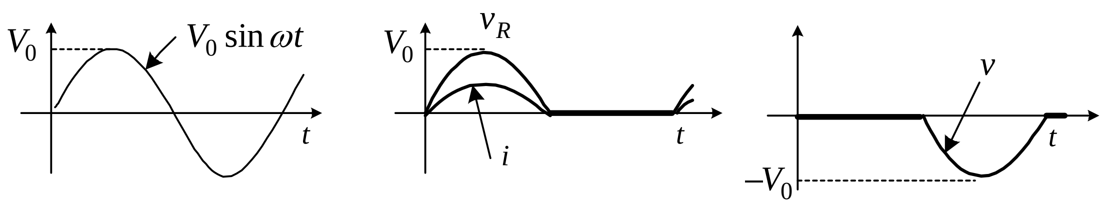
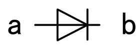


図 5-5　図４の回路の波形

図 5-4 に理想的なダイオードの特性と最も簡単な**半波整流回路**(half-wave rectifier circuit)を示す。

理想的ダイオードを含む回路の解き方



1．ダイオードがなく線が切れているとして，ダイオードに加わる電圧を求める。
　b 点の電位が高いと，電流は流れず，線が切れているとして解いてよい。

2．a 点の電位が高い場合，ダイオードは導通するので，ダイオードを導線に置き
　換えて回路を解く。

まず図 5-4 で，ダイオードを取り去ると，電流は流れないから，$v = V_0 \sin\omega t$ となる。$v = V_0 \sin\omega t > 0$ のとき，ダイオードは導線だから，

$$v = 0,\ v_R = V_0 \sin\omega t,\ i = \frac{V_0 \sin\omega t}{R} \qquad (5\text{-}5)$$

となる。$v = V_0 \sin\omega t < 0$ の場合には，電流は流れず，

$$v = V_0 \sin\omega t,\ v_R = 0,\ i = 0 \qquad (5\text{-}6)$$

である。これらの波形を，図 5-5 に示す。

図 5-6 はダイオードを利用した**全波整流回路**で，交流電圧 v，交流電流 i に対し，出力電圧 v_d，出力電流 i_d は直流となっている。図はダイオードが理想的な場合の波形である。電流 i_d は，負荷のインダクタンス L によって波形が異なり，L が小さいと脈動するが，L が十分大きいと図に示すように脈動がない。この場合には，ダイオードを一方通行の道路のように考えて，電源の電位

が高い側からダイオードを通って電位の低い側に電流が流れるとしてルートを探そう。そして，その場合に，その他のダイオードが導通する可能性がないか（逆電圧になるか）確認しておこう。

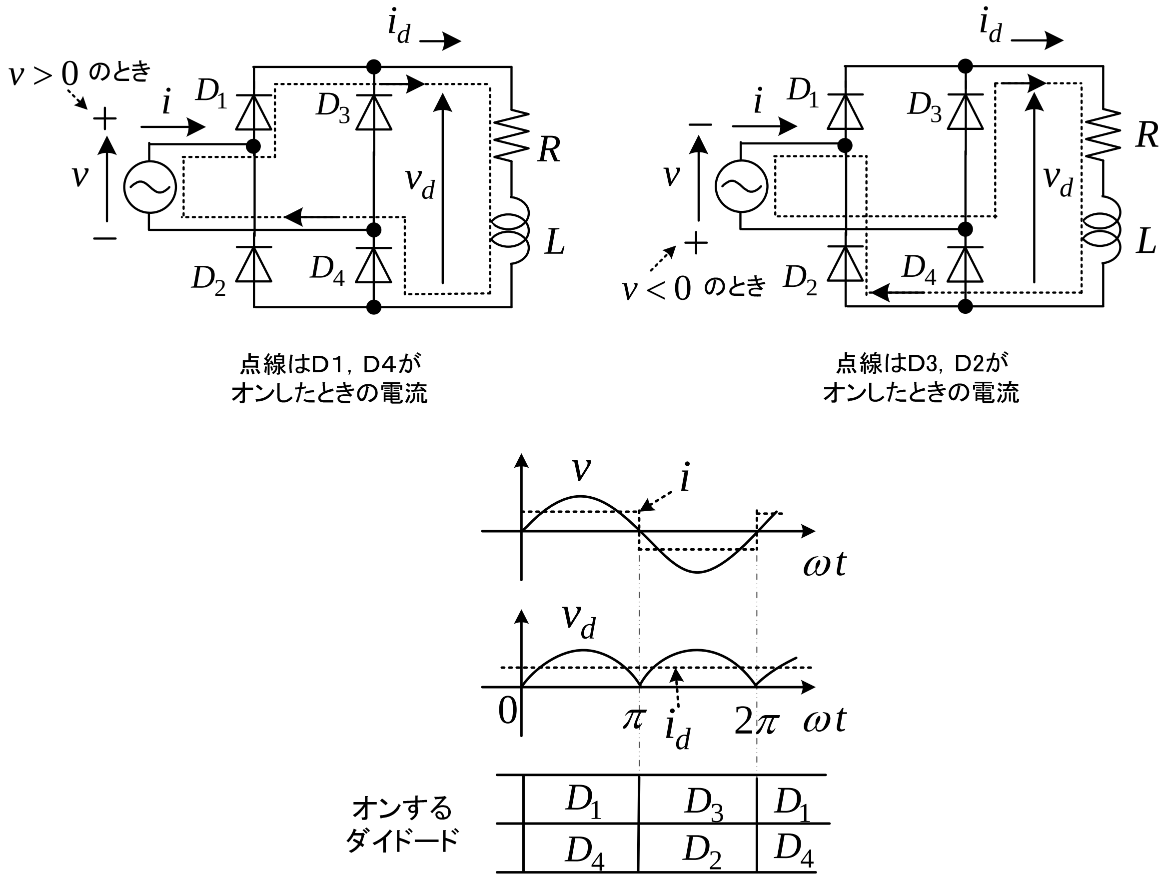


図 5-6　単相全波整流回路

図 5- 6 の回路で，電源電圧を

$$v = V_m \sin\theta \tag{5-7}$$

但し，$\theta = \omega t$

とする。このとき，整流された直流電圧の平均値は，

$$
\begin{aligned}
\overline{v}_d &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_m \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{V_m}{\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2V_m}{\pi}
\end{aligned}
\tag{5-8}
$$

となる。

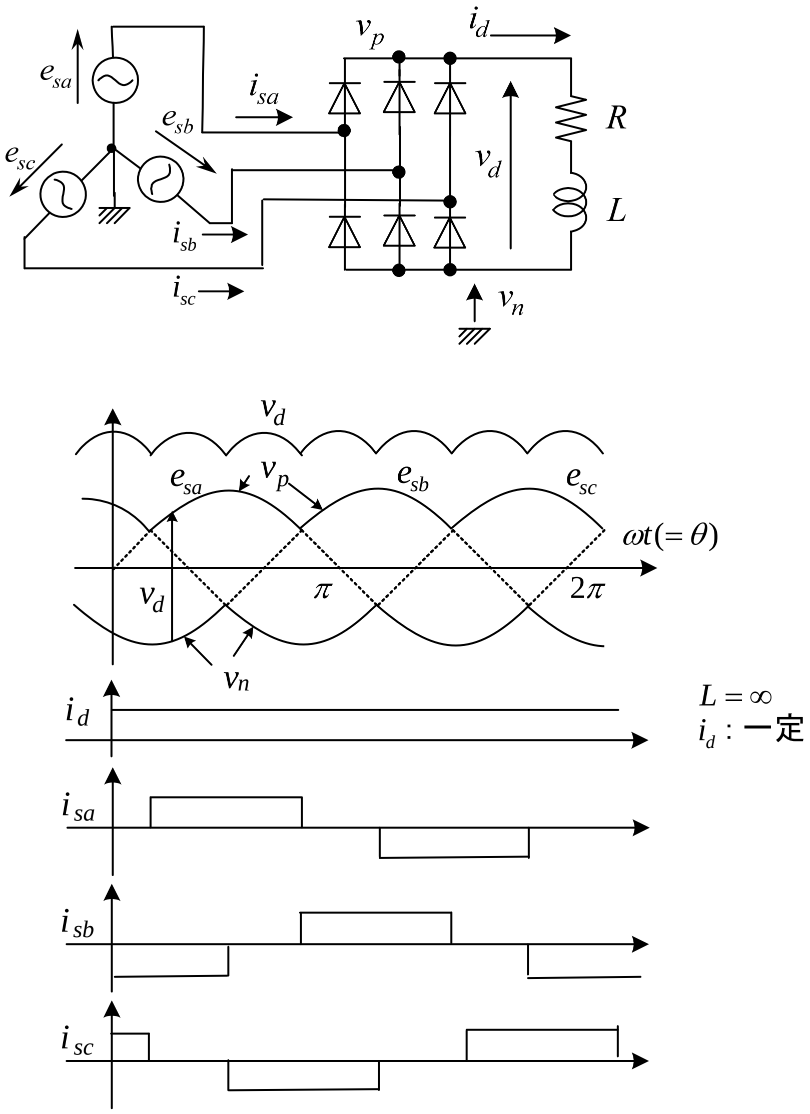


図 5-7　三相全波整流回路

図 5-7 に**三相全波整流回路**を示す。最も電位の高い相から最も電位の低い相にダイオードを通って電流が流れる。中間の電位の相から最も電位が低い相に電流が流れる可能性はない。なぜなら両方が同時に起きても，中間の電位のダイオードにはすぐ逆電圧がかかりオフするためである。

整流された直流電圧の平均値は，

$$
\begin{aligned}
\overline{v}_d &= \frac{1}{\pi/3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(e_{sa}-e_{sb})\,d\theta \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{2}\,E_{ab}\sin\theta d\theta \\
&= \frac{3\sqrt{2}\,E_{ab}}{\pi} \simeq 1.35E_{ab} \qquad (5\text{-}9)
\end{aligned}
$$

E_{ab} は線間電圧の実効値である。 E_{ab} =200V のとき， $\overline{v}_d = 270\text{V}$ となり，線間電圧の最大値より少し低い電圧である。v_d， i_d は常に正であるから，エネルギーの流れは一方向で電源から常に負荷側に供給される。

○サイリスタによる整流回路

ダイオードは，正の電圧が加えられると常にオン状態になり，直流電圧の大きさを変えるためには交流電圧の大きさを変える必要がある。これは，変圧器の巻数比を変えることで行えるが，スマートな方法ではない。そこで**サイリスタ**を利用すると，電圧がスムーズに変えられる。

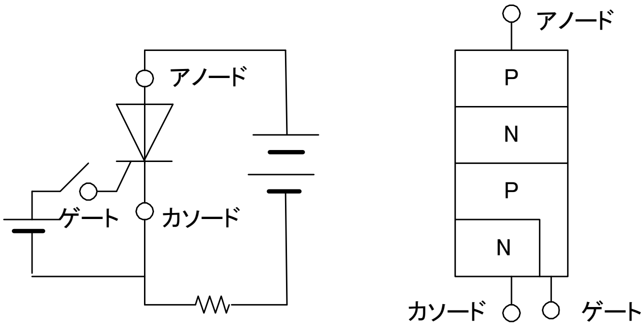


図 5-8　サイリスタ

サイリスタは、**アノード**に正の電圧が印加されているだけではオンにならず、**ゲート**にも電圧が印加されてはじめてオン状態になる。ゲートに加える電圧は小さいので、そのオン、オフの切替は電子回路で行える。図 5-9 にサイリスタを使った最も簡単な整流回路を示す。図 5-9 は，正の電圧になってから，　α 経過してからゲートにオン信号を入れた場合の波形である。α を**制御角**と呼ぶ。この α の値をいろいろ変えることで, 直流電圧の平均値を変えることができる。

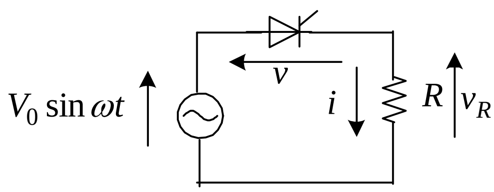


図 5-9　サイリスタによる整流回路

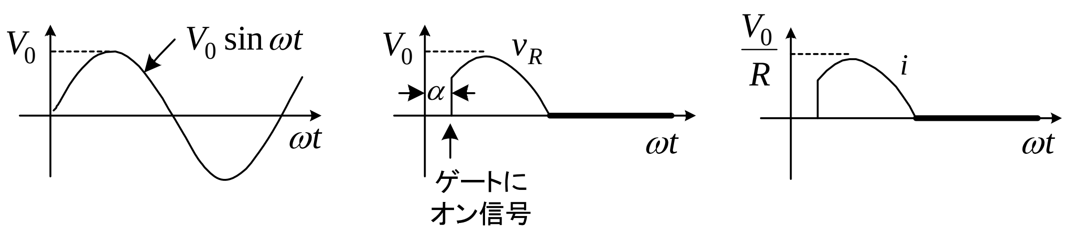


図 5-10　電圧，電流波形

サイリスタは，一度オンすると逆電圧が加わるまでオンし続ける。すなわちオンする時間はゲート信号で制御できても，ゲート信号でオフできない欠点がある。

○整流回路の応用

1964 年（東京オリンピックの年）の登場した新幹線 0 系は，図 5-11 の構成で DC モータを駆動し，車輪を回していた。速度を速くするためには，モータに加わる電圧 v_d を高くする必要があるが，このためには変圧器（タップ切り替え）を用いて電源電圧 v を変化させた。

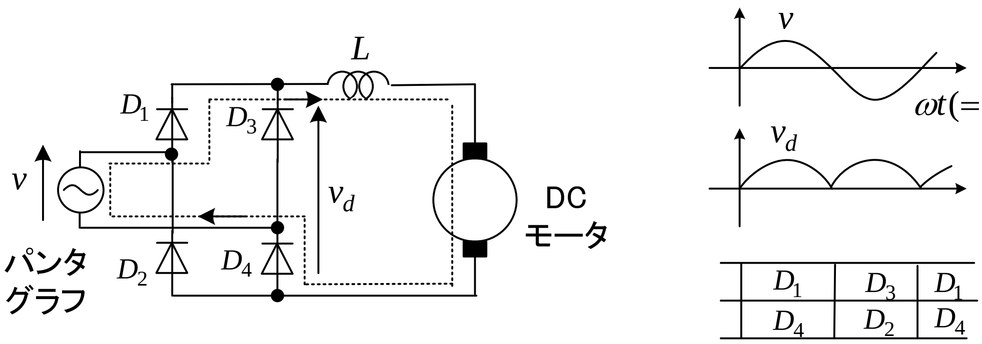


図 5-11　ダイオード整流回路

図 5-12 は，その後 1985 年に登場した 100 系と呼ばれる新幹線で，サイリスタによる位相制御が行われていた。この場合，制御角 α を変えて，スムーズにモータ電圧が変えられるので，電源電圧 v は変えなくてよい。D_3,D_4 は T_1,T_2 がどちらもオフのとき導通し，L の電流を持続させる還流ダイオードの役割を果たす。100 系も 2012 年に運転を終わっている。

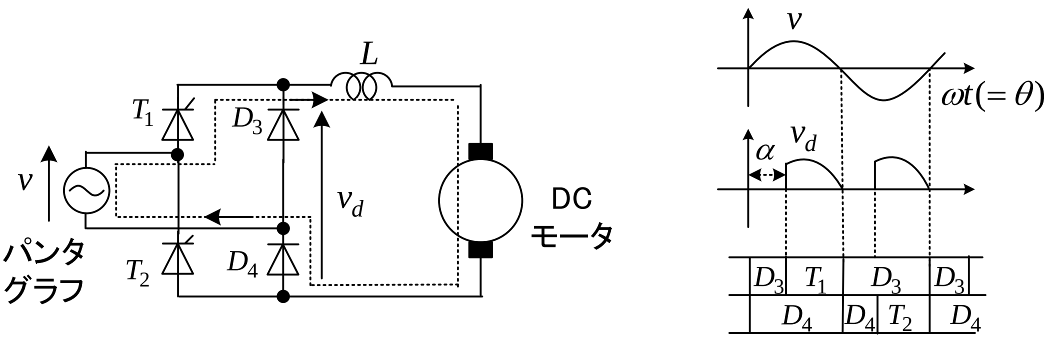


図 5-12　サイリスタによる位相制御

整流された直流電圧の平均値は,

$$\bar{v}_d = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi V_m \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{V_m}{\pi}\left[-\cos\theta\right]_\alpha^\pi$$

$$= \frac{V_m}{\pi}(1+\cos\alpha) \qquad (5\text{-}10)$$

となる。　図中の L は**平滑リアクトル**で電流の脈動を抑える働きがある。実際電車に用いる直流電動機は，**直流直巻電動機**なので，この場合界磁巻線が直列に入っており平滑リアクトルの役目も果たす。

第６章　チョッパ

Chopper (DC-DC converter)

○トランジスタ(transistor)

バイポーラトランジスタはＰ型半導体(p-type semiconductor)とＮ型半導体(n-type semiconductor)を図 6-1 のように３層にして作ったものである．各端子は，**ベース**，**エミッタ**，**コレクタ**と呼ばれ，図の記号で示される．トランジスタには，**増幅**(amplification)と**スイッチング**(switching)の働きがある．

図 6-2 に基本回路とトランジスタの特性の一例を示す．

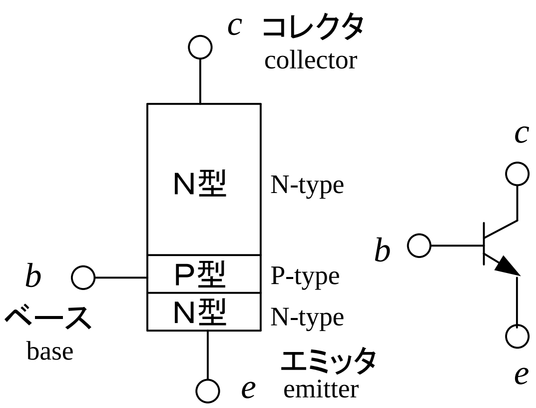


図 6-1　バイポーラトランジスタ (bipolar transistor)

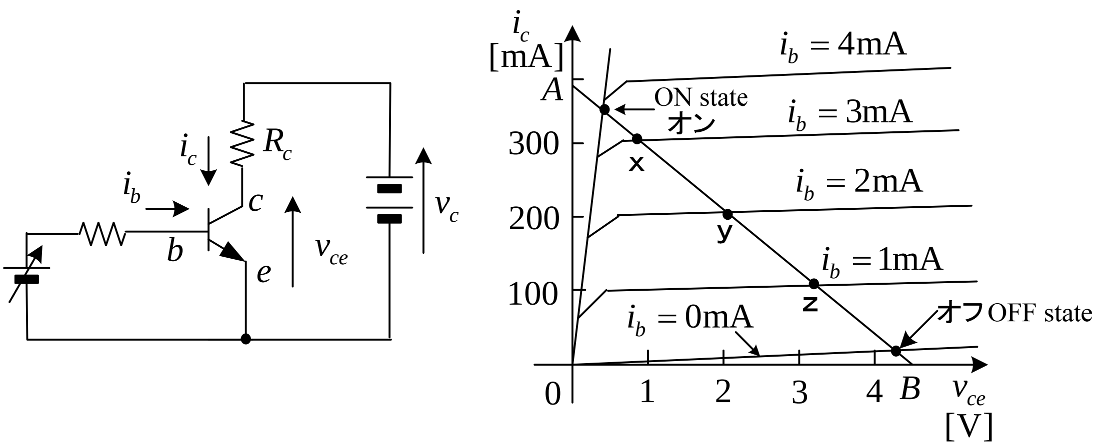


図 6-2　バイポーラトランジスタの基本回路と特性例(Characteristics of bipolar transistor)

トランジスタに，一定の**ベース電流** $i_b = 1$mA を流し，電圧 v_c を上げて，コレクタエミッタ電圧 v_{ce} を徐々に上げると，**コレクタ電流** i_c が流れる．しかし，i_c は v_{ce} には比例せず，すぐに飽和してほぼ一定の 100mA となっている。$i_b = 2$mA の場合には，i_c は，ほぼ一定の 200mA

となっている。このように，一定となるi_cの値は，i_bに比例する．

それでは，$i_b = 1\text{mA}$のとき，i_cやv_{ce}の値を求めてみよう。このためには，トランジスタにどのような回路がつながれているかを考えないといけない。図 6-2 の基本回路より，

$$v_c = R_c i_c + v_{ce} \qquad \therefore \qquad i_c = \frac{v_c}{R_c} - \frac{v_{ce}}{R_c} \tag{6-1}$$

が成立する。求める値は，この直線上を動き，かつトランジスタの特性曲線の上にもないといけない。よって，(6-1)（図の直線 AB）とトランジスタの特性の交点からi_cやv_{ce}の実際値が求まる。従って，$i_b = 1\text{mA}$の場合には，z 点が求める点で，そのときの座標からi_cやv_{ce}が求まる。$i_b = 2\text{mA}$，$i_b = 3\text{mA}$の場合には，それぞれ y，x 点より値が求まる。このような非線形の特性を持つ回路は，連立方程式で解けないので，図形で求めることになる。もちろん，特性を線形近似すれば，連立方程式から値が求まる。

トランジスタの重要な働きに**増幅**がある。増幅したい信号に比例してベース電流i_bが0mA から 3mA の範囲内で変化させると，コレクタ電流i_cは，ベース電流に比例して大体 0mA から 300mA の範囲で変化する。すなわち増幅されたことになる。増幅といってもエネルギーが増えるのではなく，直流電源v_cからエネルギーをもらって，信号を大きくしているのである。

次に，トランジスタを**スイッチ**として用いる場合を考える。これを実現するには，ベース電流i_bを極端に変えればよい。$i_b = 0\text{mA}$では，コレクタ電流はほとんど流れず，図のオフの点にある。$i_b = 4\text{mA}$以上では，どの場合でも図のオンの点にあり，コレクターエミッタ間の電圧はほとんど 0 となる。このように，極端にベース電流を変えることで電気信号でオン，オフするスイッチを作ることができる。スイッチオンとは，スイッチの電圧が 0 で電流は不明，スイッチオフとは，スイッチの電流が 0 で電圧が不明の状態で，これが近似的に実現できる。

トランジスタとしては，図 6-3 に示すパワー**MOSFET**（Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor: MOS 形電界効果トランジスタ）と **IGBT**（Insulated Gate Bipolar Transistor）も良く用いられている。スイッチとして用いる場合について，これらの素子の特徴を表 6-1 にまとめておく。

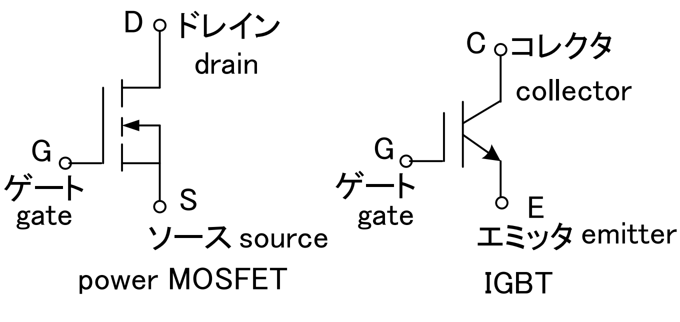


図 6-3　パワーMOSFET(power MOSFET)と IGBT

表 6-1　スイッチング素子の特徴

	バイポーラトランジスタ	パワーMOSFET	IGBT
オンするとき	正のベース電流を流し続ける（電流駆動）	ゲートーソース間に正電圧を加え続ける（電圧駆動）	ゲートーエミッタ間に正電圧を加え続ける（電圧駆動）
オフするとき	ベース電流を負にする	ゲートーソース間の電圧を負にする	ゲートーエミッタ間の電圧を負にする
最大スイッチング周波数	2ｋHz 以下	100kHz 以下	20ｋHz 以下
電力容量	100kVA 以下	10kVA 以下	5000kVA 以下
特徴	歴史が最も古い	少ないゲート駆動電力	少ないゲート駆動電力

近年はパワー出力部の集積化にとどまらず，駆動回路や各種の制御，保護回路を内蔵した **IPM**（Intelligent Power Module）が開発され，IGBT を用いた IPM が一般的となっている。4500V,1000A の定格を持つ大容量 IPM も報告されている。この他，大電力用として，サイリスタや GTO(gate turn-off thyristor)も用いられている。GTO は新幹線のインバータに利用されていたが，**最大スイッチング周波数**(maximum switching frequency)が 500Hｚと低く，2000年以降は IGBT が使用されている[46]。サイリスタは電気信号でオンできるがオフするためには素子に逆電圧(reverse voltage)を印加する必要がある。

サイリスタを除く上記の素子は，電気信号でオン，オフできるスイッチと考えてよいが，スイッチと異なり，一般に電流は一方向にしか流せない。

最近， Silicon Carbide (SiC)の半導体も実用化され始めている。SiC はシリコンと炭素 1 : 1 の半導体である。SiC は現在普及している Si に比べて,バンドギャップが広く，絶縁破壊電界強度，熱伝導性，耐熱性が高い。このためオン抵抗の低減，スイッチングの高速化，放熱性向上によるデバイスの小型化が図れる。現在は，構造が簡単なダイオードのみに SiC を用い Si-IGBT との組み合わせでインバータの開発が行われている。Si インバータに比べ損失で 30%，容積が 40%低減されている。容量も 3.3kV/1.2kA 級まで実用化している。またこれを内蔵したモータも開発されている。問題はコストが高いことである。このほか比較的小容量であるがオン抵抗が Sic よりさらに低い窒化ガリューム(GaN)の半導体もある。SiC や GaN は WBG(Wide Band Gap)半導体と呼ばれている。

○　チョッパ(chopper)

チョッパ（**DC－DC コンバータ**）は，直流から電圧の異なる直流を得る装置である。図 6-4 のトランジスタ Q とダイオード D は**降圧チョッパ**で，コイル L と抵抗 R は負荷を示す。Q がオンの T_{on} 期間では，D には逆電圧が印加されるのでオフ状態にあり，$i_1 = i_2$ の電流が流れる。Q がオフの T_{off} 期間では，コイル L に蓄えられたエネルギーにより， D を通って

電流が流れ続ける（$i_2 = i_D$）。このため, D は**還流ダイオード**(free wheeling diode)と呼ばれる。D がないと，Q をオフするときコイルに非常に高い電圧が発生して，Q を破壊する危険がある。出力電圧の平均値(average value of output voltage) $\overline{e_2}$ は次式で与えられる。

$$\overline{e_2} = \frac{T_{on}}{T} E = d\,E \tag{6-2}$$

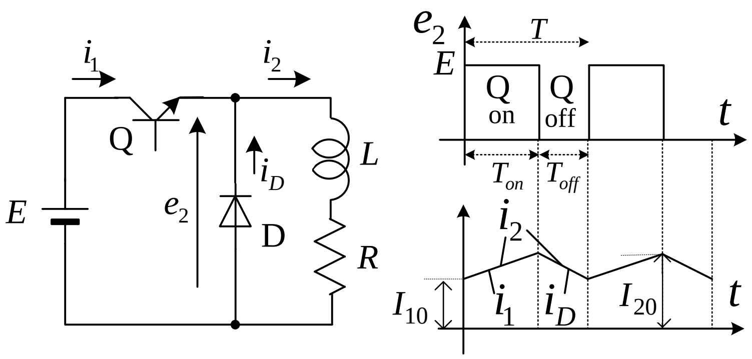


図 6-4　降圧チョッパの動作 (buck converter, step-down converter)

$d = T_{on} / T$ は**デューティ比**(duty ratio)と呼ばれる。T_{on} を変えることで，出力電圧の平均値を制御できる。このような制御法を **PWM** (Pulse-Width Modulation)**制御**あるいは**パルス幅変調**という。一般に**スイッチング周波数**($f = 1/T$)は kHz 程度であるから，たとえ過渡状態でも負荷に作用する電圧は周期T ごとの平均値と考えてよい。振幅を自由に制御できる素子はないので，時間幅を変えて等価的に振幅を制御している。この結果，**高調波電圧**(harmonic voltage)が発生し問題となっている。

図 6-4 の電流を求める。期間ごとに以下の微分方程式(differential equation)が成り立つ。

$$0 \le t \le T_{on} \ : E = L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 \quad , \qquad T_{on} \le t \le T : 0 = L\frac{di_D}{dt} + Ri_D$$

初期条件(initial condition) $i_1(0) = I_{10},\ i_D(T_{on}) = I_{20}$ のもとで，微分方程式を解くと

$$i_1 = \frac{E}{R} + (I_{10} - \frac{E}{R})\exp(-\frac{t}{\tau}) \quad , \quad i_D = I_{20}\exp(-\frac{t - T_{on}}{\tau}) \qquad \text{但し，}\ \tau = L/R$$

となる。定常状態(steady state)では，$i_D(T) = I_{10}$ が成立するので，I_{10}, I_{20} は

$$I_{10} = \frac{E}{R}\frac{\exp(-\frac{T_{off}}{\tau}) - \exp(-\frac{T}{\tau})}{1 - \exp(-\frac{T}{\tau})},\ I_{20} = \frac{E}{R}\frac{1 - \exp(-\frac{T_{on}}{\tau})}{1 - \exp(-\frac{T}{\tau})}$$

τ が大きいかまたはT が小さいとして，$\exp(-T/\tau) \simeq 1 - T/\tau$ と近似する(approximate)と

$$I_{10} = I_{20} = \frac{E}{R}\frac{T_{on}}{T} \tag{6-3}$$

を得る。　これは，(6-2)の平均電圧を R で割った値に他ならない。

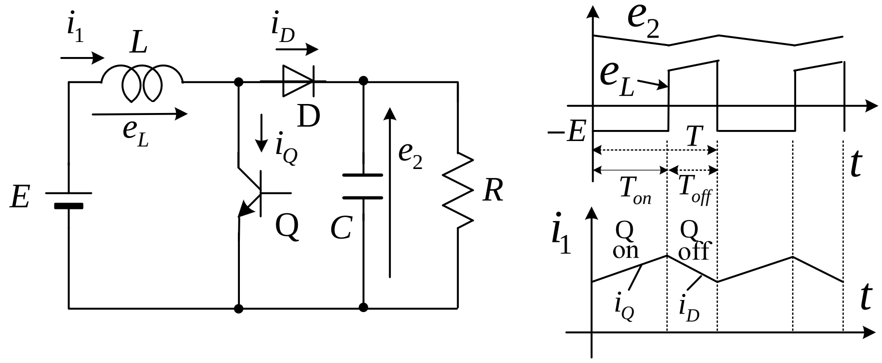


図 6-5　昇圧チョッパの動作 (boost converter, step-up converter)

次に，**昇圧チョッパ**を図 6-5 に示す。電流平滑用リアクトル L，電圧平滑用コンデンサ C，トランジスタ Q，ダイオード D よりなり，R は負荷である。L と C の値は普通十分大きくとられる。Q をオンすると，$i_1 = i_Q$ となって電流が流れ，コンデンサ電圧 e_2 は R を通して放電される。この間 D はオフ状態で，出力側から入力側への電流の逆流を防ぐ。次に，Q をオフすると，L に電圧が発生し，その電圧は E に加算されて D が導通し，$i_1 = i_D$ となりコンデンサを充電する。コイルの電圧の平均値を考えよう。

$$\int_0^T e_L dt = -\int_0^T L\frac{di_1}{dt}dt = -L(i_1(T) - i_1(0)) = 0 \tag{6-4}$$

何故なら，定常状態の周期性より，$i_1(T) = i_1(0)$ である。C が十分大きく，出力電圧 $e_2 = E_2$（一定）とすると，T_{off} 期間では，$e_L = E_2 - E$ である。(6-4)より，次式が成立する。

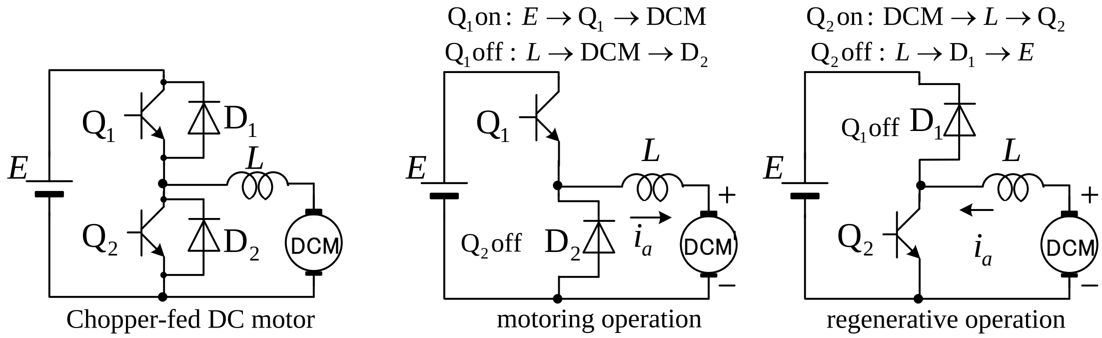
$$ET_{on} = (E_2 - E)T_{off} \quad \therefore E_2 = \frac{T_{on} + T_{off}}{T_{off}} = \frac{1}{1-d}E \tag{6-5}$$

このように出力電圧を入力電圧より高くすることができる。ただし，エネルギーが大きくなった訳ではなく，電源 E からは常に電流 i_1 が流れているが，ダイオード D には T_{off} の期間しか電流は流れておらず，その分電圧は高いが結果的にエネルギーはバランスしている。

○　チョッパーDC モータ(chopper-fed DC motor)

直流電圧を変化させるチョッパで DC モータの速度を容易に制御できる。図 6-6 は，正転だけが可能なチョッパ回路である。**力行運転**（りきこう）時（電動機運転時）には，Q_2 は常にオフし，Q_1 をオンオフする降圧チョッパとして利用することで DC モータの電圧を制御し速度を変

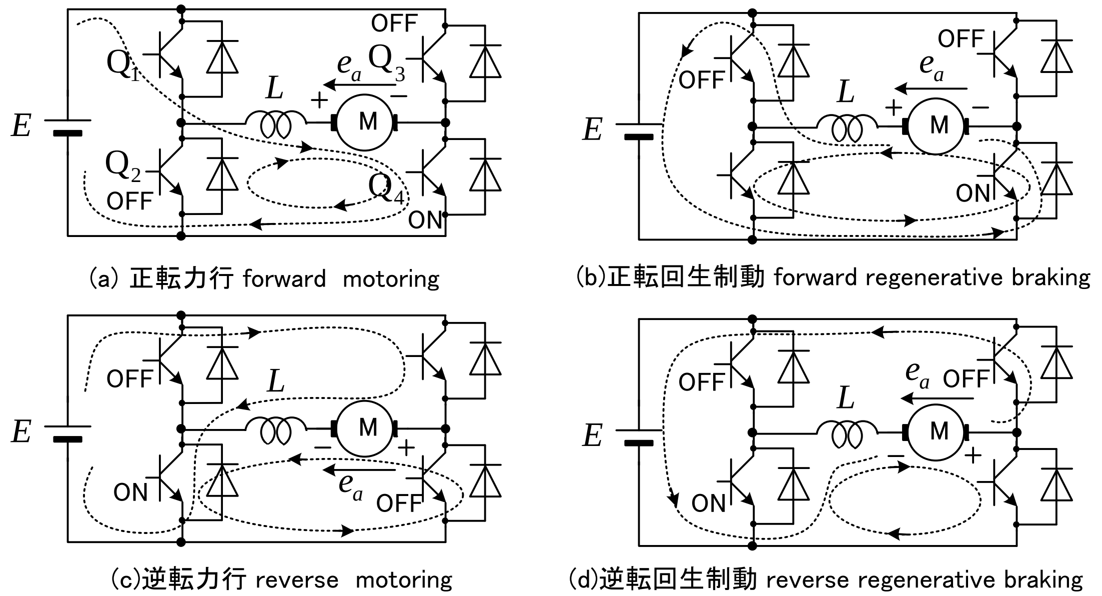
える。**回生運転**時（発電機運転時）には，Q_1は常にオフし，Q_2をオン，オフする昇圧チョッパとして利用することでモータの運動エネルギーを電源に戻すことができる。



(a) 回路構成　　(b) 力行運転　　(c)回生運転

図 6-6　Chopper-fed DC motor（正転のみ）

図 6-7 に DC モータの逆転も可能な回路構成とその動作を示す。



(a) 正転力行 forward motoring　　(b)正転回生制動 forward regenerative braking

(c)逆転力行 reverse motoring　　(d)逆転回生制動 reverse regenerative braking

図 6-7　**4象限運転**(four-quadrant operation)（正転，逆転可能）

正転の場合には，常にQ_3をオフ，Q_4をオンすることで，図 6-6 の場合と同様に力行，回生が可能である。逆転の場合には，常にQ_1をオフ，Q_2をオンしておく。逆転力行運転時（電動機運転）には，Q_4をオフし，Q_3をオン，オフする降圧チョッパとして運転する。このとき，電動機には逆方向の電圧が印加されていることに注意して欲しい。逆転回生運転時（発電機運転）には，Q_3をオフし，Q_4をオン，オフする昇圧チョッパとして運転する。チョッパ駆動 DC モータは制御が容易であり複数の小型モータを使う用途に適する。

第７章　インバータ

○　インバータとは？

インバータ(inverter)は直流電圧から交流電圧を得るための装置である。スイッチの組み合わせを変えることで，出力にEか$-E$の電圧が得られる。

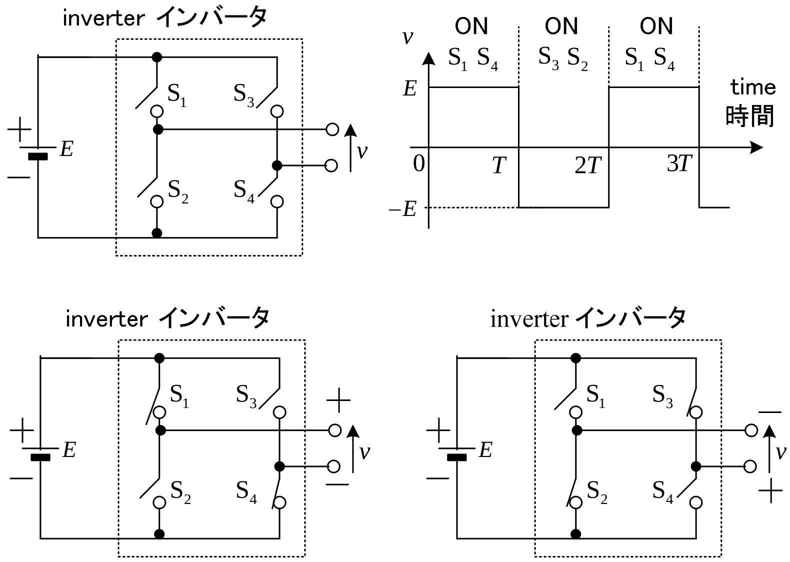


図 7-1　インバータのしくみ(principle of inverter)

インバータから出力される電圧vは，S_1, S_4がオンのときE，S_3, S_2がオンのとき$-E$となる。これを，周期$2T$ごとに繰り返すと，きれいな正弦波ではないが，交流電圧が得られる。一般に電流の経路を切り替えることを**転流**(commutation)という。

　これらのスイッチは，トランジスタを使った電気的なスイッチで構成する。しかし，トランジスタは一方向にしか電流を流さないので，逆並列にダイオードを組み合わせ図 7-2 の回路で用いることが多い。トランジスタの**ゲート** G にオン信号が入っているときは，トランジスタまたはダイオードを通って電流は両方向に流れることができるので，**コレクタ** C と**エミッタ** E 間は，スイッチがオンした状態（導体）と考えてよい。しかし，トランジスタのゲート G にオフ信号が入っているときはトランジスタを通って電流は流れないがダイオード

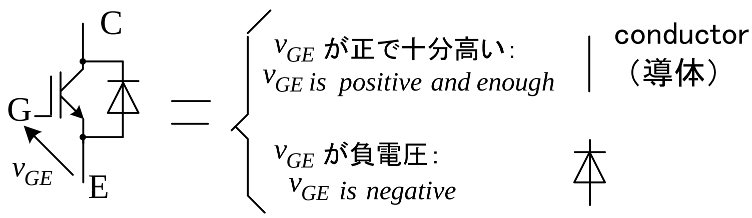


図 7-2　電気スイッチの考え方

を通っては流れることができ，一般のスイッチのように回路が切れた状態にはなっていない。しかし，このことは後で述べるようにかえって役立つ。

○ 実際のインバータ

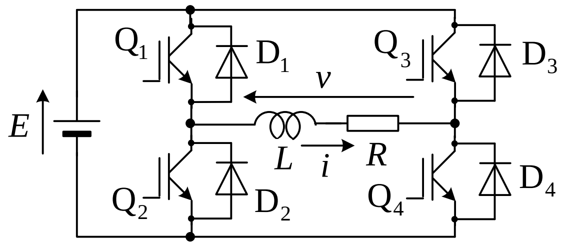
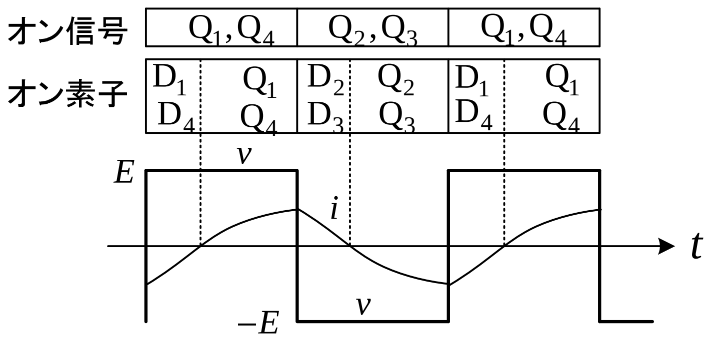


図 7-3　単相インバータ(single-phase inverter)

図 7-3 に実際の**単相インバータ**を示す。ここで，R, L は負荷を表している。まず，**パルス幅変調**（PWM）はしないで，交流電圧 v の周波数だけを変える場合を述べる。下図のように，この場合には，$\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_4$ に同時にオン信号を加える期間と $\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ に同時にオン信号を加える期間を交互に繰り返す。すると R, L 負荷のために電流は遅れるが，オン信号を加えた IGBT と逆並列のダイオードが導通し，方形波の交流電圧 v が図のように得られる（負荷によって電流は変化するが v は変化しない)。



PWM制御をしない場合

電流の向きに関係なく

$v = E$　　　：$\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_4$ にオン信号を入れるとき　　(7-1)

$v = -E$　　：$\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ にオン信号を入れるとき　　(7-2)

となる。例えば，$\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_4$ にオン信号を入れたとき，$i < 0$ であれば，$\mathrm{D}_4, R, L, \mathrm{D}_1, E, \mathrm{D}_4$ のループで電流が流れる。この結果，v を交流電圧にすることができる。次に，v の大きさを変える場合には，パルス幅変調により半周期の平均を変える。なお，$\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_3$ に同時にオン信号を加える期間と $\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_4$ に同時にオン信号を加える期間では電流に関係なく $v = 0$ とすることもできる。$v = 0$ となる期間を多く入れるほど，半周期の平均値の絶対値は小さくなる。

図 7-4 に示す上下のトランジスタで，Q_1, D_1 グループから Q_2, D_2 グループへの切り替えを詳しく考える。

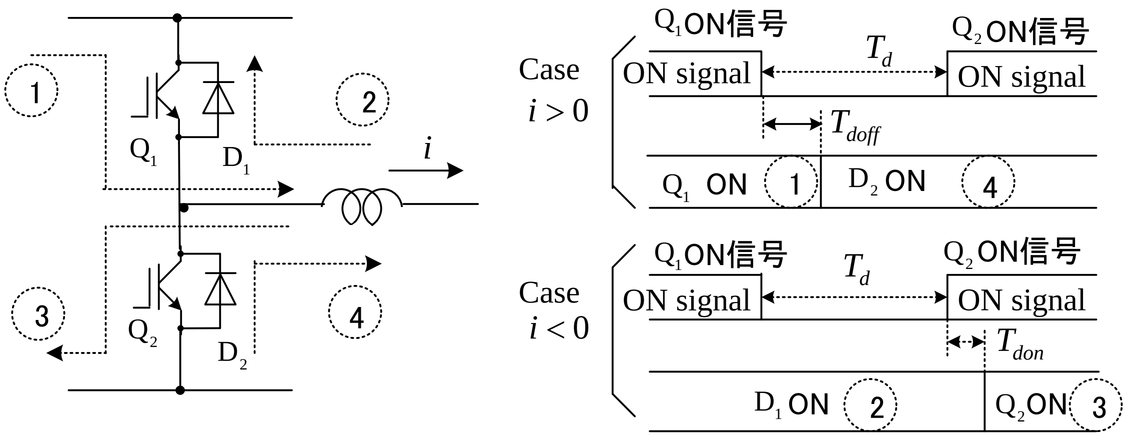


図 7-4　電流の流れる様子(ON signal , ON device and Current flow)

トランジスタ Q_1 と Q_2 に同時にオン信号を加えると，電源短絡を起こし，素子が破壊するので，絶対にしてはいけない。また，オン信号やオフ信号を入れてから実際にトランジスタがオンまたはオフするまでに多少時間を要するので，Q_1 と Q_2 の間でオン信号を切り替えるとき，どちらにもオフ信号を送る時間を設ける。これを，**デッドタイム** T_d という。図 7-4 に示すように，Q_1 にオン信号を送る状態から Q_2 にオン信号を送る状態にかわる場合，どの素子がオンするかは，流れる電流の向きによって異なる（負荷にインダクタンス成分があると電流は急に方向を変えることはできない）。

$i > 0$ の場合，オンしていた Q_1 にオフ信号を送ると，**ターンオフ時間** T_{doff} 後に Q_1 がオフするが, インダクタンスの働きで電流が流れ続けようとするから，D_2 がオンし，T_d 後 Q_2 にオン信号をいれても Q_2 はオンしない。$i < 0$ の場合，Q_1 にオン信号を送っても，Q_1 はオフしたままで，D_1 がオンするしかない。この後 Q_2 にオン信号をいれると**ターンオン時間** T_{don} 後に Q_2 はオンする。

○　インバータ－AC モータ

AC(交流)モータの速度を変えるには，それに接続する交流電源の周波数を変える必要がある。商用電源の周波数は 50Hz か 60Hz であるから，まず整流器で交流から直流を作り，その後インバータで直流からいろいろの周波数の交流を作り，AC モータに加える。このときの回路構成を図 7-5 に示す。AC モータは一般に三相であるから，図の三相インバータが用いられる。モータに加える交流電圧を作るためには，チョッパと同様に，PWM 制御を利用する。すなわち，直流電圧は変えられないから，周期ごとの平均値を変化させて等価的に任意の交流電圧を作る。整流器の出力電圧を E_d とし，これを 2 分割した図 7-6 を考える。

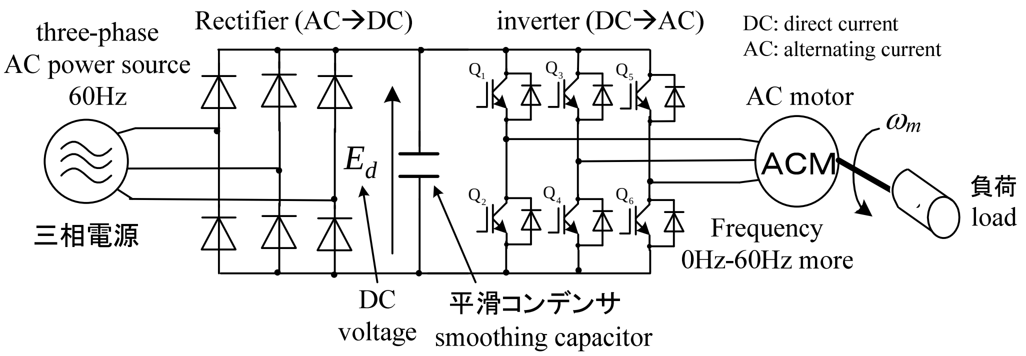


図 7-5　インバータによるＡＣモータの駆動主回路

A PWM inverter-fed AC motor dive system.

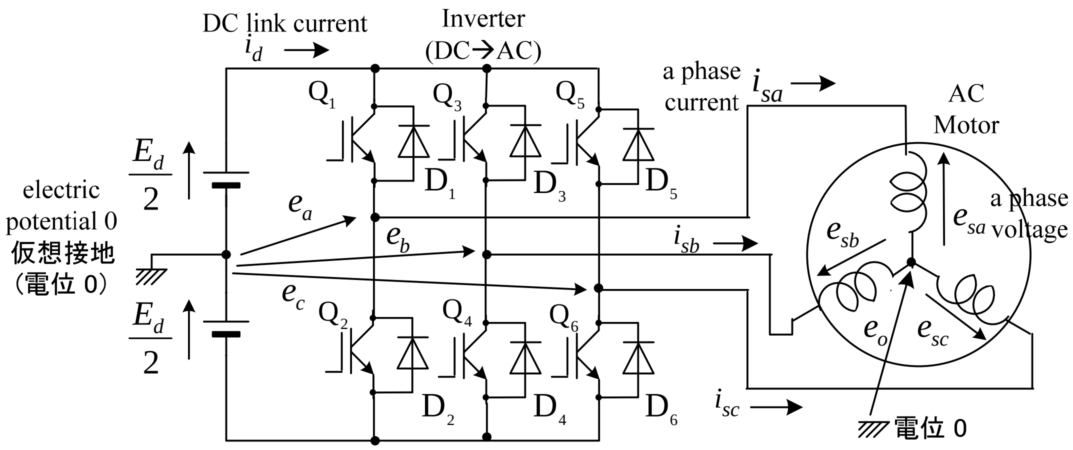


図 7-6　インバータ駆動ＡＣモータの電圧の定義 (definition of voltages)

図に示すモータの相電圧はe_{sa}, e_{sb}, e_{sc}であり，これを制御することが目的であるが，等価的にe_a, e_b, e_cを制御してもよい。このことをまず示す。図 7-6 より，

$$\begin{aligned} e_{sa} &= e_a - e_0 \\ e_{sb} &= e_b - e_0 \\ e_{sc} &= e_c - e_0 \end{aligned} \tag{7-3}$$

となる。モータの特性より，$e_{sa} + e_{sb} + e_{sc} = 0$が成立するので，中性点の電圧$e_0$は

$$e_0 = (e_a + e_b + e_c)/3 \tag{7-4}$$

である。ところで目的は，モータの電流を制御することであるから，静止座標系$(\theta = 0)$での固定子電圧$e_{s\alpha}, e_{s\beta}$が望み通りに制御されていれば良いと考えられる。(7-3)を代入して

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} \tag{7-5}$$

であるから，e_{sa}, e_{sb}, e_{sc}の代わりにそれぞれe_a, e_b, e_cを制御してもよいと考えられる。

e_a, e_b, e_cの制御はどれも同じように行うので，e_aの制御について考える。図で，トランジスタQ_1とQ_2は同時にオンさせせることは絶対にしてはならない。なぜなら，そうすると電源短絡となって素子が壊れるからである。Q_1にオン信号を入れているとき，Q_1かD_1が導通して，$e_a = E_d/2$となる。このとき，Q_2にはオフ信号が入っているのでこれがオンすることはないし，D_2がオンする可能性もない（$i_{sa} > 0$でD_2がオンするのであればQ_1がオンし，D_2はオフとなる)。逆に，Q_2にオン信号が入ると$e_a = -E_d/2$である。

そこで，Q_1, Q_2に入れるオン信号を図 7-7 のように制御する。すなわち，**キャリア（搬送波）**と**変調率**aを比較して，変調率aが大きいところでQ_1にオン信号を入れ，逆に変調率aが小さいところでQ_2にオン信号を入れる。キャリアや変調率はマイコンで作る。キャリアの周期Tにおけるe_aの平均値は次式で与えられる。

$$\overline{e_a} = \frac{E_d}{2}\frac{T_1+T_3-T_2}{T} = \frac{E_d}{2}\frac{T_1+T_2+T_3-2T_2}{T} = \frac{E_d}{2}(1-\frac{2T_2}{T}) = \frac{E_d}{2}a \tag{7-6}$$

図 7-7 で三角形相似より　$T : T_2 = 2 : 1-a$　だから　$a = 1 - \dfrac{2T_2}{T}$　(7-7)

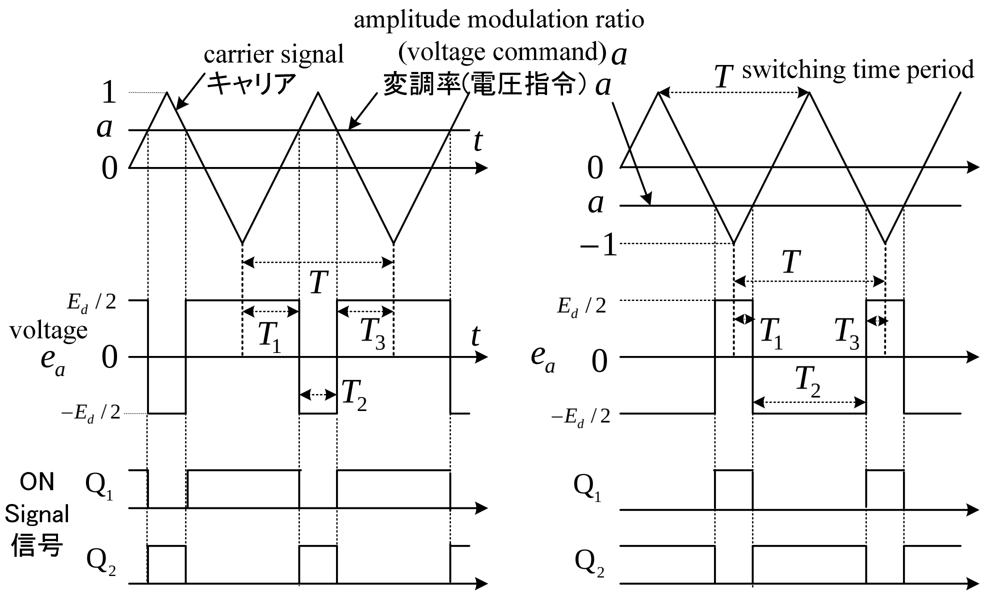


図 7-7　ＰWM制御(pulse width modulation control: short period)

また，Q1 オン期間は(7-7)を用いて

$$T_1 + T_3 = 2T_1 = T - T_2 = \frac{T + aT}{2} = \frac{T}{2} + \frac{\overline{e}_a T}{E_d} \tag{7-8}$$

変調率 a が $1, 0, -1$ のとき $\overline{e_a}$ はそれぞれ $E_d/2, 0, -E_d/2$ となり，a を変えることでスイッチングの周期 T ごとに $E_d/2$ から $-E_d/2$ の範囲で自由に電圧が作れることになる。a 相電圧指令を e_{sa}^* とすると，$e_{sa}^* = \overline{e}_a$ として制御すればよい。b 相，c 相も同様である。

$$a = a_m \sin\theta \tag{7-9}$$

のとき，e_a の基本波電圧 e_{a1} は次式で与えられる。

$$e_{a1} = \frac{E_d}{2} a = a_m \frac{E_d}{2} \sin\theta \tag{7-10}$$

相電圧の最大値は $E_d/2$ が限界となる。線間電圧の最大値は $\sqrt{3}E_d/2 = 0.87E_d$ が限度で直流電圧を十分利用しているとは言えない。

キャリア周波数として，10 k Hz を用いるとき，図 7-7，図 7-8 のキャリアの周期（**スイッチング周期**）T は 100 μ s となる。電動機の周波数（図 7-8 の変調率や電流 i_{sa} の周波数）が 50Hz のとき，周期が 20ms であるから，この 1 周期の中に 200 個の周期 T が入る。トランジスタはこのように速くオン，オフを繰り返すので，モータに流れる電流はモータ内のインダクタンスのためこのオン，オフに影響されず図 7-8 に示すようにほぼきれいな正弦波となる。図 7-8 で e_a の基本波は変調率 a に比例する（(7-10)が成り立つ）ことを確認せよ。

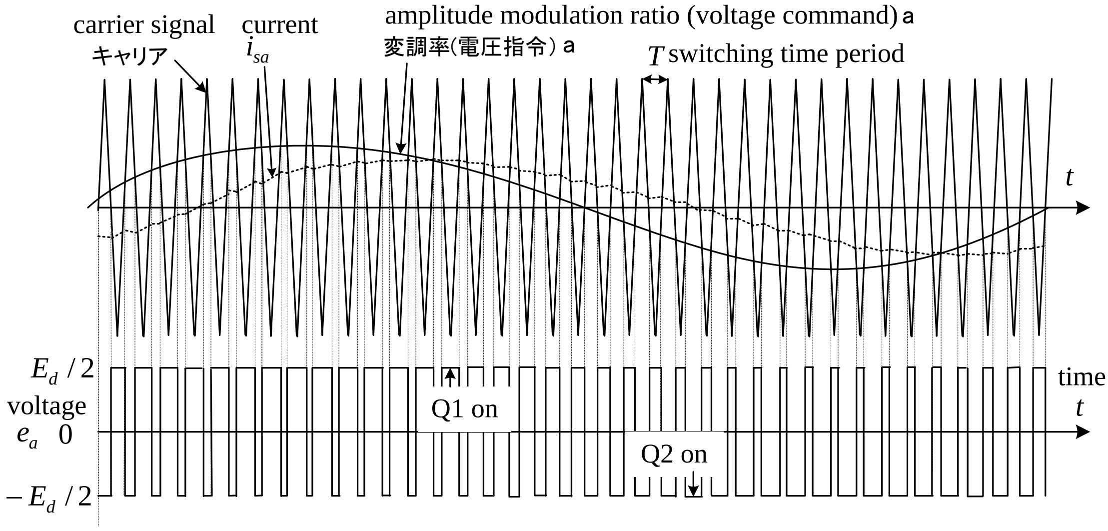


図 7-8　PWM 制御(pulse width modulation control: long period)

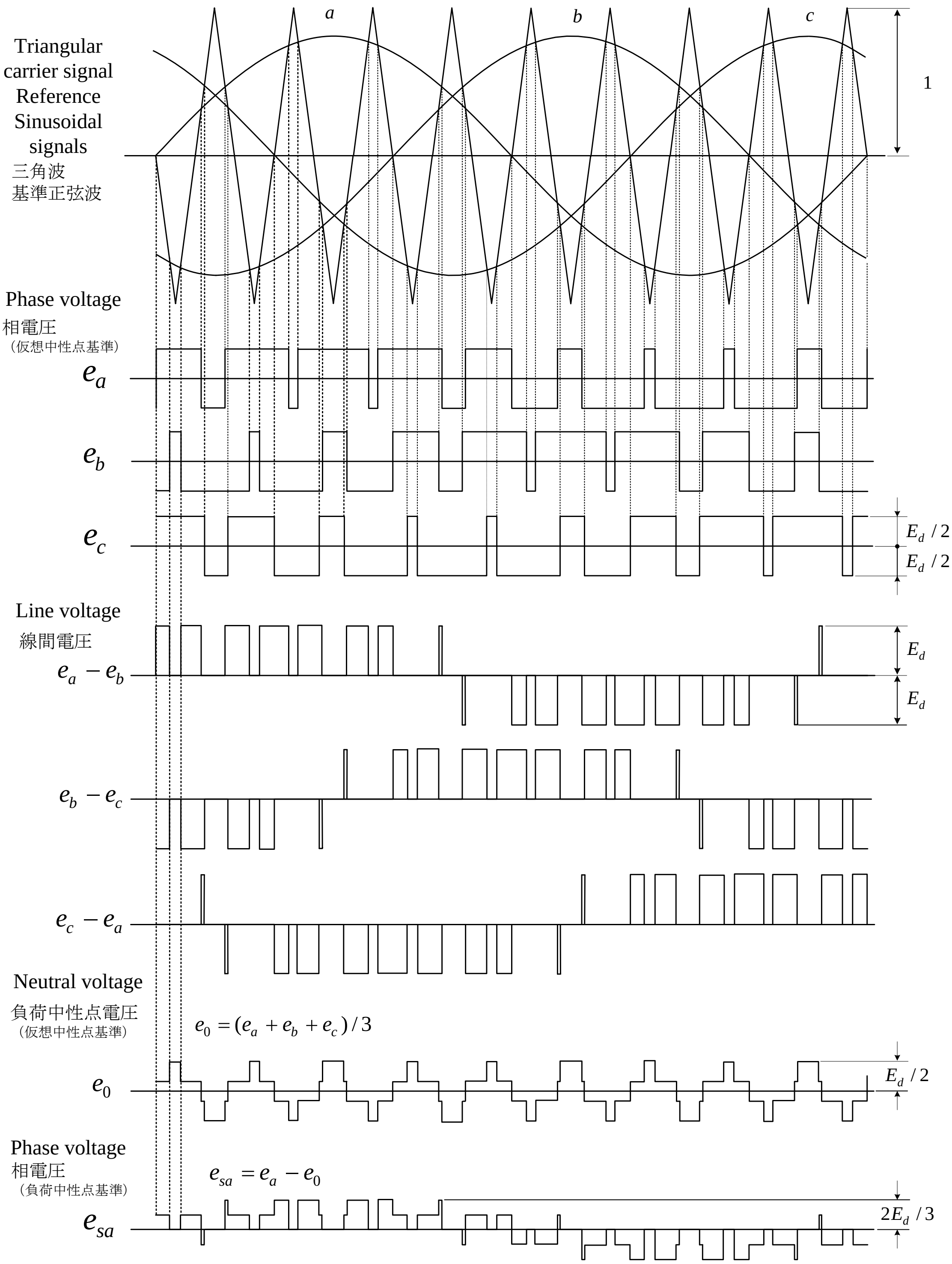


図 7-9　PWM 制御時の波形(pulse width modulation waveforms)

変調率a，b，cが1より大きい場合は，**過変調**(overmodulation)と呼ばれる。過変調になるとトランジスタがオン・オフ動作しないので，電圧指令通りの電圧が出力できず，出力電圧の高調波成分が増加する問題がある。そこで，過変調を用いないで電圧利用率の改善策として，次のように中性点電位を利用する方法がある。

$$a = a_m \sin\theta + \Delta v$$

$$b = a_m \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \Delta v \qquad (7\text{-}11)$$

$$c = a_m \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) + \Delta v$$

Δvは

$$\Delta v = (a_m / 6)\sin(3\theta)$$

して3次高調波成分を重畳させる方式がある[50]。a / a_mの最大値は微分することで求められ，$\sqrt{3}/2$（$\theta = \pi/3$など）となり1より小さい。b，cはaよりそれぞれ$2\pi/3$，$4\pi/3$遅れる（3θの項は遅れても同じ波形）。従って$a_m = 2/\sqrt{3} = 1.155$と1以上にしても，$a \le 1$となり全期間でPWMが可能である。

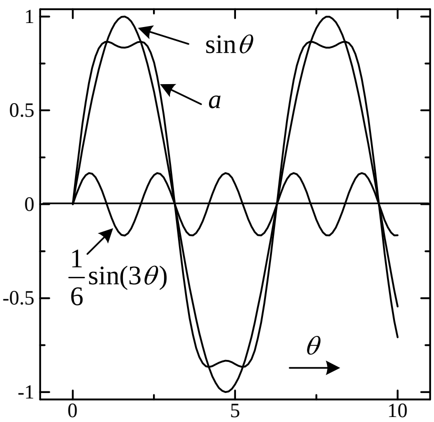


図7-10 $a = a_m\{\sin\theta + (1/6)\sin(3\theta)\}$ の波形（$a_m = 1$のとき）

(7-11)のとき，PWMによる高調波成分を無視すると(7-10)より

$$e_a = \frac{E_d}{2}(a_m \sin\theta + \Delta v),\ e_b = \frac{E_d}{2}(a_m \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \Delta v),\ e_c = \frac{E_d}{2}(a_m \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \Delta v) \qquad (7\text{-}12)$$

であるが，線間電圧にはΔvの影響はない。(7-3)，(7-3)に(7-12)を代入すると次式が成り立ち，相電圧にもΔvの影響はない。

$$e_{sa} = e_a - \frac{e_a + e_b + e_c}{3} = \frac{E_d}{2} a_m \sin\theta$$

(7-11)式よりも簡単な方法として，次式のようにΔvを選ぶ方法がある[49]。

$$\Delta v = \frac{1}{2}\mathrm{middle}(a_m \sin\theta, a_m \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}), a_m \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})) \qquad (7\text{-}13)$$

ここで，middleは３相電圧のうち２番目に高い（中間）電圧である。

例えば，$\pi/2 \le \theta \le 5\pi/6$のとき，b相が中間値となるから（３相波形を書いてみよ）

$$a = a_m \sin\theta + \frac{1}{2}a_m \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a_m \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$$

であり，$\theta = 2\pi/3$でaは最大値$\sqrt{3}a_m/2$をとる。従って，この場合にも$a_m = 2/\sqrt{3} = 1.155$と１以上にできる。他の期間も同様である。

空間ベクトル PWM 方式について述べる。この方式が実際に使われているケースは少ないと思われるが，PWM を考える上で重要である。

相電圧を

$$e_{sa} = e_m \cos\theta_v,\ e_{sb} = e_m \cos(\theta_v - \frac{2}{3}\pi),\ e_{sc} = e_m \cos(\theta_v + \frac{2}{3}\pi)$$

とするとき，空間ベクトル（最初の式が定義）は次式で計算できる。

$$\dot{e} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}(e_{sa} + e_{sb}e^{j\frac{2\pi}{3}} + e_{sb}e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(e_a + e_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + e_b e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ e_m e^{j\theta_v} \qquad (7\text{-}14)$$

従って，空間ベクトルの大きさは，線間電圧の実効値となる。

インバータの各スイッチングモードに対し，空間ベクトルは次式のように計算できる。

	$\dot{e}_0$	$\dot{e}_1$	$\dot{e}_2$	$\dot{e}_3$	$\dot{e}_4$	$\dot{e}_5$	$\dot{e}_6$	$\dot{e}_7$
a	0	1	1	0	0	0	1	1
b	0	0	1	1	1	0	0	1
c	0	0	0	0	1	1	1	1
e_a	$-\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$
e_b	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$
e_c	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$-\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E_d}{2}$
	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d$	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{\pi}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{2\pi}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}E_d$	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{4\pi}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{5\pi}{3}}$	0

１：上アームオン，０：下アームオン　＊上アームとは図６で Q_1D_1, Q_3D_3 または Q_5D_5

例えば，$\dot{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{E_d}{2} - \frac{E_d}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}} - \frac{E_d}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d$

(7-3)式を(7-14)式に代入すると，中性点電位の影響はなくなる。

三角波比較 PWM 方式で変調率が１のとき

$$e_a = \frac{E_d}{2}\cos\theta_v,\ e_b = \frac{E_d}{2}\cos(\theta_v - \frac{2}{3}\pi),\ e_c = \frac{E_d}{2}\cos(\theta_v + \frac{2}{3}\pi)$$

であるから，大きさ最大の空間ベクトルは次式で与えられる。

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{E_d}{2}e^{j\theta_v} = \frac{\sqrt{6}E_d}{4}e^{j\theta_v} \qquad (7\text{-}15)$$

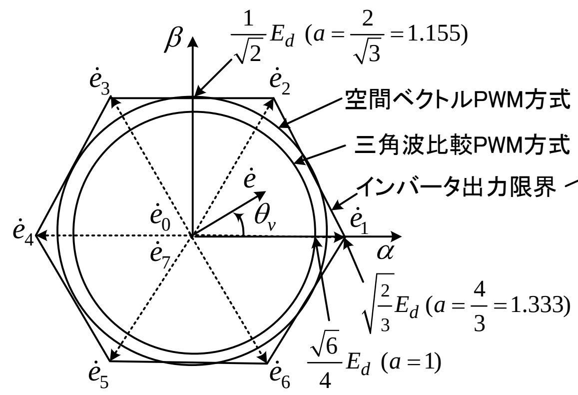


図 7-11 空間ベクトルと出力限界

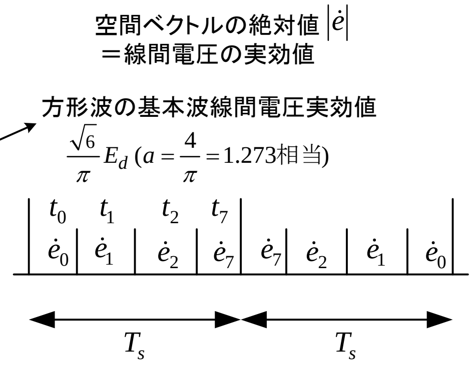


図 7-12　空間ベクトル PWM 方式

空間ベクトル方式では, 60 度区間で, $\dot{e}_1, \dot{e}_2$ と零ベクトル $\dot{e}_0, \dot{e}_7$ で任意のベクトル $\dot{e}$ を作る。周期 T_s の平均値を同じにすれば

$$T_s\dot{e} = t_1\dot{e}_1 + t_2\dot{e}_2$$

$$\therefore \quad \dot{e} = \frac{t_1}{T_s}\dot{e}_1 + \frac{t_2}{T_s}\dot{e}_2 \quad = \frac{t_1}{T_s}\sqrt{\frac{2}{3}}E_d + \frac{t_2}{T_s}\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{\pi}{3}} \tag{7-16}$$

ただし, $\frac{t_1}{T_s} \le 1, \ \frac{t_2}{T_s} \le 1, \ t_1 + t_2 \le T_s$

t_1, t_2, t_0, t_7 を適当に選ぶことで, $\dot{e}$ は $\dot{e}_1, \dot{e}_2$ を結ぶ三角形の中の任意のベクトルとなる。逆に, この外側の空間ベクトルは作れないので, この三角形がインバータの出力限界である。出力限界では, $t_0 = t_7 = 0$ である（ベクトルの内分の公式)。常に出力可能な空間ベクトルの大きさ $|\dot{e}|$ の最大値は, $t_1 = t_2 = T_s/2$ のときの値で,

$$|\dot{e}|_{\max} = \frac{E_d}{\sqrt{2}} \quad （＝線間電圧実効値の最大値） \tag{7-17}$$

である。すなわち空間ベクトル PWM 方式の出力電圧は六角形の内接円（変調率 1）まで正弦波で出力できる（円がスムーズの限界)。その結果, 内接円と六角形の間の領域は, 過変調領域で歪んだ線間電圧となるが基本波電圧は大きくできる。

三角波比較 PWM 方式と比較すると空間ベクトル PWM 方式では

$$(\frac{E_d}{\sqrt{2}})/(\frac{\sqrt{6}}{4}E_d) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155 \tag{7-18}$$

となり, 15.5%改善される。

具体的な時間の決め方を考えよう。

$0 \le \theta_v \le \pi/3$ の期間で，(7-14)，(7-16)を等しいとおいて，

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, e_m e^{j\theta_v} = \frac{t_1}{T_s}\sqrt{\frac{2}{3}}E_d + \frac{t_2}{T_s}\sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\frac{\pi}{3}}$$

実部と虚部を比較することにより

$$\frac{t_1}{T_s} = \frac{\sqrt{3}e_m}{E_d}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta_v) \quad , \quad \frac{t_2}{T_s} = \frac{\sqrt{3}e_m}{E_d}\sin\theta_v \tag{7-19}$$

ここで，$\gamma = \dfrac{\sqrt{3}e_m}{E_d}$ (7-20)

は空間ベクトル PWM 方式の変調率と呼ばれる。t_0, t_7 は

$$t_0 = t_7 = \frac{1}{2}(T_s - t_1 - t_2) \tag{7-21}$$

で求められる。三角波比較 PWM 方式は仮想中性点からみた相電圧を正弦波に制御する方式である。図 7-9 より三角波比較 PWM 方式では, 変調率によって零ベクトルの期間が決るが, それが正弦波ならある値以下にできず電圧が出せない。しかし三角波比較 PWM 方式でも中性点の電位をうまく選ぶことで, 空間ベクトル PWM 方式と同じ出力限界まで歪みのない線間電圧および巻線の相電圧（線間電圧で決る）を発生させることができる。3 次高調波成分を重畳(ちょうじょう)させる方式，中間電圧を利用する方法があり，既に述べた。空間ベクトル PWM 方式で 2 つの零ベクトルを使えば三角波比較 PWM 方式と同じ 3 アーム変調 PWM，どちらか片方使うと 2 アーム変調 PWM となる[27]。三角波比較 PWM 方式では三角波の頂点で必ず 2 つの零ベクトルが入る（図 7-9 e_a,e_b,e_c 見よ）。

なお，基本波成分を高めるため線間電圧が歪(ひず)んだ領域を使用する研究もなされている。極端な過変調を行った場合には，180° 通電形の波形となる。

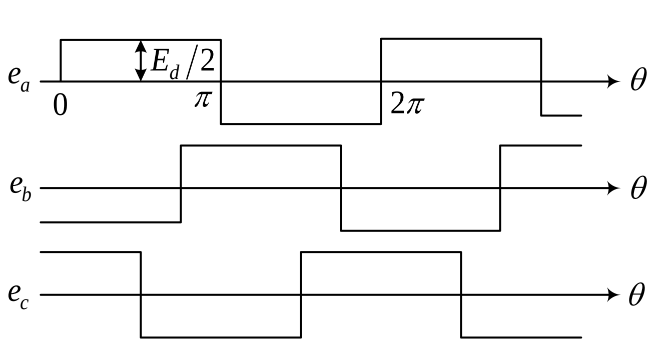


図7-13　180° 通電形

e_a をフーリエ級数展開すると，その基本波成分 e_{a1} は，

$$e_{a1} = \frac{2E_d}{\pi}\sin\theta$$

となる。この場合，線間電圧の基本波実効値は，$\sqrt{6}E_d/\pi = 0.7797E_d$ となり，これが三相**電圧形インバータ**で出力可能な最大実効値電圧である。方形波の場合，空間ベクトルPWM方式より $2\sqrt{3}/\pi$ ＝1.103倍まで電圧を大きくできる。180°通電は電車の高速運転時に利用されている。

図7-6で，直流母線電流(DC link current) i_d の波形がどうなるか考えよう。キャリアの周期 T の間，相電流は一定と考える。オン信号が入るトランジスタが Q_1 から Q_2 へ変化すると，相電流は一定なので，i_{sa} の電流だけ i_d は減少する。（$i_{sa}<0$ なら，$|i_{sa}|$ の分だけ増加する。このときは，Q_1 はオフで，D_1 を通って電流が流れている。）Q_3 と Q_4，Q_5 と Q_6 についても同様である。上側または下側だけにオン信号が入るとき $i_d=0$ である。従って，オン信号のタイミングに合わせて i_d を検出することで，相電流が検出できる(28)。ノイズやデッドタイムを考慮して，電流検出を行う必要がある。また，パルス幅が狭くなるとき検出誤差が出やすくなる。i_d は次式で表わせる。

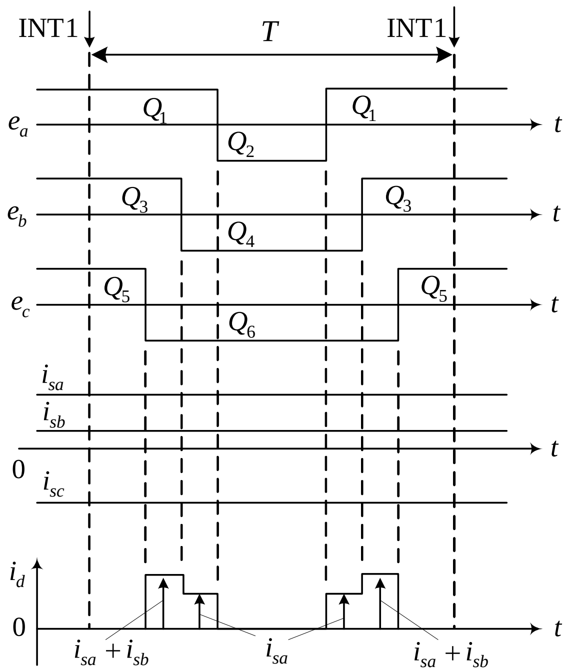


図7-14 直流母線電流

$$i_d = q_1 i_{sa} + q_3 i_{sb} + q_5 i_{sc}$$

$$if\ \ Q_i\ \ or\ \ D_i\ is\ conducting,\ q_i\ \ is\ 1\ \ and$$

$$if\ \ Q_i\ \ and\ \ D_i\ \ are\ not\ conducting,\ q_i\ \ is\ \ 0.(i=1,3,5)$$

第 8 章　DSP 制御システム

誘導モータのベクトル制御を例にとり，電流制御や速度制御の方法と制御器の設計，それらを実現するための DSP(digital signal processor)によるシステム構成を述べる。

○ 電流制御と速度制御

図 8-1 に誘導モータのベクトル制御を利用した速度制御系のブロック図を示す。

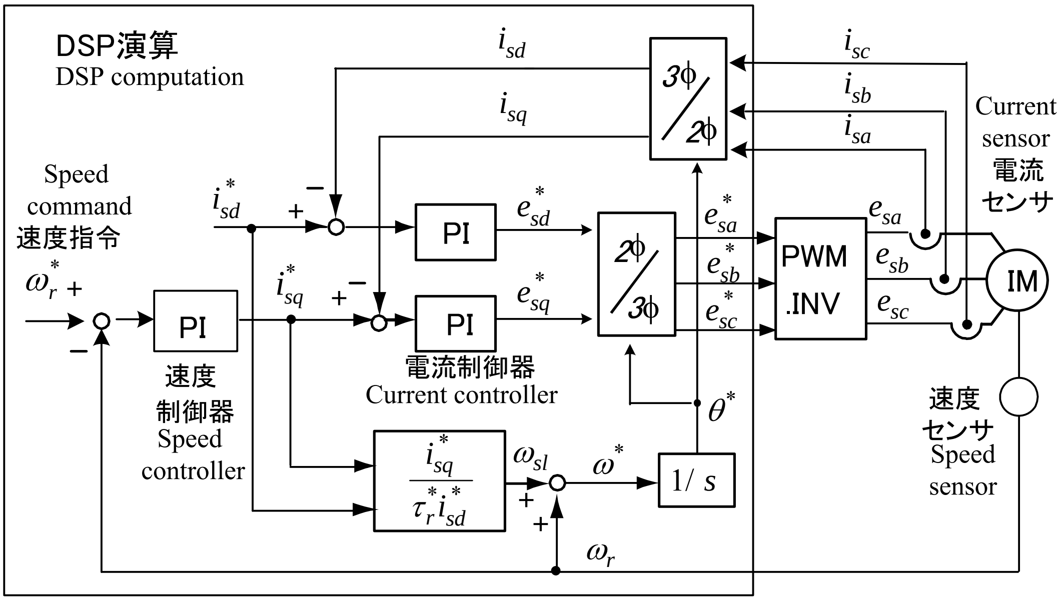


図 8-1　誘導モータのベクトル制御を用いた速度制御システム

電流制御法は種々あるが，交流電流を d-q 軸の直流電流に変換し，**PI(比例＋積分)制御器**を用いて制御する方式が一般的である。電流制御の性能をさらに向上するため，非干渉制御が用いられることもある。d-q 軸の電流制御が瞬時に行われると i_{sq}^* に比例してモータのトルクを瞬時に発生させることができる。これが**ベクトル制御**である。i_{sq}^* は DC モータの電機子電流に相当し，e_{sq}^* から右側を等価な DC モータと思えばよい。速度制御はベクトル制御とは関係ない。速度を増加させるにはトルクを増加させればよいので，指令速度より実速度が小さいほどトルクを増加させるため，速度 PI 制御の出力を i_{sq}^* とすることで，速度を制御できる。これは次式で表わせる。

$$i_{sq}^* = K_{ps}(\omega_r^* - \omega_r) + K_{is}\int_0^t (\omega_r^* - \omega_r)\,dt \qquad K_{ps} > 0,\ K_{is} > 0 \tag{8-1}$$

電流の偏差を PI 制御し，その出力を電圧指令とすることも同じ理屈である(我々は電圧を大きくすれば電流が増えることを知っている)。

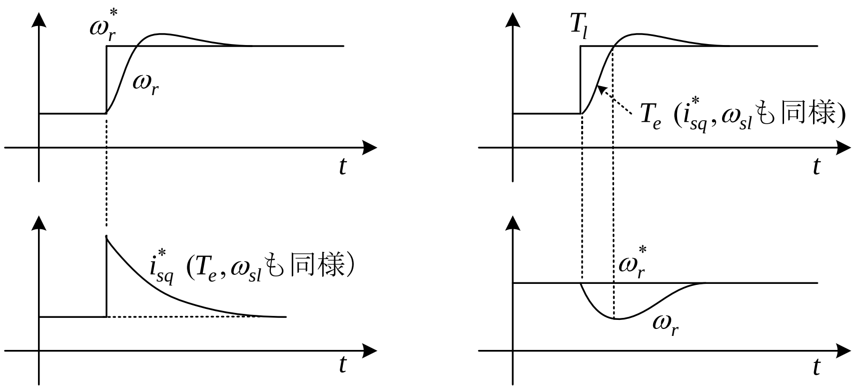


図 8-2　速度指令（左側）と負荷トルク（右側）のステップ変化に対する応答

図 8-2 の速度指令のステップ変化に対する応答では，速度の偏差によりまずＰ制御の項が働いて q 軸電流指令が瞬時に立ち上がり，その結果電動機が発生するトルク T_e がベクトル制御により同様に変化する（電流制御が理想的なら)。これにより，電動機の速度が上昇し始める。速度の偏差が徐々に小さくなるとＰ制御の項は減少するが，Ｉ制御の働きで速度は指令値以上に増加する。なぜなら負荷トルクが一定の場合，q 軸電流は最後には元の値に戻る。従って，(8-1)の右辺第 2 項について速度指令の変化で新たに生じた偏差の積分値は０にならないといけない。これは電流指令が**リミッタ**にかからない場合の話しで，リミッタにかかると**ワインドアップ現象**の防止のため通常積分値は増やさないから状況は異なる。次に，負荷トルクのステップ変化では，まず速度が減少し，その結果速度偏差を生じるので PI 速度制御器が働いてトルクが負荷トルクと等しくなるまで増加し，速度は指令値に戻る。速度指令が負の場合（逆回転）にも問題なく動作することを考えよ。

電流制御器の設計

まず，電流 PI 制御器の設計法について述べる。電流制御は高速に行うので，誘導モータを漏れインダクタンスと抵抗(一次＋二次)の直列回路として考える。このときのブロック図を示す。付録 1 の T－Ｉ形過渡等価回路で，電流の変化は高速だから周波数が高く励磁回路は無視する。速度に比例する起電力の項は外乱と考える。

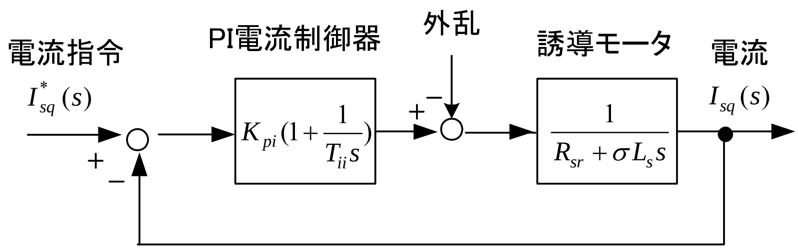


図 8-3　電流制御系のブロック図

電流制御の閉ループ伝達関数を求めると次式となる。

$$\frac{I_{sq}}{I_{sq}^*}=\frac{K_{pi}(T_{ii}s+1)}{(\sigma L_s s+R_{sr})T_{ii}s+K_{pi}(T_{ii}s+1)} \tag{8-2}$$

ここで，$T_{ii}\equiv\sigma L_s/R_{sr}$ (8-3)

とすると，電流の伝達関数は次のように一次遅れ系となる[(23)]。

$$\frac{I_{sq}}{I_{sq}^*}=\frac{K_{pi}}{R_s T_{ii}s+K_{pi}}\equiv\frac{1}{T_{eq}s+1} \tag{8-4}$$

この伝達関数の**遮断周波数**をω_cとすると

$$\omega_c=\frac{K_{pi}}{R_{sr}T_{ii}}=\frac{1}{T_{eq}} \tag{8-5}$$

したがって，設計法としては，遮断周波数ω_cを決めて，(8-3)式よりT_{ii}，(8-5)式よりK_{pi}を

求めればよい。

このとき，一巡伝達関数（開ループ伝達関数）G_oは，次式で与えられる。

$$G_o=\frac{K_{pi}}{R_{sr}T_{ii}s} \tag{8-6}$$

$$R_{sr}=R_s+(\frac{M}{L_r})^2R_r=1.6+(\frac{0.112}{0.1179})^2\times0.85=2.367\Omega$$

$$\sigma L_s=(1-\frac{M^2}{L_sL_r})L_s=(1-\frac{0.112^2}{0.1176\times0.1179})\times0.1176=0.0112\mathrm{H}$$

積分時間　$T_{ii}=\dfrac{\sigma L_s}{R_{sr}}=\dfrac{0.0112}{2.367}=0.00473$

比例ゲイン　$K_{pi}=\sigma L_s\omega_c=0.0112\times\omega_c$

積分ゲイン　$K_{ii}=\dfrac{K_{pi}}{T_{ii}}$

$\omega_c=1500$で設計すると，$K_{pi}=\sigma L_s\omega_c=0.0112\times1500=16.8$

$$K_{ii}=\frac{K_{pi}}{T_{ii}}=\frac{16.8}{0.00473}=3552$$

となる。

速度制御器の設計

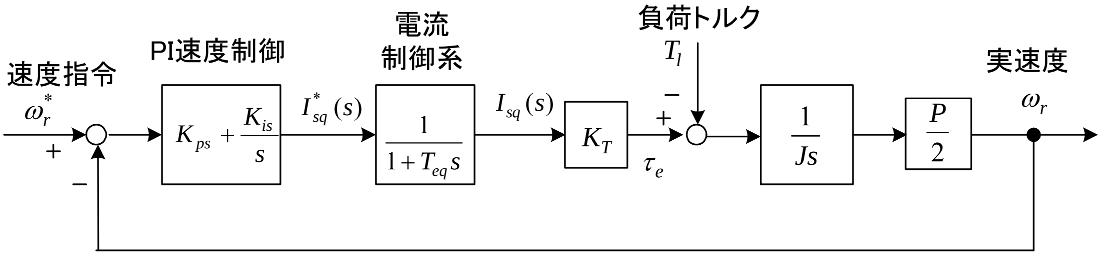


図 8-4　速度制御器設計のためのシステムのブロック図

図 8-4 ではベクトル制御が理想的に行われて，トルクは次式で制御できるものとしている。

$$\tau_{\mathrm{e}}=\frac{PM^2}{2L_r}i_{sd}^*i_{sq}^*\equiv K_T i_{sq}^* \tag{8-7}$$

このブロック図より速度制御系の開ループ伝達関数は次式で表せる。

$$\frac{\omega_r}{\omega_r^*}=(K_{ps}+\frac{K_{is}}{s})\frac{1}{1+sT_{eq}}\frac{PK_T}{2J\,s} \tag{8-8}$$

これを基に，PI 速度制御系を設計するためのボード線図を図 8-5 に示す。

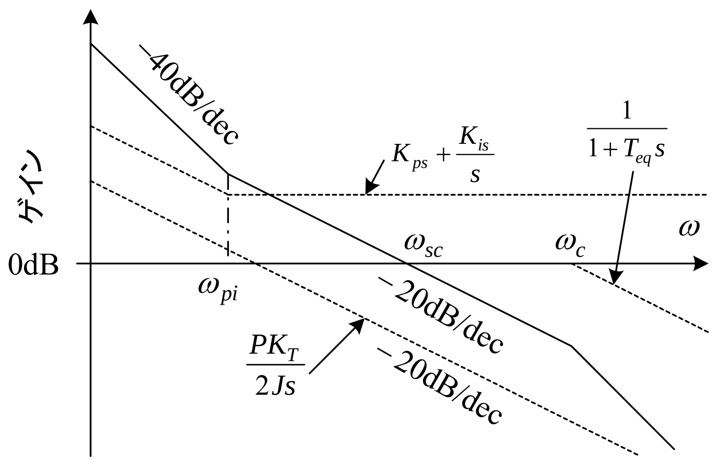


図 8-5　PI 速度制御系の閉ループ伝達関数[23]

設計の基本的考え方として，速度制御系の**交差角周波数** ω_{sc} 付近では，-20dB/dec の特性を持つようにして安定性を確保する。これは-20dB/dec の特性が長く続けば位相遅れが 90 度近くになり，180 度に達しないので不安定とはならないからである。速度制御系の交差角周波数 ω_{sc} が電流制御系の交差角周波数 ω_c に近いとオーバーシュートを生じやすくなるため，

ω_c は ω_{sc} より数倍以上高く設計する。このため，ω が ω_{sc} 付近では，電流制御の伝達関数は 1 と考えてよい。また，PI 制御器の**折れ点角周波数** ω_{pi} は，

$$\omega_{pi} = K_{is} / K_{ps} \tag{8-9}$$

であるが，ω_{sc} において-20dB/dec の傾きを確保するためには，ω_{pi} は ω_{sc} の 1 /5 以下にする。この結果，ω_{sc} 付近では K_{is} の項は無視してよい。従って，交差周波数 ω_{sc} は以下のように求まる。

$$\left|\frac{PK_T K_{ps}}{j\,2J\,\omega_{sc}}\right| = 1 \quad \therefore \omega_{sc} = \frac{PK_T K_{ps}}{2J} \tag{8-10}$$

従って，PI 速度制御器のゲインは，ω_{sc} を与えて

$$K_{ps} = 2J\omega_{sc} /(PK_T) \tag{8-11}$$

とする。積分ゲインは，

$$\omega_{pi} \le \omega_{sc} / 5 \tag{8-12}$$

のように ω_{pi} を選んで，

$$K_{is} = \omega_{pi} K_{ps} \tag{8-13}$$

で設計する。

ω_{sc} の目安としては，サイリスタレオナード速度制御系で 30rad/s が限界，誘導モータの可変速ドライブで 50rad/s 以上（速度範囲 1:100 以上），誘導モータのサーボシステムで 200rad/s 以上と言われている。また，800W の PM 同期モータのサーボシステムを 500rad/s で設計した例もある。また，電流制御については，PWM 制御のキャリア周波数が 10kHz（IGBT 使用）の場合に，ω_c =2000rad/s とした例がある。

以下は設計例である。

$$K_T = \frac{PM^2}{2L_r} i_{sd}^* = \frac{4 \times 0.112^2}{2 \times 0.1179} \times 4.2 = 0.894$$

比例ゲイン　$K_{ps} = \dfrac{J\omega_{sc}}{2K_T} = \dfrac{0.014}{2 \times 0.894}\omega_{sc} = 0.00783\omega_{sc}$

積分ゲイン　$K_{is} = \dfrac{\omega_{sc} K_{ps}}{5}$

積分時間　$T_{is} = \dfrac{K_{ps}}{K_{is}}$

$\omega_{sc} = 30$ で設計すると，

$$K_{ps} = 0.00783 \times 30 = 0.235 \qquad K_{is} = \frac{30 \times 0.235}{5} = 1.41$$

$$T_{is} = \frac{K_{ps}}{K_{is}} = \frac{0.235}{1.41} = 0.167 \quad \left(\omega_{pis} = \frac{K_{is}}{K_{ps}} = \frac{1.41}{0.235} = 6\,\text{rad/s}\right)$$

図 8-6 に電流制御とベクトル制御が理想的とした場合のシステムのブロック図を示す。負荷トルクを 0 と考えた場合の閉ループ伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{\omega_r(s)}{\omega_r^*(s)}=\frac{a\,s+b}{s^2+a\,s+b}$$

ただし，$a=\dfrac{K_{ps}PK_T}{2J}$，$b=\dfrac{K_{is}PK_T}{2J}$

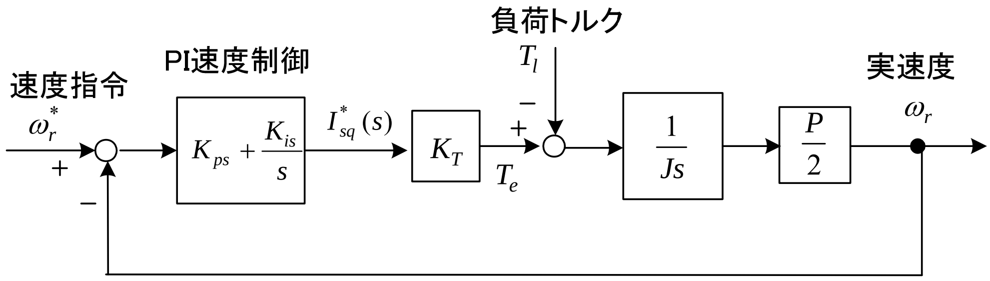


図 8-6　速度制御系のブロック図（電流制御とベクトル制御が理想的）

○　DSP 制御システム

図 8-7 に**ディジタルシグナルプロセッサ**（Digital Signal Processor :DSP)によるインバータ-交流モータ制御システム示す。

整流器，平滑コンデンサ，IGBT インバータ，交流電動機の主回路についてはこれまで述べた。交流機には**トルクセンサ**を介して負荷用の直流機をつないでいる。トルクセンサは軸のねじれを検出するもので，100rpm 以下では測定が困難である。制御回路は DSP を用いて構成しており, 直流電圧と電動機の電流（２相分）を A/D 変換器を通して DSP に取り込む。PWM ゲート信号発生器は変調率（電圧指令）が入力されてゲートパルスを PWM インバータに送り IGBT をオン，オフさせる。また，PWM ゲート信号発生器は電力回生時のエネルギーを処理するためブレーキ回路の IGBT もオン，オフする。これらの信号はノイズの影響を受けない光ファイバーで信号を伝えている。ブレーキ回路には抵抗が接続されており，**回生エネルギー**（誘導電動機が発電機として動作）は熱として消費される。この回路がないとダイオードの整流回路は電源にエネルギーを戻せないから平滑コンデンサの電圧が上昇し危険である。PWM ゲート信号発生器から DSP に送られる INT1 信号は，PWM の周期に合わせて DSP に割り込みをかけ，電流検出等に都合の良いタイミングを知らせ，**割り込み処理**を INT1 信号 (例えばスイッチング周波数 5kHz なら 200μs) ごとに行う。**ホストコンピュータ**は DSP と接続して，**制御プログラム**を転送したり，DSP の情報を画面に表示したりする役目をもつ。DSP 制御回路や PWM インバータは Myway プラス（株）の製品を用いている。

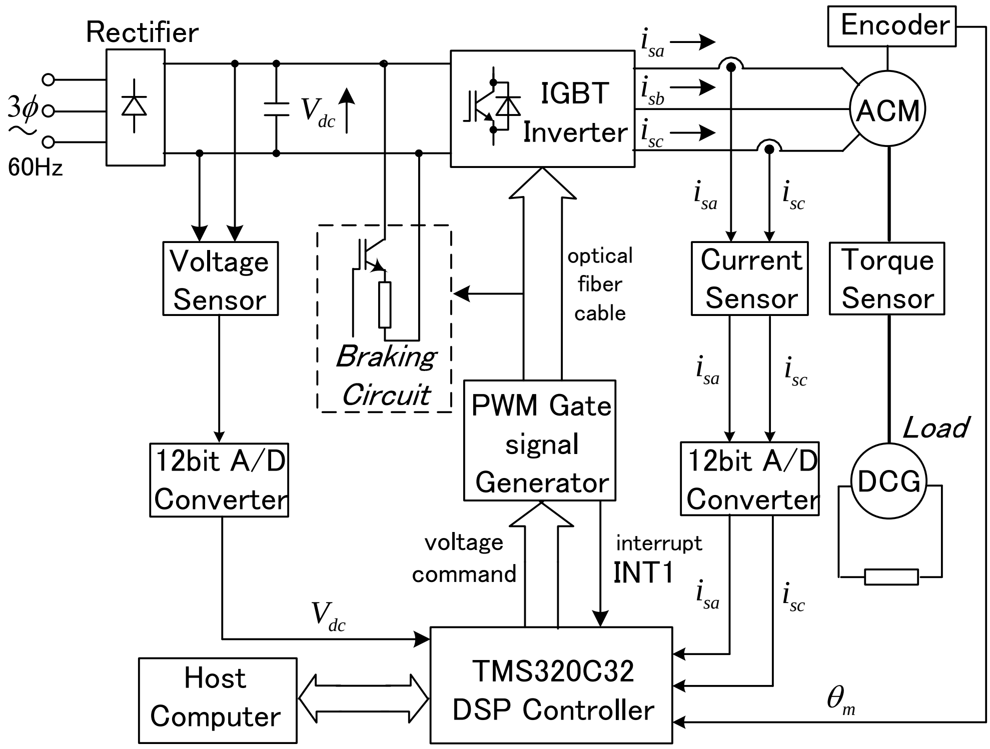


図 8-7　DSP によるインバータ-交流モータ制御システム

図 8-8 に TMS320C32 の機能ブロックを示す。TMS320C32 は，外部クロック 50MHz で命令サイクルタイムは 40ns で動作する。TMS320C33 は，外部クロック 150MHz である。

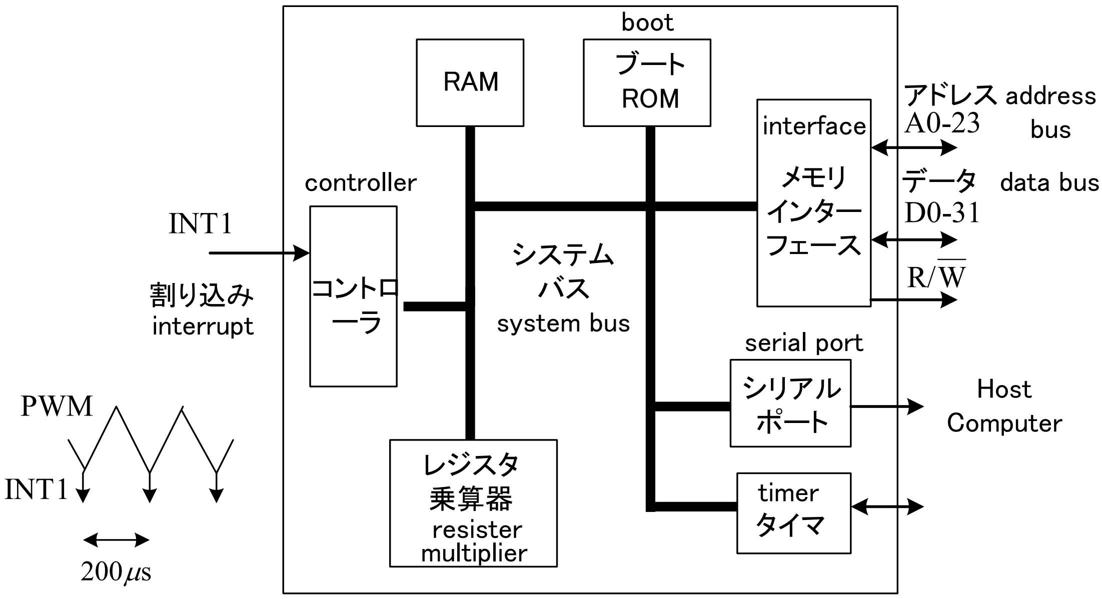


図 8-8　TMS320C32 の機能ブロック(**Texas Instruments**)

○　ソフトウェア構成

DSP によるディジタル制御を行う場合，微分や積分を伴う制御演算は差分方程式の形に離散化して実現する。PI 制御の離散化についてのべる。

PI 制御は，その入力 $e(t)$ と出力 $u(t)$ に対し，時間領域では次式で表せる。

$$u(t) = K_P e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt \tag{8-14}$$

これをサンプリング周期 T について離散化すると，積分の近似の違いで次式が考えられる。

①　$$u(k) = K_P e(k) + K_i \sum_{m=0}^{k} e(m)T \quad \text{（進み矩形近似）} \tag{8-15}$$

②　$$u(k) = K_P e(k) + \frac{K_i}{2} \sum_{m=0}^{k} (e(m) + e(m-1))T \quad \text{（台形近似）} \tag{8-16}$$

(8-15)と(8-16)を書き換えて，差分方程式の形にすると，次式が得られる。

①　$$u(k) = u(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + K_i T e(k) \tag{8-17}$$

②　$$u(k) = u(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + \frac{K_i T}{2}(e(k) + e(k-1)) \tag{8-18}$$

ディジタル PI 制御演算（電流及び速度）には，(8-17)か(8-18)を用いるが，実際に使う場合には出力の上限と下限いわゆるリミッタをかけておくことが必要である。(8-17), (8-18)式を用い，$u(k)$ のみにリミッタをかけると，リミッタにかかったときでも積分器に値が蓄積し，リミッタからぬけたときに大きなオーバーシュートが生じる**ワインドアップ現象**が起きる。しかし，(8-17)や(8-18)を使い $u(k)$ にリミッタをかけるとワインドアップ現象は生じない。

制御プログラムのフローチャートを図 8-9 に示す。制御プログラムは図 8-9 に示すように３つのプログラムから成る。DSP はこの 3 つのプログラムを同時に実行することはできないが，優先順位を決めて順番に実行する。人間も時間を決めていろいろの仕事をしているのと同じである。DSP は，まず最初に**メインプログラム**を上から順番に実行していく。DSP とつながっているハードウェアの初期化や設定が主で，大部分は Myway プラス（株）が作ったソフトを利用している。AD 変換器や PWM 発生器の中にもメモリがあって，そこのデータを変えることでいろんな使い方ができる（これが初期化や設定である)。割り込みをどんなふうに使うか（たとえばタイマ割り込みの時間や割り込みプログラムの保存されている場所）を DSP に設定しておくことも必要である。その後，DSP を割り込み受付可能状態にする。それ以前は割り込みを受け付けない。PWM の動作開始で PWM ゲート信号発生器が動き始める。その後，波形を表示するため，電流や速度などのデータをホストコンピュータに送る仕事や逆にホストコンピュータからのデータを DSP に送る仕事を永遠に続けることになる（DSP をストップするまで)。

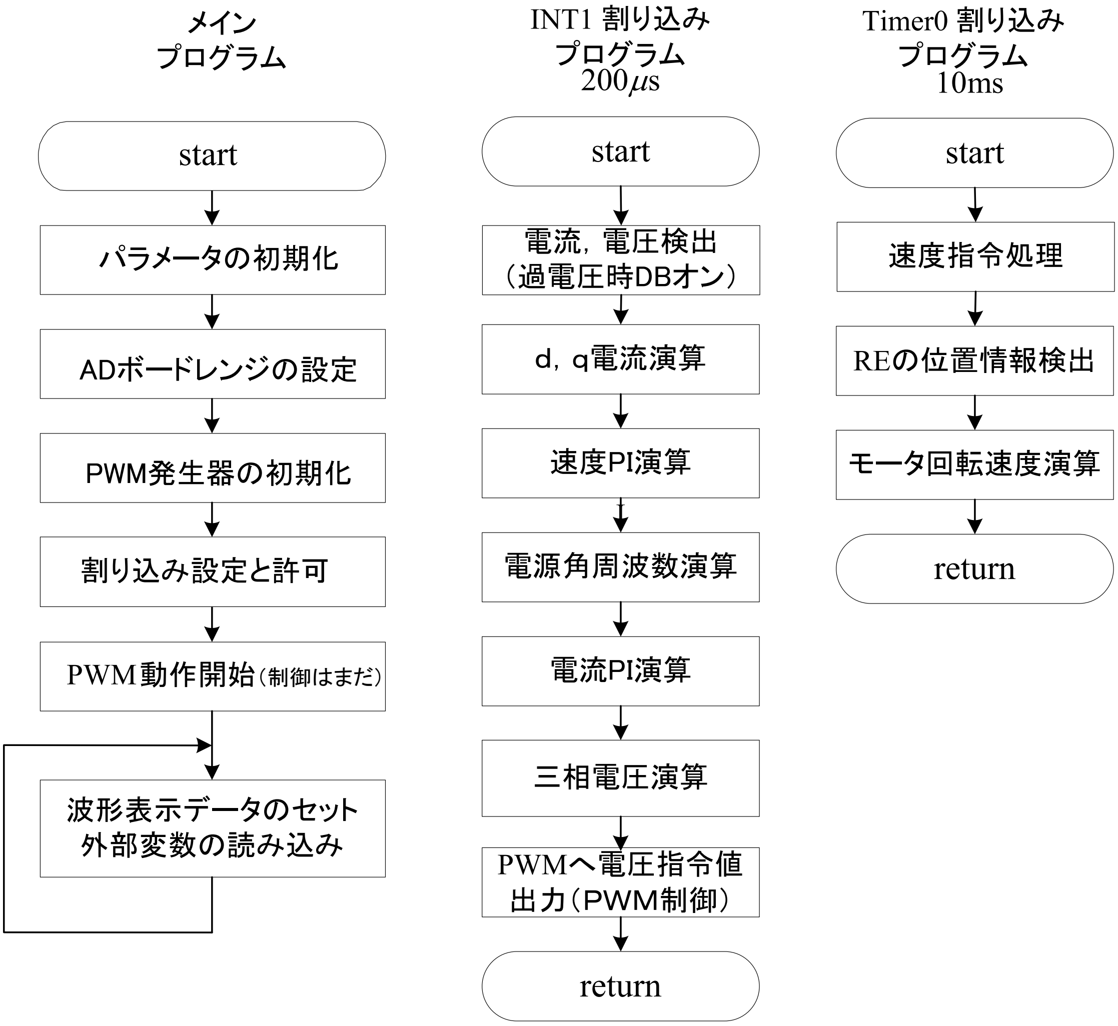


図 8-9　ベクトル制御プログラムのフローチャート

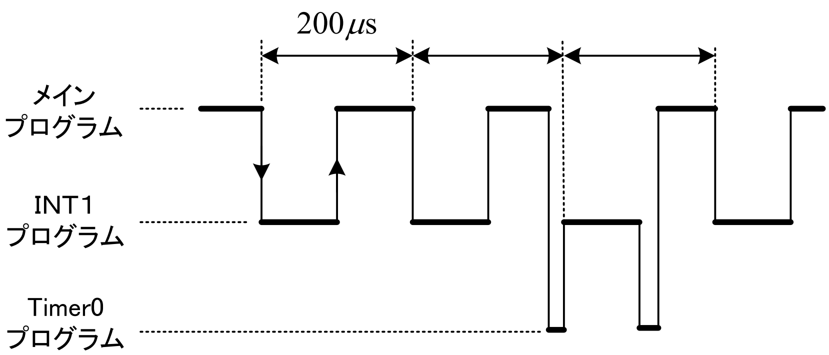


図 8-10　プログラムの実行シーケンス
（ＤＳＰは同時に２つのプログラムを処理できない！）

割り込み許可後，ゲート信号発生器から INT1 の信号が DSP に入ると，DSP はメインプログラムの仕事をやめて **INT1割り込みプログラム**を実行する。INT1 のプログラムがベクトル制御や速度制御の中心で，我々が作るプログラムの大部分がこれである。INT1 のプログラムが終わると，DSP は先ほど止めていたところからメインプログラム（波形表示データのセット）を繰り返し実行する。仕事をしていたら電話が鳴って（これが割り込み），電話の用事を済ませてから元の仕事に戻るといったところである。INT1 の割り込み信号は 200μs ごとに来るので，INT1 のプログラムの実行時間は 200μs 以下にしておかないと正常に動作しなくなる（暴走する）。電話が 10 分おきにかかってくるとして，話が 10 分以内に終わらないと次の電話に出られないことと同じである。**Timer0 割り込み**は，10ms ごとに DSP に信号が入り，実行される。このタイマーは DSP 自身で作っている。ちょうど自分の欲求で 1 時間ごとにお茶を飲むのと似ている。INT1 を実行中に Timer0 割り込みが入っても，優先順位があって INT1 が終ってからでないと Timer0 は受け付けられない。一番優先順位が低いのがメインプログラムで，これは２つのプログラムが走っていないときに実行される。電話中はお茶を飲まず，お茶を飲んでいても電話があれば出て，それらの時間以外で仕事をするといったところ。Timer0 割り込みプログラムは，比較的ゆっくりやればよい制御等に利用する。

実験の手順の説明

上記３つの実験プログラムを C 言語で作り，ホストコンピュータに入れる。DSP の電源を入れて，ホストコンピュータと DSP が通信できる状態にする。DSP 側ではROMのブートプログラムが動く。次に，C 言語のプログラムを**アセンブル**して機械語（DSP にとって C は理解できず機械語のみ分る）に直し，Myway プラス（株）が作ったプログラムとも一緒にする（**リンク**という）。これを，ホストコンピュータから DSP へ送り，DSP はメモリ RAM にこれらのプログラムを保存する（**ダウンロード**という）。このあとホストからコマンドを入力すると DSP が読み込み，それに応じた仕事をしてくれる。これらの通信やコマンドの処理プログラムは Myway プラス（株）が作ったもので、パソコンと DSP 両方に必要である。

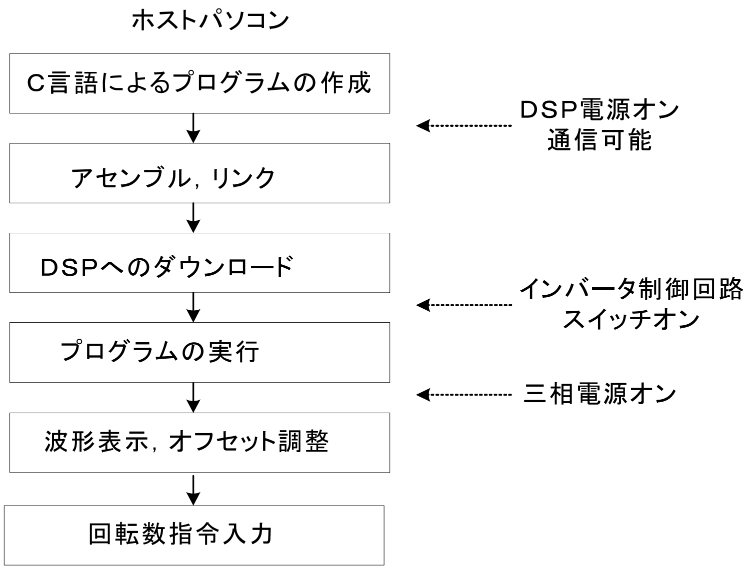


図 8-11　実験の手順

○　同期電動機の速度制御システム

図 8-12 にベクトル制御を利用した同期電動機の速度制御システムを示す。位置センサにより磁極位置が判るので，それに基づいて座標変換を行い電流制御することでベクトル制御が達成される。すべり周波数演算がない点が誘導機のベクトル制御との差である。

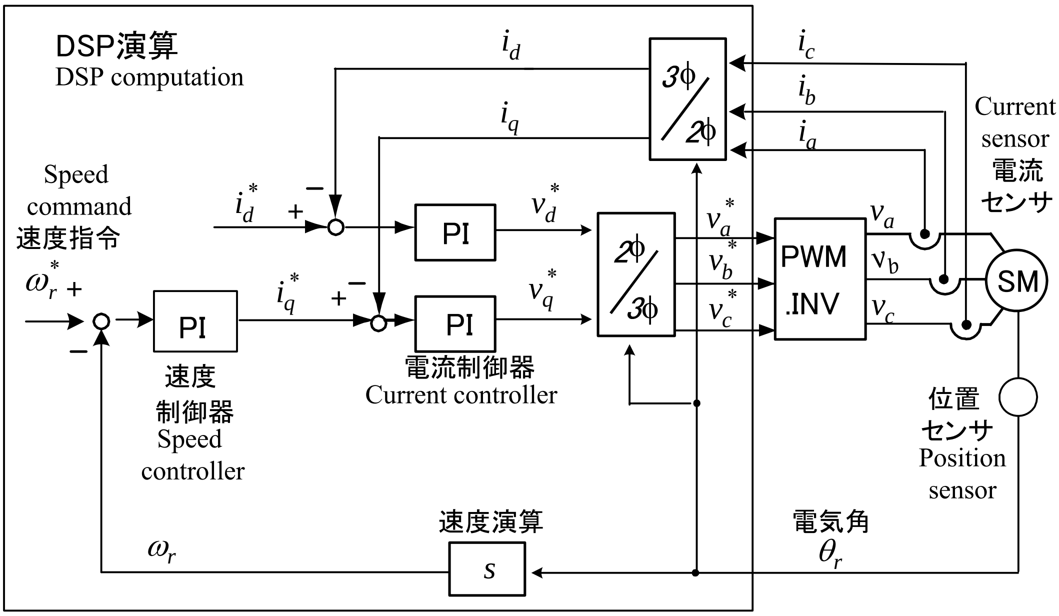


図 8-12　ベクトル制御を用いた同期電動機の速度制御システム

○　電流の非干渉制御

図 8-1，図 8-12 では，電流制御として PI 制御を考えた。この部分には，一般に**非干渉制御**(decoupling control)を追加して用いられている。非干渉制御は，d 軸電圧を増加させると d 軸電流だけが増加するのではなく，q 軸電流も変化する（干渉分と呼ぶ）ので，これを防ぐ目的がある。q 軸電流についても同じことが言える。非干渉制御は，干渉分を演算して加えてやることで，PI 電流制御の出力電圧が，その軸の電流成分だけに作用するようにする。誘導電動機と永久磁石同期電動機の非干渉制御を用いた電流制御の例をそれぞれ図 8-13，図 8-14 に示す。これは，ベクトル制御に使用する磁束の位相に同期した回転座標系の式から容易に得られる。(3-17)より

$$e_{sd} = (R_s + \sigma L_s p) i_{sd} - \omega^* \sigma L_s i_{sq} + \frac{M}{L_r} p \psi_{rd} - \frac{\omega^* M}{L_r} \psi_{rq} \tag{8-19}$$

$$e_{sq} = \omega^* \sigma L_s i_{sd} + (R_s + \sigma L_s p) i_{sq} + \frac{\omega^* M}{L_r} \psi_{rd} + \frac{M}{L_r} p \psi_{rq} \tag{8-20}$$

ベクトル制御が理想的であれば，i_{sd}^* を一定に制御する場合

$$\psi_{rd} = M\, i_{sd}, \psi_{rq} = 0 \tag{8-21}$$

であるから，これを上式に代入して

$$e_{sd} = (R_s + \sigma L_s p) i_{sd} - \omega^* \sigma L_s i_{sq} \tag{8-22}$$

$$e_{sq} = \omega^* \sigma L_s i_{sd} + (R_s + \sigma L_s p) i_{sq} + \frac{\omega^* M}{L_r} \psi_{rd} = (R_s + \sigma L_s p) i_{sq} + \omega^* L_s i_{sd} \tag{8-23}$$

よって，図 8-13 の非干渉制御を行うと $e_{sd}^* = e_{sd}$, $e_{sq}^* = e_{sq}$ であれば，次式が成り立つ。

$$e_{sdc} = (R_s + \sigma L_s p) i_{sd} \tag{8-24}$$

$$e_{sqc} = (R_s + \sigma L_s p) i_{sq} \tag{8-25}$$

e_{sdc}, e_{sqc} から見ると，それぞれ d および q 軸電流のみが関係するので，電流制御が容易になる。実際の電流の代わりに電流指令を用いることも可能である。同期機についても，Park の式から同様に導ける。

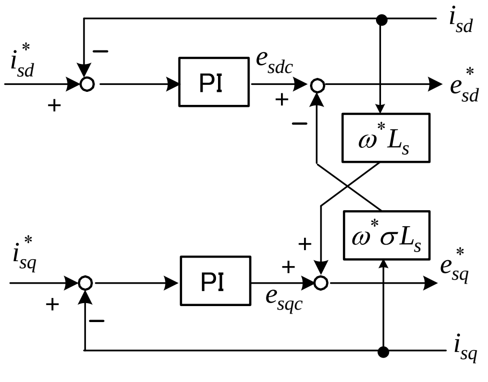


図 8-13　誘導機の電流制御
（非干渉制御付き）

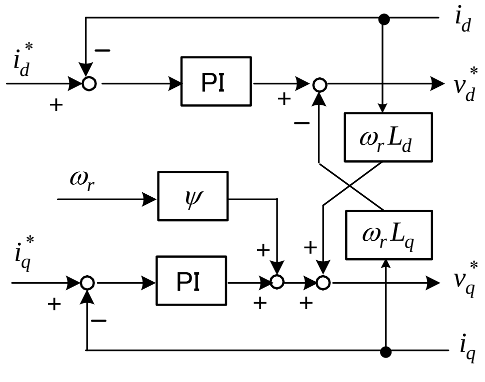


図 8-14　永久磁石同期機の電流制御
（非干渉制御付き）

付録1　誘導機の2軸理論

固定子と回転子それぞれの 3 相回路について成り立つ 6 つの微分方程式を変数変換することで，過渡状態でも使える簡単な 4 つの微分方程式を導く。2 つ減少できるのは誘導機が対称でかつ固定子と回転子それぞれ 3 相電流の和が 0（零相成分が 0）となるからである。**空間ベクトル**[14][22][25][51]を定義して複素数として計算する方が行列を用いた計算より簡単である。静止座標系の空間ベクトルは，定常状態では一般のフェーザと実質的に同じになる。

○　誘導機のモデル（静止座標系）

固定子の a 相巻線軸と α 軸が一致するような，図の $\alpha-\beta$ 軸（**静止座標系**）を考える。$\alpha-\beta$ 軸と巻線軸（a_s, b_s, c_s(固定子)$, a_r, b_r, c_r$(回転子)）のなす角の cos 成分より，**固定子側**について，$f_{sa}+f_{sb}+f_{sc}=0$ の場合に，次式の変数変換を定義する。

$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} \tag{a1-1}$$

逆に，

$$\begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix}$$

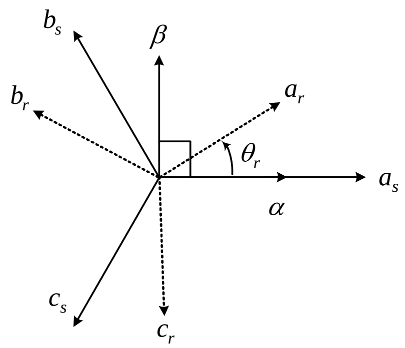


図 a1-1 巻線軸と $\alpha-\beta$ 軸（**静止座標系**）

ここで，f は電圧 e，電流 i，鎖交磁束 ψ を表す。いま，**空間ベクトル** $\dot{f}_s$（静止座標系）を次式で定義する。

$$\dot{f}_s \equiv f_{s\alpha} + j\, f_{s\beta} \tag{a1-2}$$

f は電圧 e，電流 i，鎖交磁束 ψ を表す。

(a1-1)より，次式が得られる。

$$\dot{f}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(f_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{sc}\right) \tag{a1-3}$$

回転子側については，回転子の巻線軸が回転するので，定数でなく次式で $\alpha-\beta$ 量が求まる。

$$\begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta_r & \sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \tag{a1-4}$$

回転子側の空間ベクトルも以下のように定義する。 f は電圧 e，電流 i，磁束 ψ を表す。

$$\dot{f}_r \equiv f_{r\alpha} + j\, f_{r\beta} \qquad \text{(a1-5)}$$

(a1-4)より

$$\dot{f}_r = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\{ f_{ra}(\cos\theta_r + j\sin\theta_r) + f_{rb}(\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + j\sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi)) \right.$$

$$\left. + f_{rc}(\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + j\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)) \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r}(f_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{rc}) \qquad \text{(a1-6)}$$

第 3 章で求めた固定子側の微分方程式(3-5) より，

$$\dot{e}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(e_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} e_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} e_{sc})$$

$$= R_s \dot{i}_s + p\dot{\psi}_s \qquad \text{(a1-7)}$$

$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0$ ， $i_{ra} + i_{rb} + i_{rc} = 0$ であるから，(3-2)より

$$\dot{\psi}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(\psi_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi}\psi_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\psi_{sc})$$

$$= (l_s + L_{ss})\dot{i}_s - \frac{L_{ss}}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\{i_{sb} + i_{sc} + e^{j\frac{2}{3}\pi}(i_{sa} + i_{sc}) + e^{-j\frac{2}{3}\pi}(i_{sa} + i_{sb})\}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr}\cos\theta_r (i_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{rc})$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr}\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi)(i_{rb} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{rc} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{ra})$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} M_{sr}\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)(i_{rc} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{ra} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{rb})$$

$$= (l_s + \frac{3}{2}L_{ss})\dot{i}_s$$

$$+ M_{sr}\left\{ \dot{i}_r e^{-j\theta_r}\cos\theta_r + \dot{i}_r e^{-j\theta_r} e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + \dot{i}_r e^{-j\theta_r} e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \right\}$$

$$= (l_s + \frac{3}{2}L_{ss})\dot{i}_s + M_{sr}\dot{i}_r e^{-j\theta_r}\cdot\frac{3}{2}e^{j\theta_r} \qquad \text{（付録公式利用）}$$

$$= (l_s + \frac{3}{2}L_{ss})\dot{i}_s + \frac{3}{2}M_{sr}\dot{i}_r \qquad \text{(a1-8)}$$

ここで， $L_s = \frac{3}{2}L_{ss} + l_s$ ， $M = \frac{3}{2}M_{sr}$ とおくと (a1-9)

$$\dot{\psi}_s = L_s\dot{i}_s + M\,\dot{i}_r \qquad \text{(a1-10)}$$

(a1-7)へ代入して，

$$\dot{e}_s = R_s\dot{i}_s + L_s p\dot{i}_s + Mp\dot{i}_r \qquad \text{(a1-11)}$$

(3-6)より，

$$\dot{e}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} (e_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} e_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} e_{rc})$$

$$= R_r \dot{i}_r + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} p(\psi_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} \psi_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \psi_{rc})$$

故に，

$$\dot{e}_r = R_r \dot{i}_r + e^{j\theta_r} p(\dot{\psi}_r e^{-j\theta_r}) \tag{a1-12}$$

(3-3)より，

$$\dot{\psi}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} (\psi_{ra} + e^{j\frac{2}{3}\pi} \psi_{rb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \psi_{rc})$$

$$= (l_r + \frac{3}{2} L_{rr}) \dot{i}_r + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{j\theta_r} M_{sr} \left\{ \cos\theta_r (i_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{sc}) \right.$$

$$+ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \cdot (i_{sb} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{sc} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{sa})$$

$$\left. + \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \cdot (i_{sc} + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_{sa} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_{sb}) \right\}$$

$$= (l_r + \frac{3}{2} L_{rr}) \dot{i}_r + e^{j\theta_r} M_{sr} \dot{i}_s \left\{ \cos\theta_r + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + e^{j\frac{2}{3}\pi} \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \right\}$$

$$= (l_r + \frac{3}{2} L_{rr}) \dot{i}_r + e^{j\theta_r} M_{sr} \dot{i}_s \cdot \frac{3}{2} e^{-j\theta_r}$$

$$= (l_r + \frac{3}{2} L_{rr}) \dot{i}_r + \frac{3}{2} M_{sr} \dot{i}_s \tag{a1-13}$$

ここで，

$$L_r = \frac{3}{2} L_{rr} + l_r \tag{a1-14}$$

とおくと，

$$\dot{\psi}_r = L_r \dot{i}_r + M \dot{i}_s \tag{a1-15}$$

(a1-12)より，

$$\dot{e}_r = R_r \dot{i}_r + e^{j\theta_r} p(L_r \dot{i}_r e^{-j\theta_r} + M \dot{i}_s e^{-j\theta_r})$$

$$= R_r \dot{i}_r + L_r p \dot{i}_r + M p \dot{i}_s - j\omega_r L_r \dot{i}_r - j\omega_r M \dot{i}_s \tag{a1-16}$$

(a1-11)，(a1-16)より，静止座標系での空間ベクトルを用いた誘導機のモデルは

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & Mp \\ (p - j\omega_r) M & R_r + (p - j\omega_r) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \tag{a1-17}$$

となる。(a1-17)式を実部と虚部に分けて，静止座標系での誘導機のモデルが次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ e_{r\alpha} \\ e_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & 0 & Mp & 0 \\ 0 & R_s + L_s p & 0 & Mp \\ Mp & \omega_r M & R_r + L_r p & \omega_r L_r \\ -\omega_r M & Mp & -\omega_r L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{a1-18}$$

固定子鎖交磁束は(a1-10)より

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + M i_{r\alpha},\ \psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + M i_{r\beta} \tag{a1-19}$$

で表わされ，これを用いると固定子側の式は

$$e_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + p\psi_{s\alpha} \tag{a1-20}$$

$$e_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + p\psi_{s\beta} \tag{a1-21}$$

となる。**回転子鎖交磁束**は(a1-15)より

$$\psi_{r\alpha} = L_r i_{r\alpha} + M i_{s\alpha},\ \psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} + M i_{s\beta} \tag{a1-22}$$

で表わされ，これを用いると回転子側の式は

$$e_{r\alpha} = R_r i_{r\alpha} + p\psi_{r\alpha} + \omega_r \psi_{r\beta} \tag{a1-23}$$

$$e_{r\beta} = R_r i_{r\beta} + p\psi_{r\beta} - \omega_r \psi_{r\alpha} \tag{a1-24}$$

となる。最終的に二次側の諸量は全て一次側に換算した式を用いるが，式は換算後も同じ形なので，単に二次側の変数や定数は換算された量と考えるだけでよい（第 3 章参照）。

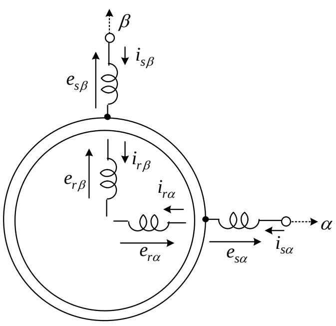


図 a1-2 誘導機 $\alpha - \beta$ 座標系モデル(2)

○ 誘導機のモデル（任意回転座標系）

静止座標系のモデルを任意の角速度 ω で回転する $d-q$ 回転座標系へ変換する。

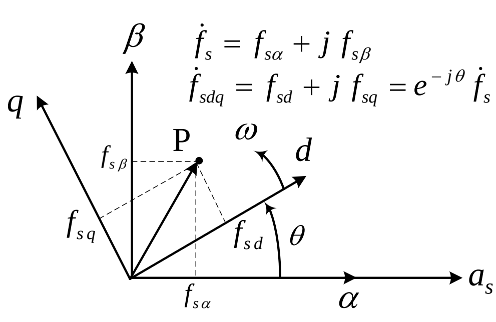


図 a1-3 静止座標系と回転座標系

図 a1-3 より，P 点を静止座標系から見た $\dot{f}_s$ ，$\dot{f}_r$ と $d-q$ 座標系から見た $\dot{f}_{sdq}$，$\dot{f}_{rdq}$ の関係は，$d-q$ 座標系から見る方が，長さが同じで $-\theta$ 回転して見えるので，　次式が得られる。

$$\dot{f}_{sdq} = e^{-j\theta}\dot{f}_s \tag{a1-25}$$

$$\dot{f}_{rdq} = e^{-j\theta}\dot{f}_r \tag{a1-26}$$

(a1-11)に，p にかからないように左から $e^{-j\theta}$ を掛けて，

$$e^{-j\theta}\dot{e}_s = e^{-j\theta}R_s\dot{i}_s + e^{-j\theta}L_s p\dot{i}_s + e^{-j\theta}Mp\dot{i}_r$$

$$\therefore \quad \dot{e}_{sdq} = R_s\dot{i}_{sdq} + e^{-j\theta}L_s p(e^{j\theta}\dot{i}_{sdq}) + e^{-j\theta}Mp(e^{j\theta}\dot{i}_{rdq})$$

$$= R_s\dot{i}_{sdq} + L_s p\dot{i}_{sdq} + j\omega L_s\dot{i}_{sdq} + Mp\dot{i}_{rdq} + j\omega M\dot{i}_{rdq} \tag{a1-27}$$

(a1-16)に同様に，左から $e^{-j\theta}$ を掛けて，

$$e^{-j\theta}\dot{e}_r = e^{-j\theta}R_r\dot{i}_r + e^{-j\theta}L_r p(e^{j\theta}\dot{i}_{rdq}) + e^{-j\theta}Mp(e^{j\theta}\dot{i}_{sdq})$$
$$-e^{-j\theta}j\omega_r L_r(e^{j\theta}\dot{i}_{rdq}) - e^{-j\theta}j\omega_r M(e^{j\theta}\dot{i}_{sdq})$$

$$\dot{e}_{rdq} = R_r\dot{i}_{rdq} + L_r p\dot{i}_{rdq} + j\omega L_r\dot{i}_{rdq} + Mp\dot{i}_{sdq} + j\omega M\dot{i}_{sdq}$$
$$-j\omega_r L_r\dot{i}_{rdq} - j\omega_r M\dot{i}_{sdq} \tag{a1-28}$$

(a1-27)，(a1-28)式より，

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{sdq} \\ \dot{e}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p + j\omega L_s & Mp + j\omega M \\ Mp + j(\omega-\omega_r)M & R_r + L_r p + j(\omega-\omega_r)L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{sdq} \\ \dot{i}_{rdq} \end{bmatrix} \tag{a1-29}$$

但し，$p\theta = \omega$

(a1-29)を実部と虚部に分けて，$\dot{f}_{sdq} = f_{sd} + j\,f_{sq}$，$\dot{f}_{rdq} = f_{rd} + j\,f_{rq}$ とすることで，任意回転座標系での誘導機のモデルが以下のように得られる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e_{rd} \\ e_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega L_s & Mp & -\omega M \\ \omega L_s & R_s + L_s p & \omega M & Mp \\ Mp & -(\omega-\omega_r)M & R_r + L_r p & -(\omega-\omega_r)L_r \\ (\omega-\omega_r)M & Mp & (\omega-\omega_r)L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \tag{a1-30}$$

(a1-30)は固定子及び回転子の $d-q$ 巻線に成り立つ式と言われる。

$d-q$ と $\alpha-\beta$ 量の関係を行列で求めておく。(a1-25)より，

$$\dot{f}_{sdq} = f_{sd} + jf_{sq} = (\cos\theta - j\sin\theta)\,(f_{s\alpha} + jf_{s\beta})$$

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} \tag{a1-31}$$

逆に，
$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} \tag{a1-32}$$

３相量と $d-q$ 量の関係も求めておこう。(a1-3), (a1-25)より,

$$\dot{f}_{sdq}=e^{-j\theta}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}(f_{sa}+e^{j\frac{2}{3}\pi}f_{sb}+e^{-j\frac{2}{3}\pi}f_{sc})$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\Big[f_{sa}\{\cos\theta-j\sin\theta\}+f_{sb}\{\cos(-\theta+\frac{2}{3}\pi)+j\sin(-\theta+\frac{2}{3}\pi)\}$$

$$+f_{sc}\{\cos(-\theta-\frac{2}{3}\pi)+j\sin(-\theta-\frac{2}{3}\pi)\}\Big]$$

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-\frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta+\frac{2}{3}\pi) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix} \tag{a1-33}$$

以下の式からも求まる。

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix}$$

(a1-6), (a1-26)より,

$$\dot{f}_{rdq}=e^{-j\theta}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\theta_r}(f_{ra}+e^{j\frac{2}{3}\pi}f_{rb}+e^{-j\frac{2}{3}\pi}f_{rc})$$

(a1-33)と比べて, θ のかわりに $\theta-\theta_r=\beta$ とおけばよく,

$$\begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\beta & \cos(\beta-\frac{2}{3}\pi) & \cos(\beta+\frac{2}{3}\pi) \\ -\sin\beta & -\sin(\beta-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\beta+\frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \tag{a1-34}$$

(a1-34)で, $\theta=0$ とおくと, (a1-4)の静止座標系の変換に一致する。

○ 瞬時トルク

誘導機が発生するトルク τ_e は静止座標系の量を用いると次式で与えられることが判っている。*は共役複素数を表す。Im は虚部を意味する。

$$\tau_e=\frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}_s{}^*\dot{i}_s)$$

$$=\frac{P}{2}M\,\mathrm{I_m}(\dot{i}_s\dot{i}_r{}^*) \qquad \text{(a1-10)より}$$

$$=\frac{P}{2}M(i_{s\beta}i_{r\alpha}-i_{s\alpha}i_{r\beta}) \qquad \text{(a1-2), (a1-5)より} \tag{a1-35}$$

回転座標系の変数で表わすと, (a1-25), (a1-26)より,

$$\tau_e=\frac{P}{2}M\,\mathrm{I_m}(\dot{i}_{sdq}e^{j\theta}\dot{i}_{rdq}{}^*e^{-j\theta})=\frac{P}{2}M\,\mathrm{I_m}(\dot{i}_{sdq}\dot{i}_{rdq}{}^*)$$

$$= \frac{P}{2} M (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$$

$$= \frac{P}{2} \frac{M}{L_r} (i_{sq} \psi_{rd} - i_{sd} \psi_{rq}) \tag{a1-36}$$

○ 定常等価回路

定常状態で成り立つ誘導機の等価回路を静止座標系の空間ベクトルを使って導出する。これは，2 章で導出した **T 形等価回路**（鉄損無視の場合）に一致する。また，ベクトル制御と関係が深い **T－I 形等価回路**も導出する。

誘導機の相電圧を

$$\begin{bmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{2} V \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \tag{a1-37}$$

とすると，静止座標系の(a1- 3)より

$$\dot{e}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (e_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} e_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} e_{sc})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} V \{ \cos \omega t + e^{j\frac{2}{3}\pi} \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \}$$

$$= \sqrt{3} V e^{j\omega t} \tag{a1-38}$$

一方，一般に二次側は短絡されて $e_{ra} = e_{rb} = e_{rc} = 0$ 　だから

$$\dot{e}_r = 0 \tag{a1-39}$$

(a1-17)で，　$\dot{e}_s = \sqrt{3} V e^{j\omega t}$ は交流入力である。よって，**定常状態**では，$p \to j\omega$ とおいて解析できる（フェーザと同様の計算が可能である)。定常状態では，次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M \\ j(\omega - \omega_r) M & R_r + j(\omega - \omega_r) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \tag{a1-40}$$

2 行目に，$1/s = \omega/(\omega - \omega_r)$ 　を掛けて

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M \\ j\omega M & \frac{R_r}{s} + j\omega L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} \tag{a1-41}$$

(a1-41)より，図 a1-4 の **T 形定常等価回路**が得られる。ただし，(3-1), (a1- 9), (a1- 14)より M, L_r, l_r を一次側に換算すると $L_s = l_s + M'$, $L_r' = l_r' + M'$ が成り立つことが判る。ダッシュを省き M, L_r, l_r を一次側に換算した値と考えると，$L_s = l_s + M$, $L_r = l_r + M$ である。

図中，$\dot{i}_0'$ は励磁電流で，

$$\dot{i}_0' = \dot{i}_s + \dot{i}_r \tag{a1-42}$$

とする。また，ギャップ磁束は次式となる。

$$\dot{\psi}_0 = M \dot{i}_0' \tag{a1-43}$$

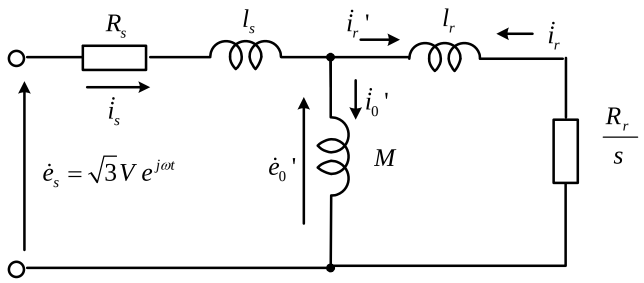


図 a1-4　T 形定常等価回路（時間を含んだ**空間ベクトル表示**
電圧電流が相電圧と相電流の $\sqrt{3}$ 倍　フェーザの様に計算可能）

一般の誘導機の等価回路（1 相分）は，相電圧フェーザ $\dot{E}_s$，相電流フェーザ $\dot{I}_s$ を考えて

$$\dot{e}_s \to \dot{E}_s \quad , \quad \dot{i}_s \to \dot{I}_s \quad , \quad \dot{i}_r \to \dot{I}_r$$

と直すだけで図 a1-5 のように求まる。ただし，

$$\dot{e}_s = \sqrt{3}\dot{E}_s e^{j\omega t} \quad , \quad \dot{i}_s = \sqrt{3}\dot{I}_s e^{j\omega t} \quad , \quad \dot{i}_r = \sqrt{3}\,\dot{I}_r\, e^{j\omega t} \qquad \text{(a1-44)}$$

の関係がある。

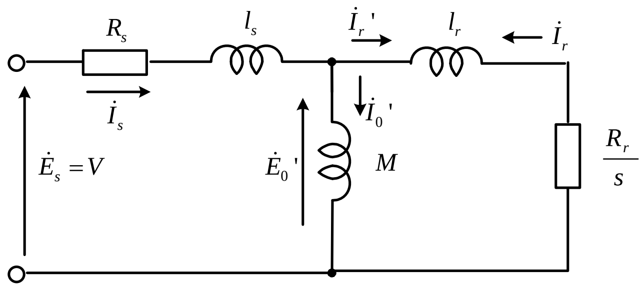


図 a1- 5　T 形定常等価回路(一般の**フェーザ表示**　相電圧と相電流)

発生トルク τ_e は R_r / s で消費される電力から次式より計算できる。

$$\tau_e = \frac{P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} \left|\dot{i}_r\,'\right|^2 = \frac{3P}{2} \cdot \frac{R_r}{s\omega} \left|\dot{I}_r\,'\right|^2 \qquad \text{(a1- 45)}$$

(a1-35)を用いて，　(a1- 45)を導く。

(a1-35)　に(a1-43)を用いると

$$\tau_e = \frac{P}{2} \mathrm{I_m}(\dot{\psi}_0{}^* \,\dot{i}_r\,') \qquad \text{(a1- 46)}$$

が得られる。図 a1-4 より $\dot{e}_0\,' = (\frac{R_r}{s} + j\omega l_r)\,\dot{i}_r\,'$　だから，

$$\dot{\psi}_0 = M\,\dot{i}_0\,' = M\,\frac{\dot{e}_0\,'}{j\omega M} = (\frac{R_r}{j\omega s} + l_r)\,\dot{i}_r\,'$$

上式を(a1- 46)に代入すると(a1- 45)が得られる。(a1- 44)より $\left|\dot{i}_r\,'\right| = \sqrt{3}\left|\dot{I}_r\,'\right|$ である。

次に，**T－I 形定常等価回路**を導く。

(a1-41)より，次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M\, k \\ j\omega M\, k & (\frac{R_r}{s} + j\omega L_r)k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r / k \end{bmatrix} \tag{a1-47}$$

ここで，(a1-47)の 2 行目で $\dot{i}_s$, $\dot{i}_r/k$ が同じインダクタンスを流れるように $j\omega$ の係数を同じにすると，二次側の漏れインダクタンスが消えた等価回路に出来るので，

$$M\, k = L_r k^2 \qquad \therefore \quad k = \frac{M}{L_r} \tag{a1-48}$$

となる。このとき，図 a1- 6 の T－I 形等価回路が得られる。

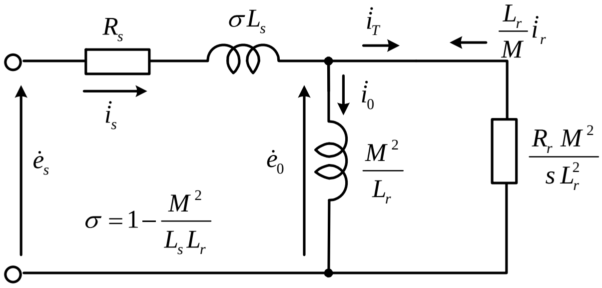


図 a1- 6　T－I 形定常等価回路（時間を含んだ**空間ベクトル表示**

電圧電流が相電圧と相電流の $\sqrt{3}$ 倍　フェーザの様に計算可能）

ここで，　$\sigma L_s = L_s - \dfrac{M^2}{L_r}$ ，$\dot{i}_T \equiv \dfrac{L_r}{M}\dot{i}_r$ '

$$\dot{e}_s = \sqrt{3}\dot{E}_s e^{j\omega t} \quad , \quad \dot{i}_s = \sqrt{3}\dot{I}_s e^{j\omega t} \quad , \quad \dot{i}_T = \sqrt{3}\,\dot{I}_T\, e^{j\omega t}, \quad \dot{i}_0 = \sqrt{3}\,\dot{I}_0\, e^{j\omega t} \tag{a1- 49}$$

回路の式が，(a1-47)式を満足することを確認せよ。

この場合にも，一般のフェーザを用いた等価回路（1 相分）は，図 a1- 6 のように記号を置き換えるだけでよい。

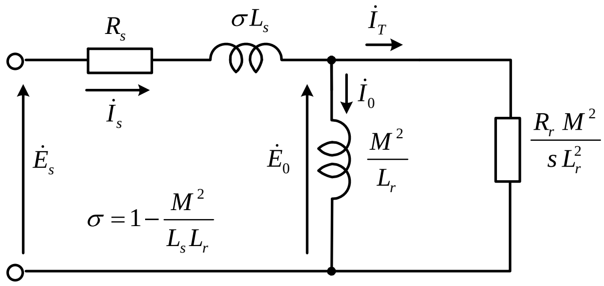


図 a1- 7　　T－I 形定常等価回路(一般のフェーザ表示　相電圧と相電流)

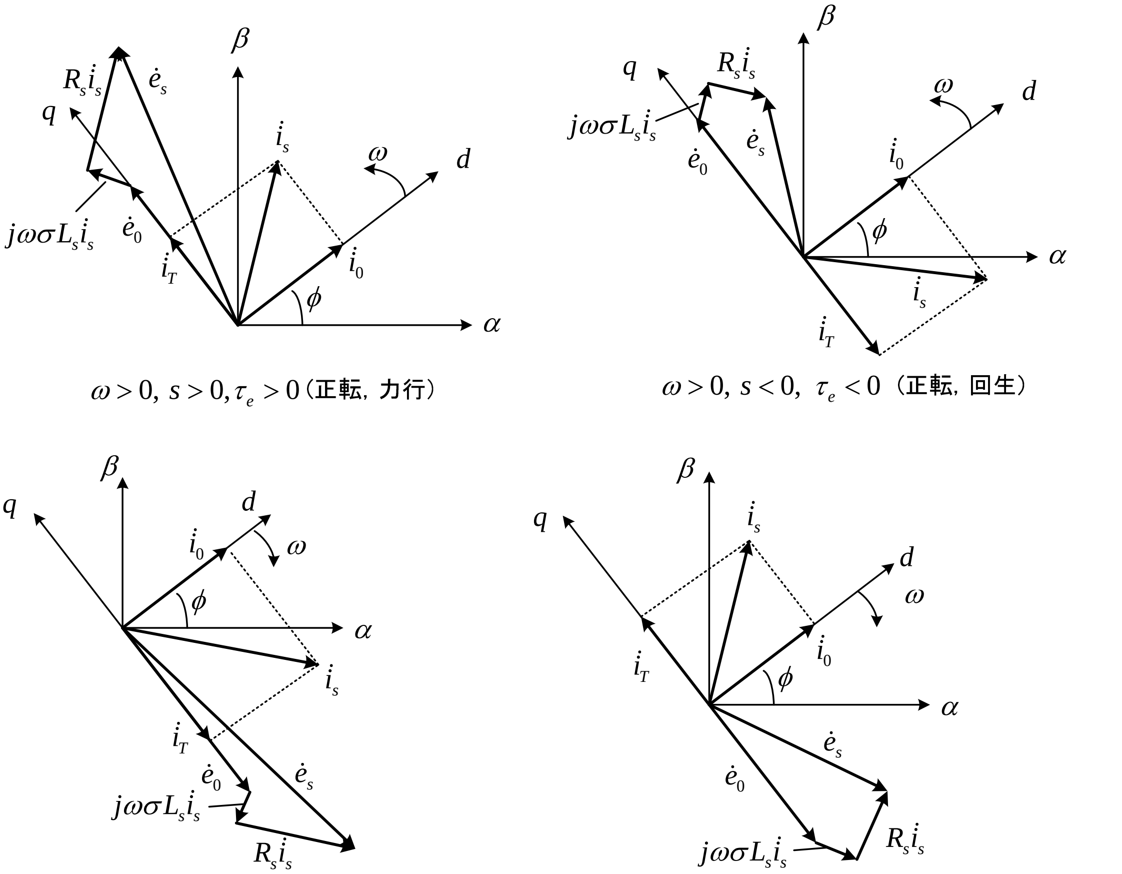
発生トルクは，(a1- 45)より $R_r M^2/(s\,L_r^2)$　で消費される電力（二次入力）を同期角速度（機械角）で割った値になる。すなわち，

$$\tau_e = \frac{P}{2}\cdot\frac{R_r}{s\omega}\cdot\frac{M^2}{L_r^2}\left|\dot{i}_T\right|^2 = \frac{3P}{2}\cdot\frac{R_r}{s\omega}\cdot\frac{M^2}{L_r^2}\left|\dot{I}_T\right|^2 \tag{a1- 50}$$

(a1- 50)式を計算すると，発生トルクは次式で与えられる。

$$\tau_e = \frac{3P}{2} \cdot \frac{\omega M^2 s R_r \left|\dot{E}_s\right|^2}{s^2\omega^2 L_r{}^2(\omega^2 L_s{}^2\sigma^2 + R_s{}^2) + 2R_s R_r \omega^2 M^2 s + R_r{}^2(\omega^2 L_s{}^2 + R_s{}^2)} \tag{a1- 51}$$

図 a1-8 に定常時の**空間ベクトル図**を示す。(a1- 49)より，フェーザ図と違い回転するが，ある瞬間で考えれば，フェーザ図と同じである。ただし，大きさは$\sqrt{3}$倍である。



$\omega > 0,\ s > 0, \tau_e > 0$（正転，力行）　$\omega > 0,\ s < 0,\ \tau_e < 0$（正転，回生）

$\omega < 0,\ s > 0,\ \tau_e < 0$（逆転，力行）　$\omega < 0,\ s < 0,\ \tau_e > 0$（逆転，回生）

図 a1- 8　定常時の**空間ベクトル図**

空間ベクトルによる定常時の T－I 形等価回路より，$\dot{i}_0$，$\dot{i}_T$ は次式となる。

$$\dot{i}_0 = \frac{L_r\,\dot{e}_0}{j\omega M^2} \equiv I_0 e^{j\phi} \qquad (I_0 > 0 \text{ と置く。} \quad I_0 = \sqrt{3}\left|\dot{I}_0\right|) \tag{a1- 52}$$

$$\dot{i}_T = \frac{s\,L_r^2\,\dot{e}_0}{M^2 R_r} \tag{a1- 53}$$

(a1- 52)，(a1- 53)より

$$\frac{\dot{i}_T}{\dot{i}_0} = j\frac{s\omega L_r}{R_r} \qquad \therefore \quad \dot{i}_T = j\frac{s\omega L_r}{R_r}\dot{i}_0 \tag{a1- 54}$$

d-q 軸の空間ベクトル$\dot{i}_{sdq} = i_{sd} + j i_{sq}$を考える。$d$ 軸を$\dot{i}_0$の方向に選ぶと

$$\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_s\, e^{-j\phi} = (\dot{i}_0 + \dot{i}_T)\,e^{-j\phi} = (1 + j\frac{s\omega L_r}{R_r})\,\dot{i}_0\, e^{-j\phi} = (1 + j\frac{s\omega L_r}{R_r})\,I_0 \tag{a1- 55}$$

ゆえに，

$$i_{sd}=I_0,\ i_{sq}=\frac{s\omega L_r}{R_r}I_0 \tag{a1- 56}$$

(a1- 56)より，すべり角周波数は次式となる。

$$\omega_{sl}=s\,\omega=\frac{R_r\,i_{sq}}{L_r\,i_{sd}} \tag{a1- 57}$$

定常時の発生トルクは(a1- 50)より(a1- 54)を用いて次式となる。

$$\tau_e=\frac{P}{2}\cdot\frac{R_r}{s\omega}\cdot(\frac{M}{L_r})^2\left|\dot{i}_T\right|^2=\frac{P}{2}\cdot\frac{s\omega M^2I_0^2}{R_r}=\frac{P}{2}\cdot\frac{M^2 i_{sd}\,i_{sq}}{L_r} \tag{a1- 58}$$

(a1- 58)は一般的な式で制御に関係しない。ベクトル制御だから成り立つ訳ではない。ただし，d-q 量は d 軸を $\dot{i}_0$ の方向に選んだときの量であるから，その方向が判らないと i_{sd}，i_{sq} を知ることができない。

○　一次電流，二次鎖交磁束を用いた空間ベクトルモデル（その１）

二次鎖交磁束：$\dot{\psi}_r=M\,\dot{i}_s+L_r\,\dot{i}_r$ (a1-59)

電圧方程式：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_s\\ \dot{e}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_s+\sigma L_s p+j\omega\sigma L_s & \frac{M}{L_r}(p+j\omega)\\ -\frac{M}{\tau_r} & \frac{1}{\tau_r}+p+j(\omega-\omega_r)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_r\end{bmatrix} \tag{a1-60}$$

ここで，$\dot{e}_s$ についての 1 行目の式を**電圧モデル**，$\dot{e}_r$ についての 2 行目の式を**電流モデル**と呼ぶことがある。

トルク：$\tau_e=\frac{P}{2}\frac{M}{L_r}\mathrm{I_m}(\dot{i}_s\,\dot{\psi}_r{}^*)$ (a1-61)

状態方程式：

$$p\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_s}{\sigma L_s}-\frac{M^2}{\sigma L_s L_r\tau_r}-j\omega & \frac{M}{\sigma L_s L_r}(\frac{1}{\tau_r}-j\omega_r)\\ \frac{M}{\tau_r} & -\frac{1}{\tau_r}-j\,(\omega-\omega_r)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma L_s}\\ 0\end{bmatrix}\dot{e}_s \tag{a1-62}$$

(a1-62)の 1 行目には，2 行目が代入されているので，1 行目を電圧モデルとは呼ばない。

○　一次電流，二次鎖交磁束を用いた空間ベクトルモデル（その２）

二次鎖交磁束（T－Ｉ形回路に基づく）：

$$\dot{\psi}_R\equiv\frac{M}{L_r}\dot{\psi}_r=\frac{M^2}{L_r}\dot{i}_s+M\,\dot{i}_r \tag{a1-63}$$

電圧方程式：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_s\\ \dot{e}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_s+\sigma L_s p+j\omega\sigma L_s & p+j\omega\\ -\frac{M}{\tau_r} & \frac{L_r}{M}\{\frac{1}{\tau_r}+p+j(\omega-\omega_r)\}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_R\end{bmatrix} \tag{a1-64}$$

$\dot{e}_r = 0$ として，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p + j\omega\sigma L_s & p + j\omega \\ -(\dfrac{M}{L_r})^2 R_r & \dfrac{1}{\tau_r} + p + j(\omega - \omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_R \end{bmatrix} \qquad \text{(a1-65)}$$

静止座標系では $\omega = 0$ として，

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & p \\ -(\dfrac{M}{L_r})^2 R_r & \dfrac{1}{\tau_r} + p - j\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_R \end{bmatrix} \qquad \text{(a1-66)}$$

これは，図の T-Ⅰ**形過渡回路（静止座標系）**に対応している。以下の関係式が成立する。

$$\dot{\psi}_R = \frac{M^2}{L_r}\dot{i}_0 \quad , \quad \dot{i}_T = -\frac{L_r}{M}\dot{i}_r \quad , \quad \dot{i}_s = \dot{i}_0 + \dot{i}_T \qquad \text{(a1-67)}$$

$$\dot{e}_0 \equiv p\dot{\psi}_R = j\omega_r\dot{\psi}_R + (\frac{M}{L_r})^2 R_r\,\dot{i}_T \qquad \text{(a1-68)}$$

(a1-67)は，(a1-63)を満たしている。(a1-68)は，(a1-66)を満たす。

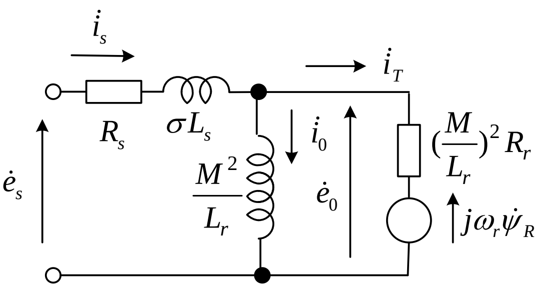
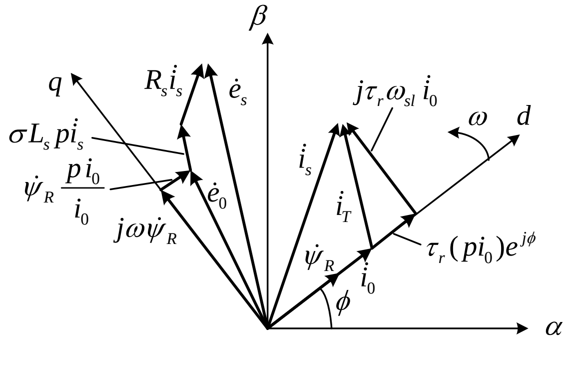


図 a1-9　T－Ⅰ**形過渡等価回路**（(a1-66)）



$\omega > 0,\ s > 0, \tau_e > 0$ （正転，力行）

図 a1-10　**過渡時**の空間ベクトル図

過渡時の空間ベクトル図を求めるにあたり，

$$\dot{i}_0 = i_0 e^{j\phi},\ \omega = \frac{d\phi}{dt},\ \omega_{sl} = \omega - \omega_r \qquad \text{(a1-69)}$$

とおく。ただし， $i_0 > 0$ （一定とは限らない）。このとき，(a1-68)より

$$p(\frac{M^2}{L_r}\dot{i}_0) = j\omega_r\frac{M^2}{L_r}\dot{i}_0 + (\frac{M}{L_r})^2 R_r\,\dot{i}_T$$

$$\frac{M^2}{L_r}(pi_0)e^{j\phi} + \frac{M^2}{L_r}j\omega\dot{i}_0 = j\omega_r\frac{M^2}{L_r}\dot{i}_0 + (\frac{M}{L_r})^2 R_r\,\dot{i}_T$$

$$\therefore\quad \dot{i}_T = \frac{L_r}{R_r}(pi_0)e^{j\phi} + \frac{L_r}{R_r}j\omega_{sl}\,\dot{i}_0 \qquad \text{(a1-70)}$$

d 軸を $\dot{i}_0$ の方向に選ぶとき，d-q 軸の空間ベクトル $\dot{i}_{sdq} = i_{sd} + ji_{sq}$ を考える。

$$\dot{i}_{sdq} = \dot{i}_s\,e^{-j\phi} = (\dot{i}_0 + \dot{i}_T)e^{-j\phi} = i_0 + \frac{L_r}{R_r}(p\,i_0) + j\frac{L_r}{R_r}\omega_{sl}\,i_0 \qquad \text{(a1-71)}$$

ゆえに，$i_{sd} = i_0 + \dfrac{L_r}{R_r} p i_0$，$i_{sq} = \dfrac{\omega_{sl} L_r}{R_r} i_0$ (a1-72)

(a1-72)より，すべり角周波数は次式となる。

$$\omega_{sl} = s\,\omega = \frac{R_r\, i_{sq}}{L_r\, i_0} \tag{a1-73}$$

過渡時の発生トルクは，(a1-67)を用いて次式となる。

$$\tau_e = \frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{i}_s\,\dot{\psi}_R^*) = \frac{P}{2}\cdot\frac{M^2\omega_{sl}\, i_0^2}{R_r} = \frac{P}{2}\cdot\frac{M^2 i_0\, i_{sq}}{L_r} \tag{a1-74}$$

(a1-74)は一般的な式で制御に関係しない。ただし，d-q 量は d 軸を $\dot{i}_0$ の方向に選んだときの量である。状態方程式は

$$p\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_s}{\sigma L_s} - \dfrac{1}{\sigma L_s}(\dfrac{M}{L_r})^2 R_r - j\omega & \dfrac{1}{\sigma L_s}(\dfrac{1}{\tau_r} - j\omega_r) \\ (\dfrac{M}{L_r})^2 R_r & -\dfrac{1}{\tau_r} - j\,(\omega - \omega_r) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{i}_s\\ \dot{\psi}_R\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sigma L_s}\\ 0\end{bmatrix}\dot{e}_s \tag{a1-75}$$

定常状態では，(a1-66)で $p = j\omega$ とおいて，(a1-68)より

$$j\omega\dot{\psi}_R = j\omega_r\dot{\psi}_R + (\frac{M}{L_r})^2 R_r\,\dot{i}_T \qquad \therefore \quad j(\omega-\omega_r)\dot{\psi}_R = (\frac{M}{L_r})^2 R_r\,\dot{i}_T$$

$$\frac{j\omega\dot{\psi}_R}{\dot{i}_T} = \frac{\omega}{\omega-\omega_r}(\frac{M}{L_r})^2 R_r = \frac{R_r}{s}(\frac{M}{L_r})^2 \qquad \text{（等価インピーダンス）}$$

となり，定常時の **T－Ⅰ形回路**が得られる。（あるいは(a1-65)で $p = 0$ とおく）

○　Q軸との成す角を θ とした場合（平成 23 年度まで使用）

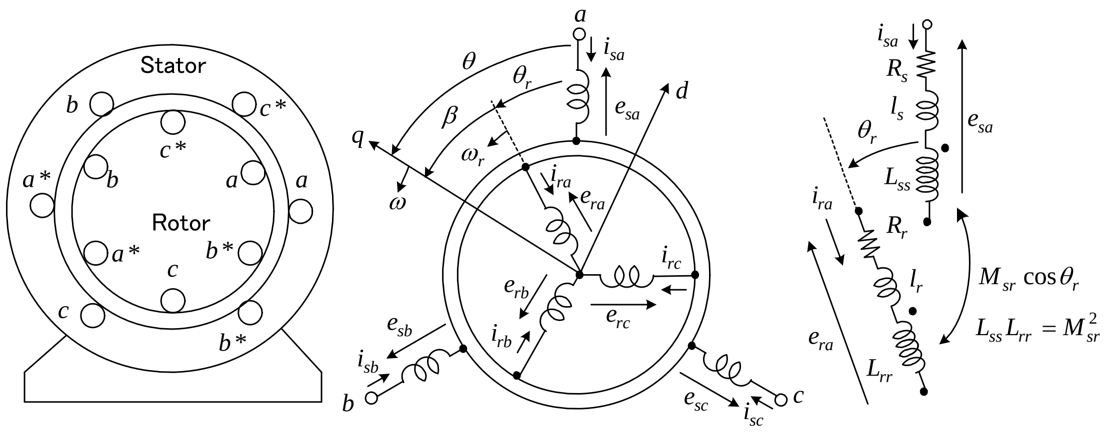


図 a1-11　旧 d-q 軸の定義

旧 *d-q* 回転座標系の定義

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \\ f_{s0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sin\theta & \sin(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \cos\theta & \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \\ f_{r0} \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sin\beta & \sin(\beta-\frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta+\frac{2\pi}{3}) \\ \cos\beta & \cos(\beta-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{bmatrix} \qquad \text{ただし，} \beta = \theta - \theta_r$$

空間ベクトル

空間ベクトルを得るには, 固定子 a 相巻線軸と α 軸が一致するように選ぶ必要があるので，図 a1-11 では $\theta = \pi/2$ に選ぶ必要がある。このとき $\alpha-\beta$ 静止軸（新旧同じ）からみた空間ベクトルは

$$\begin{aligned} \dot{f}_s &= f_{s\alpha} + j\, f_{s\beta} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}(f_{sa} + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_{sb} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_{sc}) \end{aligned} \qquad ①$$

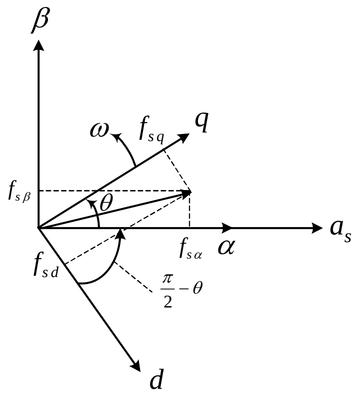


図 a1-12　旧 d－q 軸

となる。①は，新旧同じである。

旧の d－q 軸から見ると，次式が得られる。

$$\dot{f}_{sdq} = e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)} \dot{f}_s \qquad \therefore \qquad \dot{f}_{sdq} = je^{-j\theta} \dot{f}_s \qquad \text{（旧 } d\text{-}q \text{ 量，} \theta \text{ は旧）}$$

$$\dot{f}_{rdq} = e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)} \dot{f}_r \qquad \text{（} \dot{f}_r \text{ は } \alpha-\beta \text{ 軸から見るので新旧同じ）}$$

$$\therefore \qquad \dot{f}_{rdq} = je^{-j\theta} \dot{f}_r \qquad \text{（旧 } d\text{-}q \text{ 量，} \theta \text{ は旧）}$$

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} \qquad \text{逆に，} \qquad \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix}$$

①式の空間ベクトルが得られるように，a 相巻線軸と α 軸を一致させる必要がある。従来，図 a1-11 のように d－q 軸を定義したので，これと $\alpha-\beta$ 軸との関係は図 a1-12 のようになる。しかし，上記の旧座標系はベクトル制御の説明で d 軸方向に磁束の方向をとるとき，“磁束が θ 方向を向いている”と言えないので，綺麗でない。また，$\theta=\pi/2$ として静止座標系を定義しないと空間ベクトルにならない。さらに同期機の解析モデルとも合わない。よって，d 軸と a 相巻線軸のなす角を θ として座標変換することにした。もちろん,モータの式は同じで，変換式のみが異なるだけである。新 d-q の θ や β は,旧 d-q の θ や β に比べ 90 度小さいので，旧 θ ＝新 θ ＋ $\pi/2$，旧 β ＝新 β ＋ $\pi/2$ とすればよい。

付録２　誘導機ベクトル制御系の構成と解析

Configuration and analysis of Induction Motor Vector Control System

○ 磁束の方向を演算により求めるベクトル制御（静止座標系でのモデル利用）

Vector Control by computing the direction of rotor flux ($\alpha-\beta$ model in stationary reference frame is used.)

ホール素子により磁束を検出してベクトル制御を行う方式は，電動機が非標準となること，センサの信頼性に問題があることから実際にはほとんど使われていない。

そこで，磁束の方向を誘導機のモデルを使って演算するベクトル制御について説明しよう。誘導機のモデルは静止座標系と回転座標系いろいろある。まず静止座標系でのモデルを用いる方法を説明しよう。なおベクトル制御の解説を文献(55)で行った。

静止座標系での誘導機の式は(3-19)より次式で与えられる。

$\alpha-\beta$ model of induction motor in stationary reference frame

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s+\sigma L_s p & 0 & Mp/L_r & 0 \\ 0 & R_s+\sigma L_s p & 0 & Mp/L_r \\ -\dfrac{M}{\tau_r} & 0 & \dfrac{1}{\tau_r}+p & \omega_r \\ 0 & -\dfrac{M}{\tau_r} & -\omega_r & \dfrac{1}{\tau_r}+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{a2-1}$$

$$\sigma = 1-\frac{M^2}{L_s L_r} \quad , \quad \tau_r = \frac{L_r}{R_r}$$

$e_{s\alpha}$, $e_{s\beta}$ の 1,2 行目の式を**電圧モデル**(1,2 rows are called voltage model)，電圧の関係しない 3,4 行目の式を**電流モデル**(3,4 rows are called current model)と呼ぶ。電圧モデルと電流モデルのいずれかにおいても，**二次鎖交磁束（回転子鎖交磁束）**$\psi_{r\alpha}$, $\psi_{r\beta}$ は演算できるが，通常は電流モデルを使用するのでこの方法を示そう。

(a2-1)の 3,4 行目より，（Current Model is used to compute the rotor flux linkage)

$$p\psi_{r\alpha} = -\frac{\psi_{r\alpha}}{\tau_r} - \omega_r \psi_{r\beta} + \frac{M}{\tau_r} i_{s\alpha} \tag{a2-2}$$

$$p\psi_{r\beta} = -\frac{\psi_{r\beta}}{\tau_r} + \omega_r \psi_{r\alpha} + \frac{M}{\tau_r} i_{s\beta} \tag{a2-3}$$

(a2-2)，(a2-3)を制御用のコンピュータ上でオイラー法や台形公式を用いて解くと$\psi_{r\alpha}$, $\psi_{r\beta}$が計算できる。このとき，$i_{s\alpha}$, $i_{s\beta}$, ω_r はセンサで検出する。$\psi_{r\alpha}$, $\psi_{r\beta}$ を用いて，**磁束の向き**θは次式より求まる。

The direction of rotor flux linkage is computed by

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\psi_{r\beta}}{\psi_{r\alpha}} \tag{a2-4}$$

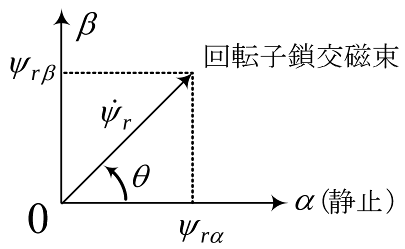


図 a2-1 二次鎖交磁束

(a2-2)，(a2-3)の二次磁束演算，(a2-4)の磁束の方向演算によるベクトル制御系の構成を以下に示す。

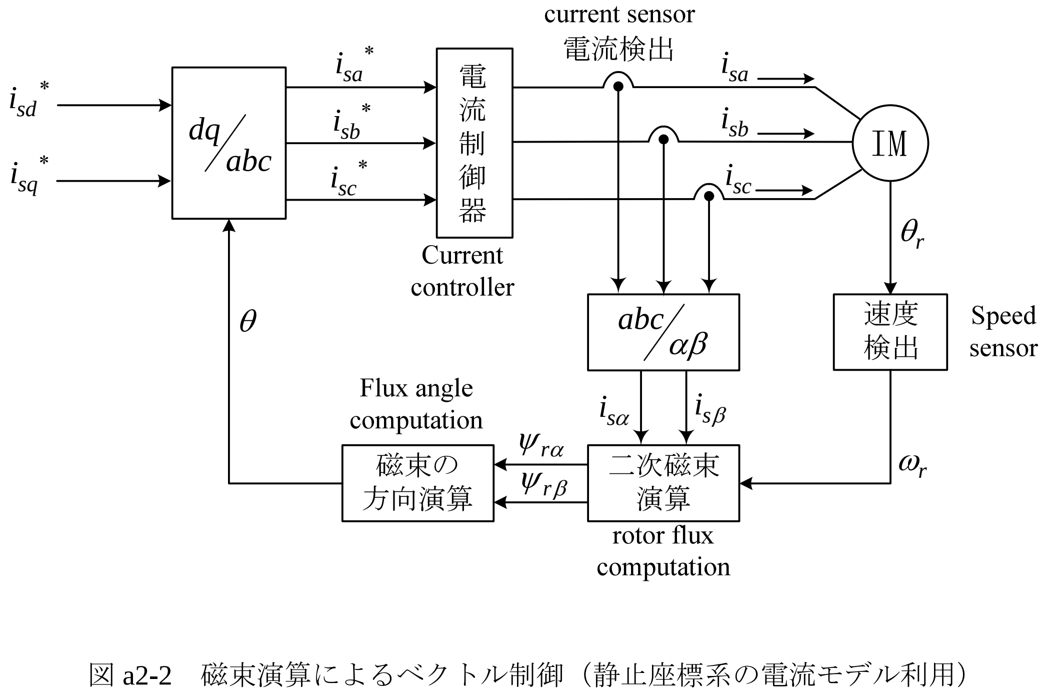


図 a2-2　磁束演算によるベクトル制御（静止座標系の電流モデル利用）

Vector control system using $\alpha - \beta$ axis current model.

ここで，$dq/abc, abc/\alpha\beta$ は次式の**座標変換**（coordinate transformation)である。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} \quad \text{(a2-5)}$$

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \quad \text{(a2-6)}$$

○ 磁束の方向を演算により求めるベクトル制御
（回転座標系でのモデル利用）

Vector Control by computing the direction of rotor flux ($d-q$ model in rotating reference frame is used.)

二次鎖交磁束をd軸に一致させ，磁束と共に回転する座標系を考える。変換式は，
We choose *d* axis which is on the direction of rotor flux computed by (a2-4). The transformation is

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} \quad \text{(a2-7)}$$

f はe, i, ψ を意味する。

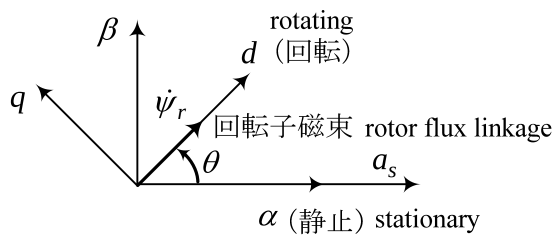


図 a2-3　*d-q* 回転座標系の定義

一方，$f_{s\alpha}$, $f_{s\beta}$ 及び $f_{r\alpha}$, $f_{r\beta}$ を求める式は,

$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix} \qquad \text{(a2-8)}$$

(a2-8)を(a2-2)，(a2-3)に代入して，次式が得られる。

By substituting (a2-8) into (a2-2) and (a2-3), we have

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sd} + (\frac{1}{\tau_r} + p)\psi_{rd} - (\omega - \omega_r)\psi_{rq} \qquad \text{(a2-9)}$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sq} + (\omega - \omega_r)\psi_{rd} + (\frac{1}{\tau_r} + p)\psi_{rq} \qquad \text{(a2-10)}$$

但し， $p\ \theta = \omega$ (a2-11)

ところで，(a2-7)より，

$$\psi_{rq} = -\psi_{r\alpha} \sin\theta + \psi_{r\beta} \cos\theta$$

である。From (a2-4), $\sin\theta$, $\cos\theta$ are substituted into above equation, then

$$\psi_{rq} = -\psi_{r\alpha} \cdot \frac{\psi_{r\beta}}{\sqrt{\psi_{r\alpha}{}^2 + \psi_{r\beta}{}^2}} + \psi_{r\beta} \cdot \frac{\psi_{r\alpha}}{\sqrt{\psi_{r\alpha}{}^2 + \psi_{r\beta}{}^2}}$$

$$= 0 \qquad \text{(a2-12)}$$

となる。磁束の方向を d 軸に一致させたのだから当然のことなのだが，確認ができた。

By substituting (a2-12) into (a2-9) and (a2-10), we have

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sd} + \frac{1}{\tau_r}\psi_{rd} + p\psi_{rd} \qquad \text{(a2-13)}$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r} i_{sq} + (\omega - \omega_r)\psi_{rd} \qquad \text{(a2-14)}$$

(a2-14)より，

$$\omega = \omega_r + \frac{M}{\tau_r \psi_{rd}} i_{sq} \qquad \text{(a2-15)}$$

であり，(a2-11)より次式で θ が計算できる。

$$\theta = \int \omega dt = \int (\omega_r + \frac{M}{\tau_r \psi_{rd}} i_{sq}) dt \qquad \text{(a2-16)}$$

この場合の制御系を以下に示す。これは図 a2-2 の制御系で，演算したθを用いて，二次磁束演算の部分を書き変えたものである。

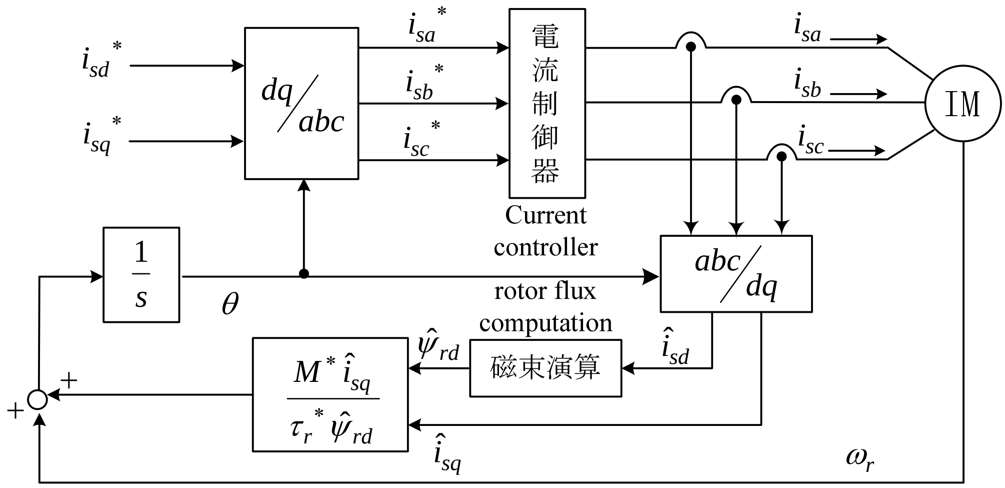


図 a2-4 磁束演算によるベクトル制御（**回転座標系**のモデル利用）

Vector control system using current model in *d-q* axis.

図中，定数には＊　，変数には^（ハット）をつけている。これは，制御系の定数と実際のモータの定数を区別するためである。たとえば，温度変化でτ_rが変化したりすることがある。また，(a2-13)より磁束の演算(Flux control)は次式で行う。

$$p\hat{\psi}_{rd} = -\frac{\hat{\psi}_{rd}}{\tau_r^*} + \frac{M^*}{\tau_r^*}\hat{i}_{sd} \tag{a2-17}$$

電流制御が理想的で$i_{sa}^* = i_{sa}, i_{sb}^* = i_{sb}, i_{sc}^* = i_{sc}$なら，同じ座標変換を用いているから，$i_{sd}^* = \hat{i}_{sd}, i_{sq}^* = \hat{i}_{sq}$となり，$\hat{i}_{sd}, \hat{i}_{sq}$の代わりに$i_{sd}^*, i_{sq}^*$ が利用できる。この結果，図 a2-5 の**滑り周波数制御形ベクトル制御**が得られる。図 a2-5 で，2 相/3 相変換（*dq/abc*）は次式で演算する。

$$\begin{bmatrix} i_{sa}^* \\ i_{sb}^* \\ i_{sc}^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta^* & -\sin\theta^* \\ \cos(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} \tag{a2-18}$$

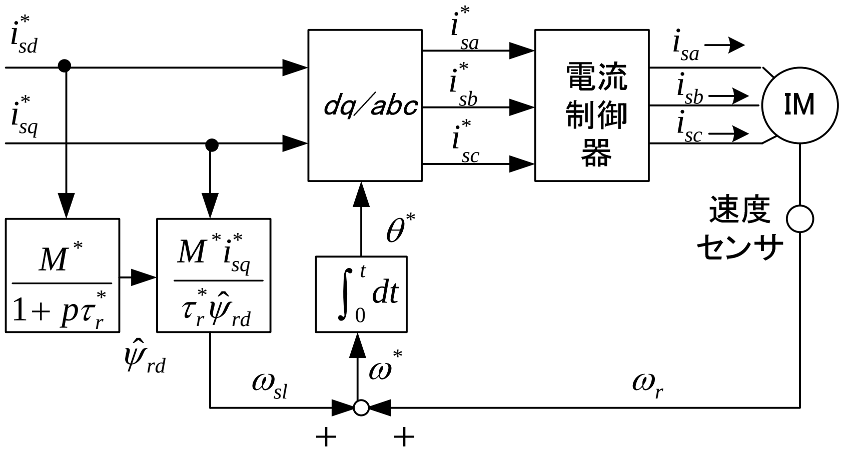


図 a2-5　**滑り周波数制御形ベクトル制御**(slip frequency type vector control)

○　ベクトル制御システムの解析(analysis of vector control system)

図 a2-5 のシステムを解析する。解析するとき，実際の誘導モータ（IM）（制御器でなく）をどのような座標系で解析するか決める必要がある。静止，回転座標なんでもよいが，2 軸理論の図 3-1 のθとして，図 a2-5 のθ^*を選ぶ。すなわち$\theta=\theta^*$としθ^*に同期して回転する座標系を選ぶことにする。このとき実際の IM の電流についての変換行列は

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta^* & \cos(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta^* & -\sin(\theta^* - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta^* + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \tag{a2-19}$$

であり，図 a2-5 の IM は(3-17)より次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & -\omega^* \sigma L_s & \frac{M}{L_r} p & -\frac{\omega^* M}{L_r} \\ \omega^* \sigma L_s & R_s + \sigma L_s p & \frac{\omega^* M}{L_r} & \frac{M}{L_r} p \\ -\frac{M}{\tau_r} & 0 & \frac{1}{\tau_r} + p & -(\omega^* - \omega_r) \\ 0 & -\frac{M}{\tau_r} & \omega^* - \omega_r & \frac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} \tag{a2-20}$$

電流制御は理想的として，次式を仮定する。

$$i_{sa}^* = i_{sa},\ i_{sb}^* = i_{sb}, i_{sc}^* = i_{sc} \tag{a2-21}$$

この結果，(a2-18), (a2-19), (a2-21)より次式が成立する。

$$i_{sd}^* = i_{sd}\,,\; i_{sq}^* = i_{sq} \tag{a2-22}$$

パラメータは正確に推定されているとして$M^* = M,\ \tau_r^* = \tau_r$と仮定する。このとき図 a2-5 よりすべり角周波数は次式となる。

$$\omega^* - \omega_r = \frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r\, \hat{\psi}_{rd}} \tag{a2-23}$$

図 a2-5 でi_{sd}^*と$\hat{\psi}_{rd}$には，以下の関係がある。

$$p\hat{\psi}_{rd} + \frac{1}{\tau_r}\hat{\psi}_{rd} = \frac{M}{\tau_r} i_{sd}^* \tag{a2-24}$$

(a2-22), (a2-23)を(a2-20)の 3,4 行目に代入して次式が得られる。

$$\frac{M}{\tau_r} i_{sd}^* = p\psi_{rd} + \frac{\psi_{rd}}{\tau_r} - \frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r\, \hat{\psi}_{rd}}\psi_{rq} \tag{a2-25}$$

$$\frac{M}{\tau_r} i_{sq}^* = p\psi_{rq} + \frac{\psi_{rq}}{\tau_r} + \frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\psi_{rd} \tag{a2-26}$$

i_{sd}^*とi_{sq}^*を自由に与えて，(a2-24), (a2-25), (a2-26)式を解けば良い。i_{sd}^*が変化すると(a2-24)だけに関係して$\hat{\psi}_{rd}$が変化する。そのままでは解きにくいので，

$$\dot{\psi}_r = \psi_{rd} + j\psi_{rq} \tag{a2-27}$$

とおく。(a2-25)＋j (a2-26)　を考えて次式が得られる。

$$p\dot{\psi}_r + \left(\frac{1}{\tau_r} + j\frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\right)\dot{\psi}_r = \frac{M}{\tau_r}(i_{sd}^* + j i_{sq}^*) \tag{a2-28}$$

$\hat{\dot{\psi}}_r = \hat{\psi}_{rd} + j\hat{\psi}_{rq}$　$(\hat{\psi}_{rq} = 0)$ として，

$$\varDelta\dot{\psi}_r = \dot{\psi}_r - \hat{\dot{\psi}}_r = \psi_{rd} + j\psi_{rq} - \hat{\psi}_{rd} \tag{a2-29}$$

の**誤差方程式**を求める。(a2-28)から(a2-24)を引くことにより次式が得られる。

$$p\Delta\dot{\psi}_r + \left(\frac{1}{\tau_r} + j\frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r \hat{\psi}_{rd}}\right)\Delta\dot{\psi}_r = 0 \tag{a2-30}$$

ここで，i_{sd}^*（よって$\hat{\psi}_{rd}$）とi_{sq}^*は時間の関数として自由に変化させる量であり，一般的な線形変係数の微分方程式の公式を利用して解かなくてはならない。

公式　$\dfrac{dx}{dt}+a(t)\,x=b(t)$

一般解　$x(t)=e^{-\int_0^t a(s)ds}[\int_0^t b(s)e^{\int_0^s a(t)dt}ds+x(0)]$

これより，

$$\int_0^t a(t)\,dt=\frac{t}{\tau_r}+j\int_0^t\frac{M\,i_{sq}^*}{\tau_r\hat{\psi}_{rd}}dt=\frac{t}{\tau_r}+j\theta_f \qquad \text{但し，}\ \theta_f=\int_0^t\frac{M\,i_{sq}^*}{\tau_r\,\hat{\psi}_{rd}}dt$$

とおくと，次式が得られる。

$$\dot{\psi}_r(t)=\hat{\psi}_{rd}(t)+\{\dot{\psi}_r(0)-\hat{\psi}_{rd}(0)\}\exp(-\frac{t}{\tau_r}-j\theta_f) \tag{a2-31}$$

(a2-31)を実部と虚部に分けて次式が得られる。

$$\psi_{rd}(t)=\hat{\psi}_{rd}(t)+\{\psi_{rd}(0)-\hat{\psi}_{rd}(0)\}\exp(-\frac{t}{\tau_r})\cos\theta_f+\psi_{rq}(0)\exp(-\frac{t}{\tau_r})\sin\theta_f \tag{a2-32}$$

$$\psi_{rq}(t)=\psi_{rq}(0)\exp(-\frac{t}{\tau_r})\cos\theta_f-\{\psi_{rd}(0)-\hat{\psi}_{rd}(0)\}\exp(-\frac{t}{\tau_r})\sin\theta_f \tag{a2-33}$$

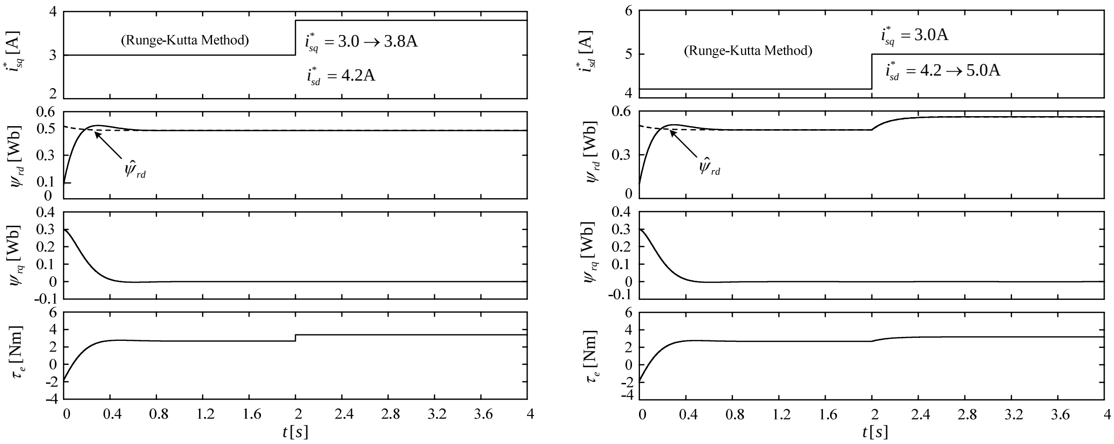
この制御を始めてしばらく（数秒）すると，i_{sd}^*，i_{sq}^*の変化に関係なく次式が成立する。

$$\psi_{rd}(t)=\hat{\psi}_{rd}(t),\ \psi_{rq}(t)=0 \tag{a2-34}$$

トルクは(3-20)より，(a2-34)が成り立つとき

$$\tau_e=\frac{PM}{2L_r}\hat{\psi}_{rd}\,i_{sq}^* \tag{a2-35}$$

となる。つまりトルクに過渡現象が起きるのは始動時のみで，その後はたとえi_{sd}^*, i_{sq}^*が変化しても(a2-35)は常に成立することが判る。ある初期値に対し，(a2-24)～(a2-26)を Runge-Kutta 法で解いた結果は図 a2-6 であり，(a2-32)，(a2-33)の結果と一致することを確認している。また，(a2-34)で述べたことが確認できる。すなわち 2 秒後からの d 軸磁束の変化は，制御器側の磁束の指令値の変化に追従している。従って，実際の運転では始動時に励磁電流i_{sd}^*のみを流して磁束を確立し，数秒後からi_{sd}^*, i_{sq}^*を変化させる。



(a) トルク電流指令のステップ変化　　　(b) 励磁電流指令のステップ変化

図 a2-6　ベクトル制御系の過渡応答

ベクトル制御の定常解析(steady-state analysis)を行って，相電圧の実効値 E_s，相電流の実効値 I_s とトルクの関係を求めておく。(a2-22)，(a2-34)を(a2-20)に代入する。回転座標系なので定常状態では $p=0$ として，$\hat{\psi}_{rd} = M\,i_{sd}^*$　（一定）であるから

$$e_{sd} = R_s i_{sd}^* - \omega^* \sigma L_s\, i_{sq}^* \tag{a2-36}$$

$$e_{sq} = \omega^* \sigma L_s i_{sd}^* + R_s\ i_{sq}^* + \omega^* M^2 i_{sd}^* / L_r = \omega^* L_s i_{sd}^* + R_s\ i_{sq}^* \tag{a2-37}$$

(a2-23)より，$i_{sq}^* = s\,\omega^* L_r i_{sd}^* / R_r$ だから，(a2-36)，(a2-37)に代入し，$E_s = \sqrt{e_{sd}^2 + e_{sq}^2}\ /\sqrt{3}$ より

$$(\sqrt{3}E_s)^2 = e_{sd}^2 + e_{sq}^2 = (R_s - \omega^* \sigma L_s\, s\omega^* \frac{L_r}{R_r})^2 i_{sd}^{*2} + (\omega^* L_s + R_s s\omega^* \frac{L_r}{R_r})^2\ i_{sd}^{*2}$$

(a2-35)より

$$\tau_e = \frac{PM^2}{2L_r} s\omega^* \frac{L_r}{R_r} i_{sd}^{*2} = \frac{PM^2}{2L_r} s\omega^* \frac{L_r}{R_r} \frac{3E_s^2}{(R_s - \omega^* \sigma L_s\, s\omega^* \frac{L_r}{R_r})^2 + (\omega^* L_s + R_s s\omega^* \frac{L_r}{R_r})^2}$$

$$= \frac{3P}{2} \cdot \frac{\omega^* M^2 s R_r E_s^2}{\Delta_0} \tag{a2-38}$$

ただし，$\Delta_0 = s^2 \omega^{*2} L_r^{\ 2} (\omega^{*2} L_s^{\ 2} \sigma^2 + R_s^{\ 2}) + 2R_s R_r \omega^{*2} M^2 s + R_r^{\ 2} (\omega^{*2} L_s^{\ 2} + R_s^{\ 2})$

これは(a1- 51)と一致する。相電流は

$$I_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{i_{sd}^{*2} + i_{sq}^{*2}} = E_s \sqrt{\frac{R_r^2 + (s\,\omega^* L_r)^2}{\Delta_0}} \tag{a2-39}$$

これらの式は，ベクトル制御に限らず一般の誘導機で成立する。すなわち，定常時の電圧，電流，トルク，すべり等の関係はベクトル制御でも変わることはない。

付録３　誘導機のセンサレスベクトル制御

（Q 軸磁束を利用した方式）

Speed-sensorless Vector Control of Induction Motor Using Q-Axis Flux

（1）　静止座標系のモデルを利用した直接形

Direct Type Control using Stationary Reference Frame Model

静止座標系の誘導機の電圧方程式は(3-19)より次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} e_{s\alpha} \\ e_{s\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s p & 0 & \dfrac{M}{L_r}p & 0 \\ 0 & R_s + \sigma L_s p & 0 & \dfrac{M}{L_r}p \\ -\dfrac{M}{\tau_r} & 0 & \dfrac{1}{\tau_r} + p & \omega_r \\ 0 & -\dfrac{M}{\tau_r} & -\omega_r & \dfrac{1}{\tau_r} + p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{a3-1}$$

電圧モデル(Voltage Model)による磁束演算は次式で行う。K_c は**オブザーバゲイン**(observer gain)である。

$$p\psi^{v}_{r\alpha} = \frac{L_r}{M}(e_{s\alpha} - R^{*}_{s} i_{s\alpha} - \sigma L_s p i_{s\alpha}) + K_c(\psi^{*}_{r\alpha} - \psi^{v}_{r\alpha}) \tag{a3-2}$$

$$p\psi^{v}_{r\beta} = \frac{L_r}{M}(e_{s\beta} - R^{*}_{s} i_{s\beta} - \sigma L_s p i_{s\beta}) + K_c(\psi^{*}_{r\beta} - \psi^{v}_{r\beta}) \tag{a3-3}$$

$K_c = 0$ として電圧モデルだけで磁束を演算すると不安定になり易いことが判っている（**純粋積分の不安定**とよぶ）。このため**電流モデルにより得られる磁束**との誤差を加える[20]。制動項として働くように $K_c > 0$ とする。空間ベクトル(Space Vector)で表示すると

$$p\dot{\psi}^{v}_{r\alpha\beta} = \frac{L_r}{M}\{\dot{e}_{s\alpha\beta} - (R^{*}_{s} + \sigma L_s p)\dot{i}_{s\alpha\beta}\} + K_c(\dot{\psi}^{*}_{r\alpha\beta} - \dot{\psi}^{v}_{r\alpha\beta}) \tag{a3-4}$$

電流モデル(Current Model)による磁束演算は次式で行う。実速度の代わりに推定速度で近似する。

$$p\psi^{*}_{r\alpha} = -\frac{\psi^{*}_{r\alpha}}{\tau^{*}_{r}} - \hat{\omega}_r \psi^{*}_{r\beta} + \frac{M}{\tau^{*}_{r}} i_{s\alpha} \tag{a3-5}$$

$$p\psi^{*}_{r\beta} = -\frac{\psi^{*}_{r\beta}}{\tau^{*}_{r}} + \hat{\omega}_r \psi^{*}_{r\alpha} + \frac{M}{\tau^{*}_{r}} i_{s\beta} \tag{a3-6}$$

空間ベクトル(Space Vector)で表示すると

$$p\dot{\psi}^{*}_{r\alpha\beta} = -\frac{1}{\tau^{*}_{r}}\dot{\psi}^{*}_{r\alpha\beta} + j\hat{\omega}_r \dot{\psi}^{*}_{r\alpha\beta} + \frac{M}{\tau^{*}_{r}}\dot{i}_{s\alpha\beta} \tag{a3-7}$$

速度推定(Speed Estimation)：

$$\hat{\omega}_r = (K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s})(\psi^v_{r\beta}\psi^*_{r\alpha} - \psi^v_{r\alpha}\psi^*_{r\beta}) \qquad \text{(a3-8)}$$

Schauder の方式はオブザーバゲインを 0 としている[26]。純粋積分の不安定を回避するため，電圧モデルの後と電流モデルの前に**ハイパスフィルタ**が入っている。(a3-8)は，Schauder により Popov の**超安定論**により導出されている。

磁束の向きの推定 (Direction of Rotor Flux) は電流モデルの $\psi^*_{r\alpha}$, $\psi^*_{r\beta}$ を用いて次式より求める。

$$\theta^* = \tan^{-1}\frac{\psi^*_{r\beta}}{\psi^*_{r\alpha}} \qquad \text{(a3-9)}$$

以上により，図 a3-1 のセンサレスベクトル制御系が得られる。$\varepsilon = \psi^v_{r\beta}\psi^*_{r\alpha} - \psi^v_{r\alpha}\psi^*_{r\beta}$ としている。

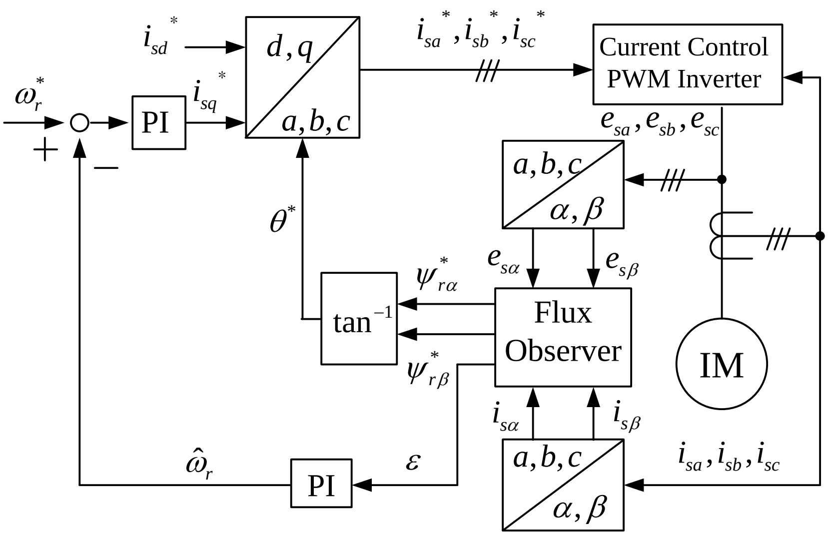


図 a3-1　静止座標系でのオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系

Sensorless Vector Control of Induction Motor Using Flux Observer composed by Stationary Reference Frame Model.

（2）　回転座標系のモデルを利用した間接形
Indirect Type Control Using Rotating Reference Frame Model

図 a3-1 の方式を電流モデルより求めた(a3-9)の θ^* に同期して回転する $d-q$ 座標系で構成してみよう。すなわち電流モデルから求めた二次鎖交磁束の方向を d 軸に一致させ，磁束と共に回転する座標系を考える。変換式は,

$$\begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^* & \sin\theta^* \\ -\sin\theta^* & \cos\theta^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} \qquad \text{(a3-10)}$$

$$\dot{f}_{sdq} = e^{-j\theta^*} \dot{f}_{s\alpha\beta} \tag{a3-11}$$

f は $e\,,i\,,\psi$ を意味する。

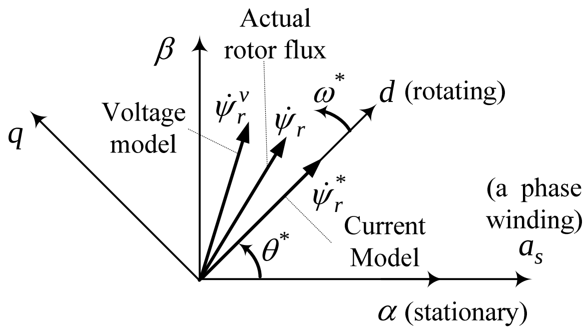


図 a3-2　磁束の空間ベクトルと座標系

Space Vector of Rotor Flux and Reference Frame

$f_{rd}\,,f_{rq}$ と $f_{r\alpha}\,,f_{r\beta}$ の関係も(a3-10)，(a3-11)と同じである（三相からα，βへの変換は固定子側，回転子側で異なる)。

$$\begin{bmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^* & \sin\theta^* \\ -\sin\theta^* & \cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{a3-12}$$

$$\dot{f}_{rdq} = e^{-j\theta^*} \dot{f}_{r\alpha\beta} \tag{a3-13}$$

一方，$f_{s\alpha}\,,f_{s\beta}$ を求める式は,

$$\begin{bmatrix} f_{s\alpha} \\ f_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^* & -\sin\theta^* \\ \sin\theta^* & \cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \end{bmatrix} \tag{a3-14}$$

$$\dot{f}_{s\alpha\beta} = e^{j\theta^*} \dot{f}_{sdq} \tag{a3-15}$$

であり，$f_{r\alpha}\,,f_{r\beta}$ も $f_{rd}\,,f_{rq}$ より全く同じ変換で求まる。

(a3-13)を(a3-7)に代入して，次式が得られる。

$$0 = -\frac{M}{\tau_r^*} i_{sd} + (\frac{1}{\tau_r^*} + p)\psi_{rd}^* - (\omega^* - \hat{\omega}_r)\psi_{rq}^* \tag{a3-16}$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r^*} i_{sq} + (\omega^* - \hat{\omega}_r)\psi_{rd}^* + (\frac{1}{\tau_r^*} + p)\psi_{rq}^* \tag{a3-17}$$

但し，$p\,\theta^* = \omega^*$ (a3-18)

ところで，(a3-12)より，

$$\psi_{rq}^* = -\psi_{r\alpha}^* \sin\theta^* + \psi_{r\beta}^* \cos\theta^*$$

であるが，(a3-9)より， $\sin\theta^*, \cos\theta^*$ を代入すると，

$$\psi_{rq}^* = -\psi_{r\alpha}^* \cdot \frac{\psi_{r\beta}^*}{\sqrt{\psi_{r\alpha}^{*\,2} + \psi_{r\beta}^{*\,2}}} + \psi_{r\beta}^* \cdot \frac{\psi_{r\alpha}^*}{\sqrt{\psi_{r\alpha}^{*\,2} + \psi_{r\beta}^{*\,2}}} = 0 \tag{a3-19}$$

となる。磁束の方向を d 軸に一致させたのだから当然のことなのだが，確認ができた。

(a3-19)を(a3-16)，(a3-17)に代入すると次式を得る。

$$0 = -\frac{M}{\tau_r^*} i_{sd} + \frac{1}{\tau_r^*}\psi_{rd}^* + p\psi_{rd}^* \tag{a3-20}$$

$$0 = -\frac{M}{\tau_r^*} i_{sq} + (\omega^* - \hat{\omega}_r)\psi_{rd}^* \tag{a3-21}$$

従って，(a3-21)より

$$\omega^* = \hat{\omega}_r + \frac{M}{\tau_r^* \psi_{rd}^*} i_{sq} \tag{a3-22}$$

であり，(a3-22)より次式で θ^* が計算できる。

$$\theta^* = \int \omega^* dt = \int (\hat{\omega}_r + \frac{M}{\tau_r^* \psi_{rd}^*} i_{sq}) dt \tag{a3-23}$$

(a3-11)を用いて(a3-4)を $d-q$ 座標系に変換すると，次式が得られる。

$$p\dot{\psi}_{rdq}^v + j\omega^* \dot{\psi}_{rdq}^v = \frac{L_r}{M}\{\dot{e}_{sdq} - (R_s^* + \sigma L_s p)\dot{i}_{sdq} - j\omega^* \sigma L_s \dot{i}_{sdq}\} + K_c(\dot{\psi}_{rdq}^* - \dot{\psi}_{rdq}^v)$$

故に

$$\begin{aligned} p\psi_{rd}^v = &\frac{L_r}{M}(e_{sd} - R_s^* i_{sd} - \sigma L_s p i_{sd} + \omega^* \sigma L_s i_{sq}) + \omega^* \psi_{rq}^v \\ &+ K_c(\psi_{rd}^* - \psi_{rd}^v) \end{aligned} \tag{a3-24}$$

$$\begin{aligned} p\psi_{rq}^v = &\frac{L_r}{M}(e_{sq} - R_s^* i_{sq} - \sigma L_s p i_{sq} - \omega^* \sigma L_s i_{sd}) - \omega^* \psi_{rd}^v \\ &+ K_c(\psi_{rq}^* - \psi_{rq}^v) \end{aligned} \tag{a3-25}$$

なお， $\psi_{rq}^* = 0$ である。

速度推定は(a3-8)より，次式が導かれる。この物理的意味は図 a3-5 で明らかとなる。

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_r &= (K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s})(\psi_{rq}^{v}\psi_{rd}^{*} - \psi_{rd}^{v}\psi_{rq}^{*}) \\ &= (K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s})\ \psi_{rq}^{v}\psi_{rd}^{*}\end{aligned} \tag{a3-26}$$

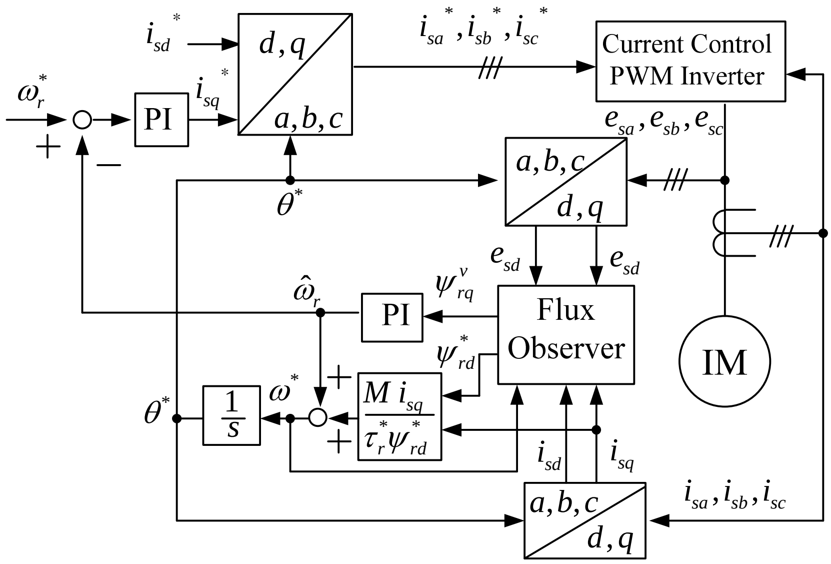


図 a3-3　回転座標系でのオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系

Sensorless Vector Control of Induction Motor Using Flux Observer composed by Rotating Reference Frame Model.

以上により，回転座標系のオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系が図 a3-3 のように得られる。図 a3-3 は図 a3-2 の制御系の変数を変更しただけで等価である。

図 a3-1，図 a3-3 の場合には，3 相電流指令通りの電流をインバータで流す必要があり，ヒステリシスコンパレータや 3 相電流 PI 制御が利用できる。後者は，交流電流の制御で位相の遅れが問題となる。通常は，$d-q$ 軸電流の PI 制御が広く利用されている。そこで，一般に広く利用されているすべり周波数制御形のベクトル制御に習い，電流制御を理想的として電流の指令値を利用したセンサレスベクトル制御系を図 a3-4 に示す。磁束オブザーバは，(a3-27)，(a3-28)の演算を行うが，簡単化のため電圧センサをなくして指令電圧を用いる。

$$\begin{aligned}p\psi_{rd}^{v} &= \frac{L_r}{M}(e_{sd}^{*} - R_s^{*} i_{sd} - \sigma L_s p i_{sd} + \omega^{*}\sigma L_s i_{sq}) + \omega^{*}\psi_{rq}^{v} \\ &\quad + K_c(\psi_{rd}^{*} - \psi_{rd}^{v})\end{aligned} \tag{a3-27}$$

$$\begin{aligned}p\psi_{rq}^{v} &= \frac{L_r}{M}(e_{sq}^{*} - R_s^{*} i_{sq} - \sigma L_s p i_{sq} - \omega^{*}\sigma L_s i_{sd}) - \omega^{*}\psi_{rd}^{v} \\ &\quad + K_c(\psi_{rq}^{*} - \psi_{rq}^{v})\end{aligned} \tag{a3-28}$$

なお，$\psi_{rq}^{*} = 0$　である。

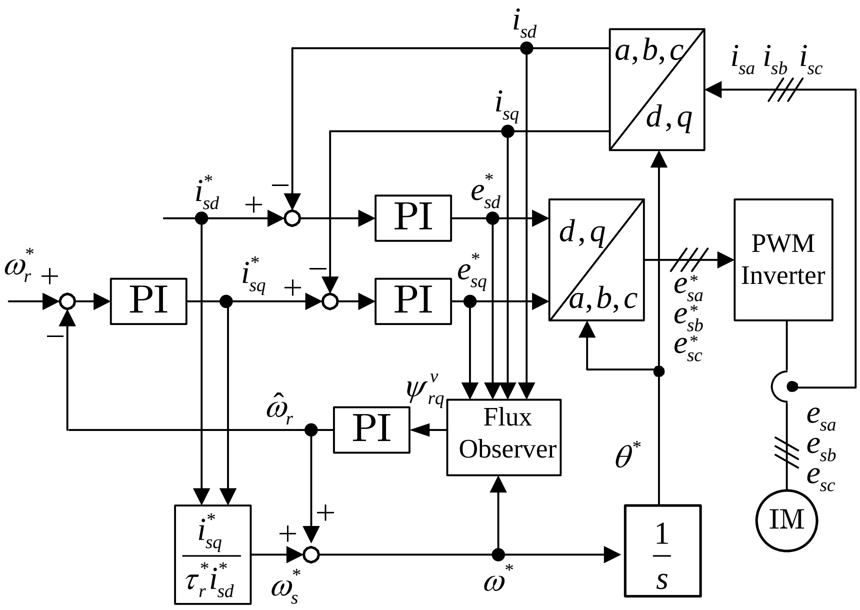


図 a3-4　回転座標系でのオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系[34]
（*d*-*q* 軸電流制御，電流モデルの *d*-*q* 軸電流を指令値で代用
d-*q* 軸電圧を指令値で代用，磁束一定制御の場合）

Sensorless Vector Control of Induction Motor Using Flux Observer composed by Rotating Reference Frame Model. (*d*-*q* axis current control, *d*-*q* axis current commands are used in current model, *d*-*q* axis voltage commands are used in voltage model, Flux command is constant)

図 a3-4 のシステムは，K_c が小さいとパラメータ変動（一次抵抗の温度による変化）やノイズに弱く，K_c が大きいほど回生領域の不安定領域が大きくなる。力行運転では K_c は比較的大きく選べる。

図 a3-4 では，磁束の指令値を一定と考え

$$\psi_{rd}^* = M\, i_{sd}^* \tag{a3-29}$$

としている。このとき，すべり周波数は

$$\omega_s^* = \frac{M\, i_{sq}^*}{\tau_r^*\, \psi_{rd}^*} \tag{a3-30}$$

となる。磁束可変制御も行う場合には，(a3-20)より次式を用いる。

$$p\psi_{rd}^* = -\frac{1}{\tau_r^*}\psi_{rd}^* + \frac{M}{\tau_r^*} i_{sd}^* \tag{a3-31}$$

次に，q 軸磁束で**同期速度（回転磁束の角速度）を推定する方式**を考える。まず(a3-2)，(a3-3)の電圧モデルで求まる磁束を真値と仮定する。(a3-5)，(a3-6)の電流モデルには速度が含まれており，図 a3-5 のように電流モデルの磁束は真値からずれている。d 軸を電流モデルの磁束の向きにとると，電圧モデルの磁束の q 軸成分が 0 になっていれば，電流モデルの磁束の向きは正しいことになる。

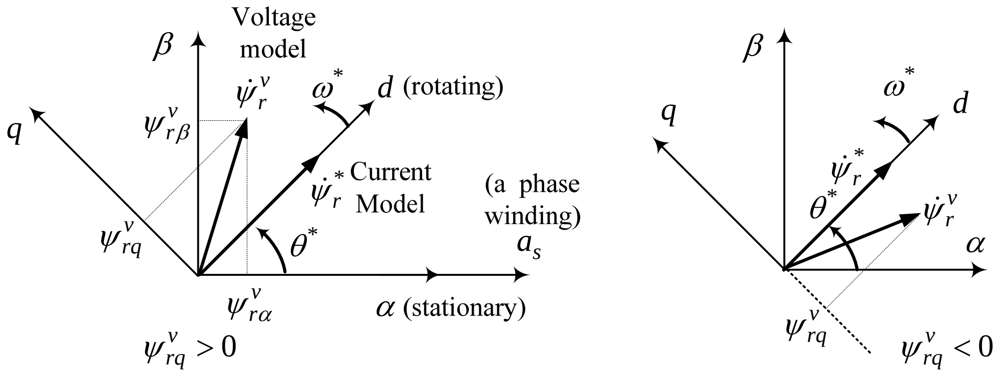


図 a3-5　磁束の空間ベクトルと座標系

Space Vector of Rotor Flux and Reference Frame

以上のことから，ψ_{rq}^v が 0 になるように，ω^* を調整して *d-q* 軸を回転させる。$\psi_{rq}^v > 0$ なら，ω^* を増加させ，$\psi_{rq}^v < 0$ なら，ω^* を減少させる。すなわち，電流モデルの磁束の回転角速度 ω^* を次式で演算する。

$$\omega^* = (K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s})\psi_{rq}^v \tag{a3-32}$$

この式は $\omega^* < 0$（逆転）の場合にも問題ない。以上により，回転座標系のオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系が図 a3-6 のように得られる。なお，速度は次式で求められる。

$$\hat{\omega}_r = \omega^* - \frac{M}{\tau_r^* \psi_{rd}^*} i_{sq} \tag{a3-33}$$

安定性に関しては，図 a3-4 と図 a3-6 は大差ないようである。

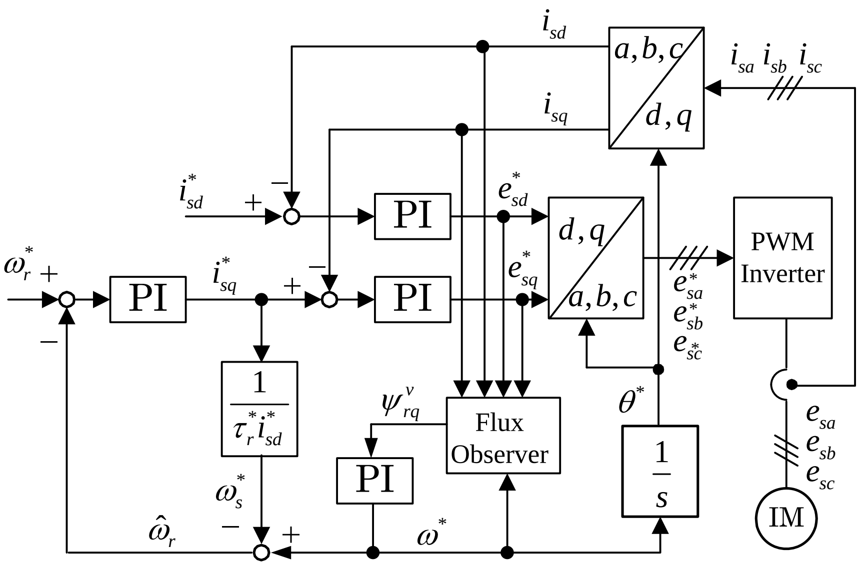


図 a3-6　回転座標系でのオブザーバを利用したセンサレスベクトル制御系

（*d-q* 軸電流制御，電流モデルの *d-q* 軸電流を指令値で代用, *d-q* 軸電圧を指令値で代用，磁束一定制御の場合）Sensorless Vector Control of Induction Motor Using Flux Observer composed by Rotating Reference Frame Model. (*d-q* axis current control, *d-q* axis current commands are used in current model, *d-q* axis voltage commands are used in voltage model, Flux command is constant)

（3） 簡易センサレスベクトル制御

ψ_{rq}^{v} の計算を簡単化することで，簡易センサレスベクトル制御を実現できる。(a3-27)式で，オブザーバゲインを 0 と置き，微分は 0 とする。この結果，次式が得られる。

$$e_{sd}^{*} = R_s^{*} i_{sd} - \omega^{*}\sigma L_s i_{sq} - \frac{\omega^{*} M}{L_r}\psi_{rq}^{v} \tag{a3-34}$$

この近似は，たとえ過渡状態であっても d 軸電流制御が理想的で， $i_{sd} = i_{sd}^{*}$ （一定）で，その結果 d 軸磁束が一定に制御できているなら成立し，かなり妥当性のある近似と考えられる。(a3-34)で

$$e_{d}^{*} = -\frac{\omega^{*} M}{L_r}\psi_{rq}^{v} \tag{a3-35}$$

とおき， $i_{sd} = i_{sd}^{*}$ を用いると次式が得られる。

$$e_{sd}^{*} = R_s^{*} i_{sd}^{*} - \omega^{*}\sigma L_s i_{sq} + e_{d}^{*} \tag{a3-36}$$

i_{sd} を用いると正帰還になり不安定となるであろう。(a3-36)より e_{d}^{*} が得られると，(a3-35)より ψ_{rq}^{v} はこれに比例するから次式で磁束の回転角速度が推定できる。

$$\omega^{*} = -K_w\left(1 + \frac{1}{sT_w}\right)e_{d}^{*} \tag{a3-37}$$

ただし， $K_w = \mathrm{sign}(\omega^{*})\left|K_w\right|$， $\mathrm{sign}(\omega^{*}) = \begin{cases} 1 & \omega^{*} > 0 \\ -1 & \omega^{*} < 0 \end{cases}$ (a3-38)

以上により図 a3-7 の簡易センサレスベクトル制御系 I が得られる。この制御系は回生運転領域で安定となることが判っている。

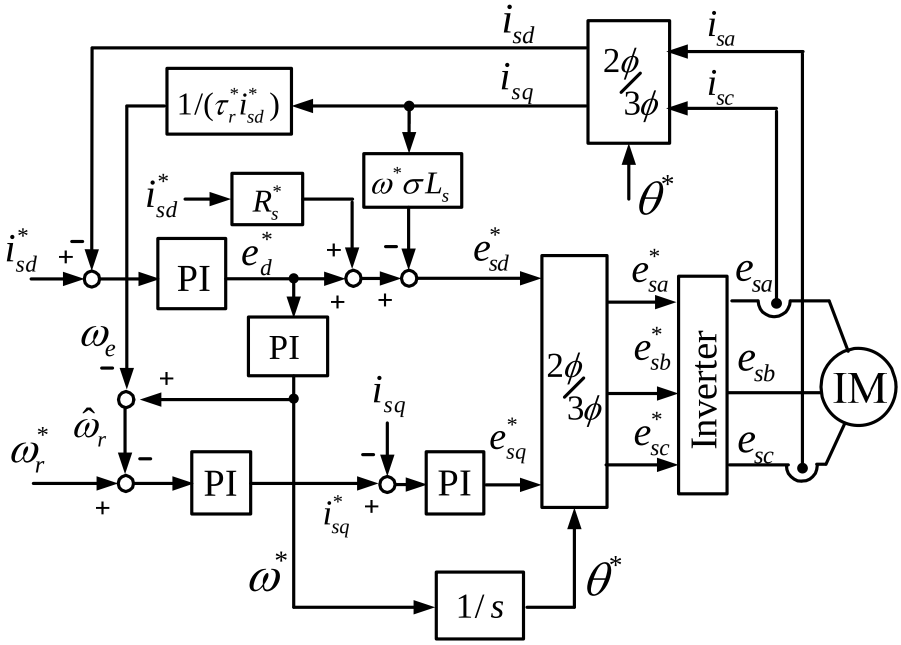


図 a3-7 簡易センサレスベクトル制御系 I

速度は(a3-33)より求める。q 軸電流制御が理想的と仮定すれば，i_{sq} の代わりに i_{sq}^* を用いることも考えられる。

図 a3-7 の簡易センサレスベクトル制御系 I を更に簡単化した図 a3-8 の簡易センサレスベクトル制御系 II も考えられる。(a3-28)でオブザーバゲインを 0 と置き，定常状態では，次式が成り立つ。

$$e_{sq}^* = R_s^* i_{sq} + \omega^* \sigma L_s i_{sd} + \omega^* \frac{M}{L_r} \psi_{rd}^{\nu} \tag{a3-39}$$

$\psi_{rd}^{\nu} = M\, i_{sd}^*$，$i_{sd} = i_{sd}^*$ を用いると(a3-39)は次式となる。

$$e_{sq}^* = R_s^* i_{sq} + \omega^* L_s i_{sd}^* \tag{a3-40}$$

図 a3-8 では，必要となる q 軸電圧をフィードフォワード的に作り，微調整を図の ω_c で行う。なお，$R_s^* i_{sq}$ の項は加えていない。これは正帰還で不安定になる恐れがあるためである。

図より，次式が成り立つ。

$$\omega_r^* + \omega_e - \omega_d = \omega^* \tag{a3-41}$$

故に，

$$\omega_d = \omega_r^* - (\omega^* - \omega_e) = \omega_r^* - \hat{\omega}_r \tag{a3-42}$$

推定速度 $\hat{\omega}_r$ は計算していないが，実質的に ω_d は速度誤差に相当する。従って，ω_d に比例する e_d^* を積分制御して ω_c を q 軸電圧にフィードバックすれば速度制御器として動作する。積分制御の代わりに PI 制御とすることも可能である。いずれにしても積分器が入れば速度指令と推定速度の誤差を 0 にすることができる。この制御系も回生運転領域で安定となることが判っている。

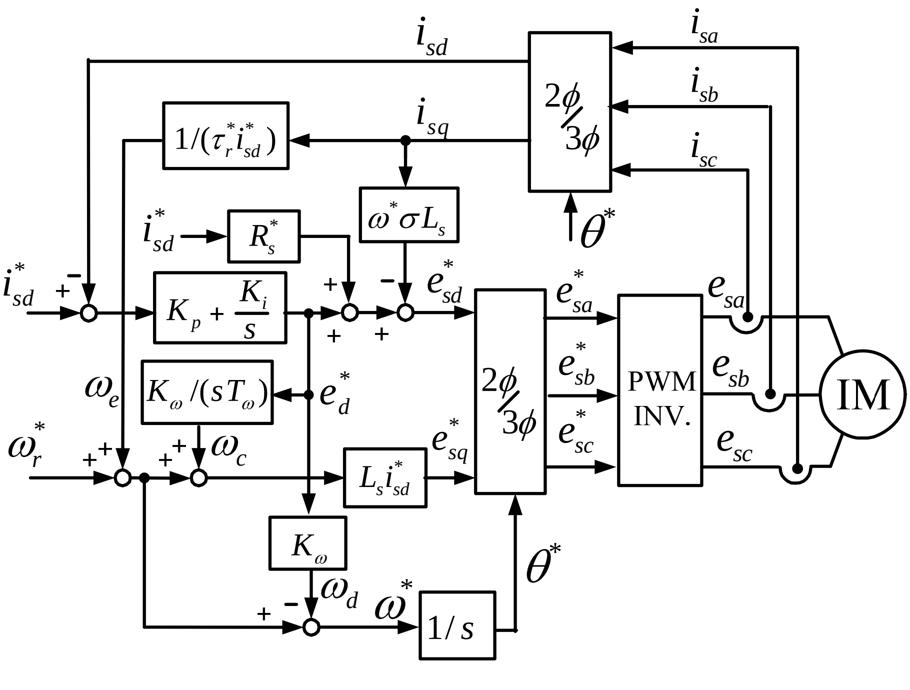


図 a3-8　簡易センサレスベクトル制御系 II [56]

付録4　同期機の 2 軸理論

永久磁石同期機の解析を行う場合，磁極上に固定した ***d-q* 座標系**で表した Park の式が良く利用されている。*d-q* 座標系では回転子の突極性を考慮しても三角関数が式に現れないため利用しやすい。最近，磁極位置を検出しない**エンコーダレス制御（センサレス制御）**が研究及び実用化されており，任意の回転座標系である **γ - δ 座標系**のモデルも使用される。これらのモデルは三相回路の式を座標変換して得られるが，空間ベクトルを用いた方が行列を用いるよりも簡単である。

○　三相回路のモデル

図 a4-1 に解析する永久磁石同期機の解析モデルと座標系を示す。

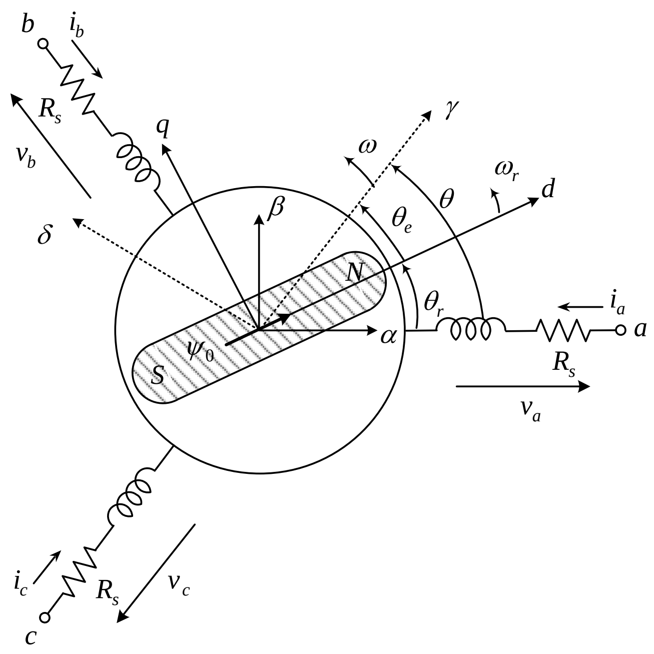


図 a4-1　同期機の解析モデルと座標系

本テキストでは$\theta = \theta_r + \theta_e$で角度を定義する。これは，電動機として運転するときδ軸方向に相電圧の空間ベクトルが向いて便利と考える。もちろん発電機の解析もできる。$\gamma - \delta$軸が$d - q$より遅れて$\theta_r = \theta + \theta_e'$で定義する場合（発電機を主に解析するならこちらが便利だろう）では,$\theta_e = -\theta_e'$，　$d\theta_e / dt = -d\theta_e' / dt = \omega - \omega_r$が異なるだけである（$\theta_e$の微分でも$\omega,\ \omega_r$を用いていたら変更する必要はない)。両者に本質的な違いはない。

電圧方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad , \quad p = \frac{d}{dt} \tag{a4-1}$$

a,b,c 巻線の鎖交磁束は次式で表せる。右辺第２項は永久磁石による鎖交磁束である。

$$\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\\ \psi_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_a & M_{ab} & M_{ca}\\ M_{ab} & L_b & M_{bc}\\ M_{ca} & M_{bc} & L_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_a\\ i_b\\ i_c\end{bmatrix}+\psi_0\begin{bmatrix}\cos\theta_r\\ \cos(\theta_r-\frac{2}{3}\pi)\\ \cos(\theta_r+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix} \tag{a4-2}$$

ここで，各インダクタンスは以下のように求められる（付録 6 で詳しく述べる)。

$$L_a=l_s+L_0-L_m\cos 2\theta_r \tag{a4-3}$$

$$L_b=l_s+L_0-L_m\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi) \tag{a4-4}$$

$$L_c=l_s+L_0-L_m\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi) \tag{a4-5}$$

$$M_{ab}=-M_0-L_m\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi) \tag{a4-6}$$

$$M_{bc}=-M_0-L_m\cos 2\theta_r \tag{a4-7}$$

$$M_{ca}=-M_0-L_m\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi) \tag{a4-8}$$

$$L_0=\frac{L_{ddm}+L_{qqm}}{2} \tag{a4-9}$$

$$L_m=\frac{L_{qqm}-L_{ddm}}{2} \tag{a4-10}$$

$$M_0=\frac{L_0}{2} \tag{a4-11}$$

非突極機では $L_m=0$ となり，インダクタンスは磁極位置の関数でなくなり，モデル化は容易となる。

○　静止座標系のモデル

a,b,c と $\alpha-\beta$ 軸（静止）の座標変換を次式で定義する。各成分は，なす角の cos 成分とする。 f は電圧 v，電流 i，鎖交磁束 ψ を表わす。

$$\begin{bmatrix}f_\alpha\\ f_\beta\end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_a\\ f_b\\ f_c\end{bmatrix} \tag{a4-12}$$

逆に,

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} \tag{a4-13}$$

なお，零相成分は 0 と仮定し，

$$f_a + f_b + f_c = 0 \tag{a4-14}$$

している。いま，**空間ベクトル** $\dot{f}_s$ （静止座標系）を次式で定義する。

$$\dot{f}_s \equiv f_\alpha + j\, f_\beta \tag{a4-15}$$

(a4-12)より，

$$\dot{f}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_c) \tag{a4-16}$$

例えば， $$\dot{v}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} v_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} v_c) \tag{a4-17}$$

$$\dot{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c) \tag{a4-18}$$

$$\dot{\psi}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(\psi_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} \psi_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} \psi_c) \tag{a4-19}$$

(a4-15)より，

$$\dot{f}_s(t) = F(t) e^{j\theta_f(t)} \tag{a4-20}$$

ただし， $F(t) = \sqrt{f_\alpha^2(t) + f_\beta^2(t)}$， $\theta_f(t) = \tan^{-1} \dfrac{f_\beta(t)}{f_\alpha(t)}$

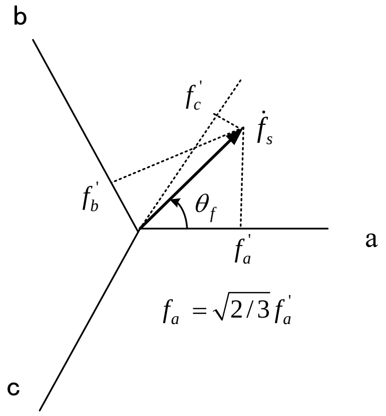
零相成分は 0 として(a4-14)が成り立つので，a, b, c 量は以下のように計算できる（1 つに決る）。

$$f_a = \mathrm{Re}(\sqrt{2/3}\,\dot{f}_s) = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos\theta_f(t) \tag{a4-21}$$

$$f_b = \mathrm{Re}(\sqrt{2/3}\,\dot{f}_s e^{-j2\pi/3}) = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos(\theta_f(t) - 2\pi/3) \tag{a4-22}$$

$$f_c = \mathrm{Re}(\sqrt{2/3}\,\dot{f}_s e^{j2\pi/3}) = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos(\theta_f(t) + 2\pi/3) \tag{a4-23}$$

$F(t) > 0$ であり，(a4-21)～(a4-23)は<u>定常のみならず過渡状態においても一般的に成立する。</u>



空間ベクトルを用いると，(a4-1)より

$$\dot{v}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}\{R_s i_a + p\psi_a + e^{j\frac{2}{3}}(R_s i_b + p\psi_b) + e^{-j\frac{2}{3}\pi}(R_s i_c + p\psi_c)\}$$

$$= R_s \dot{i}_s + p\dot{\psi}_s \qquad \text{(a4-24)}$$

(a4-2)～(a4-8)を用いて，

$$\dot{\psi}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(\psi_a + e^{j\frac{2}{3}\pi}\psi_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\psi_c)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(l_s + L_0)(i_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c)$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}L_m\{i_a \cos 2\theta_r + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi)\}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}M_0\{i_b + i_c + e^{j\frac{2}{3}\pi}(i_a + i_c) + e^{-j\frac{2}{3}\pi}(i_a + i_b)\}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}L_m\{i_b \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + i_c \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + e^{j\frac{2}{3}\pi}(i_a \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + i_c \cos 2\theta_r)$$

$$+ e^{-j\frac{2}{3}\pi}(i_a \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) + i_b \cos 2\theta_r\}$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0\{\cos\theta_r + e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) + e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi)\} \qquad \text{(a4-25)}$$

$l_s + L_0$ の係数 $\dot{i}_s$

M_0 の係数　$\dot{i}_s$ （$i_b+i_c=-i_a$　，　$i_a+i_c=-i_b$　，　$i_a+i_b=-i_c$　を代入して）

$L_m i_a$ の係数（付録公式利用）

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\{\cos 2\theta_r + e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi)\}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}e^{j2\theta_r}$$

$L_m i_b$ の係数

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\{e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi)+\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos 2\theta_r\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-j\frac{2}{3}\pi}\{\cos\theta_r + e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi)\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi}e^{j2\theta_r}$$

$L_m i_c$ の係数

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\{e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)+\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi)+e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos 2\theta_r\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\frac{2}{3}\pi}\{\cos 2\theta_r + e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi)\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}e^{j\frac{2}{3}\pi}e^{j2\theta_r}$$

ψ_0 の係数

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}e^{j\theta_r}$$

以上をまとめて，

$$\dot{\psi}_s=(l_s+L_0+M_0)\dot{i}_s-\frac{3}{2}L_m e^{j2\theta}\sqrt{\frac{2}{3}}(i_a+e^{-j\frac{2}{3}\pi}i_b+e^{j\frac{2}{3}\pi}i_c)+\sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 e^{j\theta}$$

$$=(l_s+L_0+M_0)\dot{i}_s-\frac{3}{2}L_m e^{j2\theta_r}\dot{i}_s^{*}+\sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 e^{j\theta_r} \qquad \text{(a4-26)}$$

$\dot{\psi}_s=\psi_\alpha+j\psi_\beta$　であるから，

$$\psi_\alpha=(l_s+\frac{3}{2}L_0)i_\alpha-\frac{3}{2}L_m(i_\alpha\cos 2\theta_r+i_\beta\sin 2\theta_r)+\sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0\cos\theta_r \qquad \text{(a4-27)}$$

$$\psi_\beta = (l_s + \frac{3}{2}L_0)i_\beta - \frac{3}{2}L_m(i_\alpha \sin 2\theta_r - i_\beta \cos 2\theta_r) + \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 \sin\theta_r \qquad \text{(a4-28)}$$

ここで，

$$L_1 = l_s + \frac{3}{2}L_0 \quad , \quad L_2 = \frac{3}{2}L_m \quad , \quad \psi = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 \qquad \text{(a4-29)}$$

とおき，(a4-26)より，

$$\dot{\psi}_s = L_1 \dot{i}_s - L_2 e^{j2\theta_r}\dot{i}_s^* + \psi e^{j\theta_r} \qquad \text{(a4-30)}$$

また(a4-27)，(a4-28)より

$$\begin{bmatrix}\psi_\alpha \\ \psi_\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 - L_2\cos 2\theta_r & -L_2 \sin 2\theta_r \\ -L_2 \sin 2\theta_r & L_1 + L_2 \cos 2\theta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \psi\begin{bmatrix}\cos\theta_r \\ \sin\theta_r\end{bmatrix}$$

(a4-24)より，$\alpha-\beta$ 静止座標系の式は，

$$\begin{bmatrix}v_\alpha \\ v_\beta\end{bmatrix} = R_s\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix}\psi_\alpha \\ \psi_\beta\end{bmatrix}$$

$$= R_s\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} L_1 - L_2\cos 2\theta_r & -L_2 \sin 2\theta_r \\ -L_2 \sin 2\theta_r & L_1 + L_2 \cos 2\theta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega_r\psi\begin{bmatrix}-\sin\theta_r \\ \cos\theta_r\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-31)}$$

p は，θ_r と i_α , i_β に演算する必要がある。

非突極機では $L_2 = 0$ とおけばよいので，以下のように簡単になる。

$$\begin{bmatrix}v_\alpha \\ v_\beta\end{bmatrix} = R_s\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + L_1 p\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega_r\psi\begin{bmatrix}-\sin\theta_r \\ \cos\theta_r\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-32)}$$

○　$d-q$ 座標系のモデル（Park の式）

$\alpha-\beta$ 静止座標系に対し，θ_r で回転する $d-q$ 座標系に変換してみよう。P 点を，静止座標系から見た $\dot{f}_s$ とそれを $d-q$ 座標系から見た $\dot{f}_{dq}$ の関係は，長さは同じで，*d-q* から見ると偏角が θ_r だけ小さいので

$$\dot{f}_{dq} = e^{-j\theta_r}\dot{f}_s \qquad \text{(a4-33)}$$

f は電圧 v，電流 i，鎖交磁束 ψ を表し，(a4-33)が $\dot{v}_{dq}, \dot{i}_{dq}, \dot{\psi}_{dq}$ の定義である。また，実部と虚部を次式で定義する。

$$\dot{f}_{dq} \equiv f_d + j\, f_q \qquad \text{(a4-34)}$$

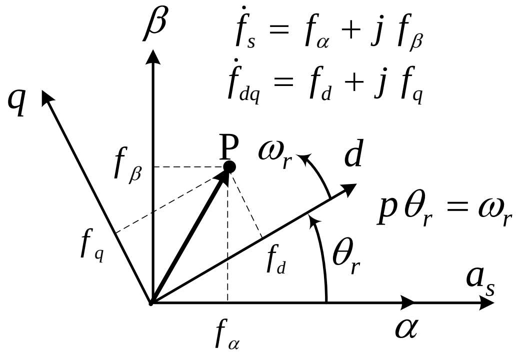


図 a4-2　*d-q* 座標系の定義

(a4-24)に左から $e^{-j\theta_r}$ を掛けて，(a4-30)を用いると

$$\dot{v}_{dq} = R_s \dot{i}_{dq} + e^{-j\theta_r} p\dot{\psi}_s$$

$$= R_s \dot{i}_{dq} + e^{-j\theta_r} p(L_1 e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq} - L_2 e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq}{}^* + \psi e^{j\theta_r})$$

$$= R_s \dot{i}_{dq} + e^{-j\theta_r} (L_1 j\omega_r e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq} + L_1 e^{j\theta_r} p\dot{i}_{dq} - L_2 j\omega_r e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq}{}^* - L_2 e^{j\theta_r} p\dot{i}_{dq}{}^* + j\omega_r \psi e^{j\theta_r})$$

$$= R_s \dot{i}_{dq} + j\omega_r L_1 \dot{i}_{dq} + L_1 p\dot{i}_{dq} - j\omega_r L_2 \dot{i}_{dq}{}^* - L_2 p\dot{i}_{dq}{}^* + j\omega_r \psi \qquad \text{(a4-35)}$$

実部と虚部に分けて，　次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (L_1 - L_2)p & -(L_1 + L_2)\omega_r \\ (L_1 - L_2)\omega_r & (L_1 + L_2)p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix}$$

ここで，

$$L_d = L_1 - L_2 = l_s + \frac{3}{2}L_0 - \frac{3}{2}L_m \quad , \quad L_q = L_1 + L_2 = l_s + \frac{3}{2}L_0 + \frac{3}{2}L_m \qquad \text{(a4-36)}$$

とおくと，$d-q$ 座標系の **Park の式**が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + p\,L_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + p\,L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-37)}$$

非突極機では，$L_d = L_q = L_1$ とおけばよい。

(a4-33)を成分に分けると，$f_d + j\,f_q = (\cos\theta_r - j\sin\theta_r)(f_\alpha + j\,f_\beta)$ だから

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-38)}$$

逆に，

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} \tag{a4-39}$$

a , b , c 量と d , q 量の関係は，(a4-33)に(a4-16)を代入して

$$\dot{f}_{dq} = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-j\theta_r} (f_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_c)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} (e^{-j\theta_r} f_a + e^{-j(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)} f_b + e^{-j(\theta_r + \frac{2}{3}\pi)} f_c) \tag{a4-40}$$

成分表示すると，

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin\theta_r & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \tag{a4-41}$$

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} \tag{a4-42}$$

鎖交磁束については, (a4-30)，(a4-33)より

$$\dot{\psi}_{dq} \equiv e^{-j\theta_r} \dot{\psi}_s = L_1 e^{-j\theta_r} \dot{i}_s - L_2 e^{j\theta_r} \dot{i}_s^{\,*} + \psi$$

$$= L_1 \dot{i}_{dq} - L_2 \dot{i}_{dq}^{\,*} + \psi$$

$$= (L_1 - L_2) i_d + j(L_1 + L_2) i_q + \psi$$

$$= L_d\, i_d + \psi + j\, L_q\, i_q \tag{a4-43}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \psi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{a4-44}$$

鎖交磁束を用いると(a4-37)の Park の式は，次式で表される。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega_r \\ \omega_r & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} \tag{a4-45}$$

空間ベクトルを用いると

$$\dot{v}_{dq} = R_s\, \dot{i}_{dq} + p\dot{\psi}_{dq} + j\omega_r \dot{\psi}_{dq} \tag{a4-46}$$

○　γ－δ座標系（任意回転座標系）のモデル

$\alpha-\beta$ 静止座標系での式を任意の回転角をもつ $\gamma-\delta$ 座標系に変換しよう。

P 点を，$\alpha-\beta$ 静止座標系から見た $\dot{f}_s$ と

それを $\gamma-\delta$ 座標系から見た $\dot{f}_{\gamma\delta}$ の関係は

$$\dot{f}_{\gamma\delta}=e^{-j\theta}\dot{f}_s \qquad \text{(a4-47)}$$

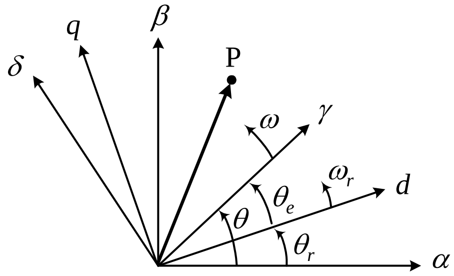


図 a4-3　$\gamma-\delta$ 座標系の定義

すなわち，

$$\begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-48)}$$

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-49)}$$

同様に $\gamma-\delta$ 座標系 $\dot{f}_{\gamma\delta}$ と $d-q$ 座標系 $\dot{f}_{dq}$ の関係は $\theta_e=\theta-\theta_r$ を用いて

$$\dot{f}_{\gamma\delta}=e^{-j\theta_e}\dot{f}_{dq} \qquad \text{(a4-50)}$$

すなわち，

$$\begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-51)}$$

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-52)}$$

a , b , c 量と γ, δ 量の関係は，(a4-47)に(a4-16)を代入して

$$\dot{f}_{\gamma\delta}=\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-j\theta}(f_a+e^{j\frac{2}{3}\pi}f_b+e^{-j\frac{2}{3}\pi}f_c)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}(e^{-j\theta}f_a+e^{-j(\theta-\frac{2}{3}\pi)}f_b+e^{-j(\theta+\frac{2}{3}\pi)}f_c) \qquad \text{(a4-53)}$$

成分表示すると，

$$\begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \tag{a4-54}$$

逆に,

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} \tag{a4-55}$$

(a4-47), (a4-30)より, $e^{-j\theta}$ を掛けて $\theta - \theta_r = \theta_e$ を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{\gamma\delta} &= e^{-j\theta}\dot{\psi}_s = L_1 e^{-j\theta}\dot{i}_s - L_2 e^{-j\theta} e^{j2\theta_r} \dot{i}_s{}^* + \psi e^{-j\theta + j\theta_r} \\ &= L_1 \dot{i}_{\gamma\delta} - L_2 e^{j2(\theta_r - \theta)} e^{j\theta} \dot{i}_s{}^* + \psi e^{-j\theta_e} \\ &= L_1 \dot{i}_{\gamma\delta} - L_2 e^{-j2\theta_e} \dot{i}_{\gamma\delta}{}^* + \psi e^{-j\theta_e} \end{aligned} \tag{a4-56}$$

成分表示すると,

$$\begin{bmatrix} \psi_\gamma \\ \psi_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 - L_2 \cos 2\theta_e & L_2 \sin 2\theta_e \\ L_2 \sin 2\theta_e & L_1 + L_2 \cos 2\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \psi \begin{bmatrix} \cos\theta_e \\ -\sin\theta_e \end{bmatrix} \tag{a4-57}$$

$\gamma - \delta$ 座標系の電圧方程式は, (a4-24)より両辺に $e^{-j\theta}$ を掛けて,

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\gamma\delta} &= R_s \dot{i}_{\gamma\delta} + e^{-j\theta} p(e^{j\theta}\dot{\psi}_{\gamma\delta}) \\ &= R_s \dot{i}_{\gamma\delta} + e^{-j\theta} j\omega e^{j\theta} \dot{\psi}_{\gamma\delta} + e^{-j\theta} e^{j\theta} p\dot{\psi}_{\gamma\delta} \\ &= R_s \dot{i}_{\gamma\delta} + j\omega\dot{\psi}_{\gamma\delta} + p\dot{\psi}_{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{a4-58}$$

成分表示すると,

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_\gamma \\ \psi_\delta \end{bmatrix} \tag{a4-59}$$

(a4-57)を(a4-59)に代入すると以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_d & -\omega L_q \\ \omega L_d & R_s + pL_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$+(L_d-L_q)\begin{bmatrix}-\sin^2\theta_e & -\sin\theta_e\cos\theta_e\\ -\sin\theta_e\cos\theta_e & \sin^2\theta_e\end{bmatrix}p\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}$$

$$+\omega(L_d-L_q)\begin{bmatrix}\sin\theta_e\cos\theta_e & -\sin^2\theta_e\\ -\sin^2\theta_e & -\sin\theta_e\cos\theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}$$

$$+(\omega-\omega_r)(L_d-L_q)\begin{bmatrix}-2\sin\theta_e\cos\theta_e & -1+2\sin^2\theta_e\\ -1+2\sin^2\theta_e & 2\sin\theta_e\cos\theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-60)}$$

あるいは,

$$\begin{bmatrix}v_\gamma\\ v_\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_s+pL_d & -\omega_r L_q\\ \omega_r L_d & R_s+pL_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}+\omega_r\psi\begin{bmatrix}\sin\theta_e\\ \cos\theta_e\end{bmatrix}$$

$$+(L_d-L_q)\begin{bmatrix}-\sin^2\theta_e & -\sin\theta_e\cos\theta_e\\ -\sin\theta_e\cos\theta_e & \sin^2\theta_e\end{bmatrix}p\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}$$

$$+\omega_r(L_d-L_q)\begin{bmatrix}\sin\theta_e\cos\theta_e & -\sin^2\theta_e\\ -\sin^2\theta_e & -\sin\theta_e\cos\theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}$$

$$+(\omega-\omega_r)\begin{bmatrix}-(L_d-L_q)\sin\theta_e\cos\theta_e & -L_d\cos^2\theta_e-L_q\sin^2\theta_e\\ L_d\sin^2\theta_e+L_q\cos^2\theta_e & (L_d-L_q)\sin\theta_e\cos\theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-61)}$$

非突極機の場合には，$L_d=L_q$ だから以下のように簡単になる。

$$\begin{bmatrix}v_\gamma\\ v_\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_s+pL_d & -\omega L_q\\ \omega L_d & R_s+pL_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\gamma\\ i_\delta\end{bmatrix}+\omega_r\psi\begin{bmatrix}\sin\theta_e\\ \cos\theta_e\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-62)}$$

○　瞬時トルク

瞬時トルクは，以下の式で求まる。証明は付録 6 で行う。どの座標系でも同じ形式になるのは面白い。

$$\tau_e=\frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}_s^{*}\dot{i}_s)$$

$$=\frac{P}{2}(\psi_\alpha i_\beta-\psi_\beta i_\alpha) \qquad \text{（静止座標系）}$$

$$=\frac{P}{2}\mathrm{I_m}((\dot{\psi}_{\gamma\delta}e^{j\theta})^{*}\dot{i}_s e^{j\theta})$$

$$=\frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}_{\gamma\delta}^{*}\dot{i}_{\gamma\delta})$$

$$=\frac{P}{2}(\psi_\gamma i_\delta - \psi_\delta i_\gamma) \quad \text{（任意回転座標系）}$$

$$=\frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}^*_{dq}\,\dot{i}_{dq})$$

$$=\frac{P}{2}(\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

$$=\frac{P}{2}(\psi\, i_q + (L_d - L_q) i_d\, i_q) \quad \text{（}d\text{-}q\text{ 座標系）} \tag{a4-63}$$

○　拡張誘起電圧形式

名古屋大学で提案されたモデルである(33)。特に$\gamma-\delta$座標系はエンコーダレス制御において使用される。

○　$d-q$座標系

Park の式より

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + p\,L_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + p\,L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_s + p\,L_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_q & R_s + p\,L_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E_{ex} \end{bmatrix} \tag{a4-64}$$

ここで，　$E_{ex} = \omega_r \left[(L_d - L_q) i_d + \psi \right] - (L_d - L_q)\, p\, i_q$　(a4-65)

E_{ex}は**拡張誘起電圧**(extended e.m.f.)と呼ばれる。

空間ベクトル表示すると，

$$\dot{v}_{dq} = R_s \dot{i}_{dq} + p\,L_d\,\dot{i}_{dq} + j\omega_r L_q \dot{i}_{dq} + jE_{ex} \tag{a4-66}$$

○　$\gamma-\delta$座標系

$d-q$座標系を$\gamma-\delta$座標系に変換する。

$$\dot{f}_{dq} = e^{j\theta_e}\,\dot{f}_{\gamma\delta} \tag{a4-67}$$

を用い，$p\,\theta_e = \omega - \omega_r$であるから

$$e^{j\theta_e}\dot{v}_{\gamma\delta} = R_s e^{j\theta_e}\dot{i}_{\gamma\delta} + L_d\,p(e^{j\theta_e}\dot{i}_{\gamma\delta}) + j\omega_r L_q\,e^{j\theta_e}\dot{i}_{\gamma\delta} + jE_{ex}$$

$$\therefore \quad \dot{v}_{\gamma\delta} = R_s \dot{i}_{\gamma\delta} + L_d\,p\dot{i}_{\gamma\delta} + j(\omega-\omega_r)L_d\dot{i}_{\gamma\delta} + j\omega_r L_q\,\dot{i}_{\gamma\delta} + je^{-j\theta_e}E_{ex} \tag{a4-68}$$

行列表示すると

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_q & R_s + pL_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + (\omega - \omega_r) L_d \begin{bmatrix} -i_\delta \\ i_\gamma \end{bmatrix} + E_{ex} \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-69)}$$

$\gamma - \delta$ 座標系のモデルの中に，$d - q$ 座標系で表された E_{ex} が含まれているが，エンコーダレス制御を考える場合には(a4-60)などに比べて利用しやすい。

○　$\alpha - \beta$ 座標系

静止座標系では $\gamma - \delta$ 座標系の　$\theta = 0,\ \theta_e = -\theta_r$ で，　$\omega = 0,\ p\,\theta_e = -\omega_r$　であることから，

$$\dot{v}_{\alpha\beta} = R_s \dot{i}_{\alpha\beta} + L_d\, p\dot{i}_{\alpha\beta} - j\omega_r L_d \dot{i}_{\alpha\beta} + j\omega_r L_q\, \dot{i}_{\alpha\beta} + je^{j\theta_r} E_{ex}$$

行列表示すると

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_q & R_s + pL_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega_r L_d \begin{bmatrix} i_\beta \\ -i_\alpha \end{bmatrix} + E_{ex} \begin{bmatrix} -\sin\theta_r \\ \cos\theta_r \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-70)}$$

○　永久磁石磁束ベクトル形式

$\gamma - \delta$ 座標系で，(a4-57)，(a4-59)より

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 - L_2\cos 2\theta_e & L_2 \sin 2\theta_e \\ L_2 \sin 2\theta_e & L_1 + L_2 \cos 2\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix}$$

$$+\psi \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_e \\ -\sin\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 - L_2\cos 2\theta_e & L_2 \sin 2\theta_e \\ L_2 \sin 2\theta_e & L_1 + L_2 \cos 2\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$+\psi \begin{bmatrix} (\omega_r - \omega)\sin\theta_e + \omega \sin\theta_e \\ \omega\cos\theta_e + (\omega_r - \omega)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \left(L_1 \boldsymbol{I} - L_2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta_e & -\sin 2\theta_e \\ -\sin 2\theta_e & -\cos 2\theta_e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$+\omega_r\,\psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta_e & -\sin 2\theta_e \\ -\sin 2\theta_e & -\cos 2\theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & -\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \qquad \text{(a4-71)}$$

であるから[37],

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_e & L_1 \sin\theta_e \\ -L_1 \sin\theta_e & L_1 \cos\theta_e \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} -L_2 \cos\theta_e & L_2 \sin\theta_e \\ L_2 \sin\theta_e & L_2 \cos\theta_e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_d \cos\theta_e & L_q \sin\theta_e \\ -L_d \sin\theta_e & L_q \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

(a4-72)

○　鎖交磁束形式

$\gamma-\delta$ 座標系で，(a4-72)で，インダクタンスの基準を L_d にとって

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_d \cos\theta_e & L_d \sin\theta_e \\ -L_d \sin\theta_e & L_d \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(L_d - L_q)\sin\theta_e \\ 0 & -(L_d - L_q)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} L_d \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} (L_d - L_q) \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix} i_q + \omega_\gamma \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

(a4-73)

インダクタンスの基準を L_q にとると[37],

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} L_q \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} (L_d - L_q) \begin{bmatrix} \cos\theta_e \\ -\sin\theta_e \end{bmatrix} i_d + \omega_r \psi \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

(a4-74)

○　行列表現

$\gamma-\delta$ 軸での表現は(a4-57)，(a4-59)より

$$\boldsymbol{v}_{\gamma\delta} = R_s \boldsymbol{i}_{\gamma\delta} + (p\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{J})\boldsymbol{\psi}_{\gamma\delta} \tag{a4-75}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{i}_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\psi}_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} \psi_\gamma \\ \psi_\delta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\gamma\delta} = \boldsymbol{\psi}_i + \boldsymbol{\psi}_m$$

$$= \left[L_1\boldsymbol{I} - L_2\boldsymbol{Q}(\theta_e)\right]\boldsymbol{i}_{\gamma\delta} + \psi\boldsymbol{u}(\theta_e) \tag{a4-76}$$

$$\boldsymbol{Q}(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta_e & -\sin 2\theta_e \\ -\sin 2\theta_e & -\cos 2\theta_e \end{bmatrix}$$ （鏡行列）[49]

$$\boldsymbol{u}(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos\theta_e \\ -\sin\theta_e \end{bmatrix}$$

ψ の項だけ計算すると，

$$\boldsymbol{v}_{\gamma\delta} = R_s \boldsymbol{i}_{\gamma\delta} + (p\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{J})\left[L_1\boldsymbol{I} - L_2\boldsymbol{Q}(\theta_e)\right]\boldsymbol{i}_{\gamma\delta} + \omega_r\psi\begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix} \tag{a4-77}$$

$$\boldsymbol{\psi}_i = \left[L_1\boldsymbol{I} - L_2\,\boldsymbol{Q}(\theta_e)\right]\boldsymbol{i}_{\gamma\delta} \tag{a4-78}$$ ：電流による固定子鎖交磁束

$$\boldsymbol{\Phi}_a = L_1\boldsymbol{i}_{\gamma\delta} \tag{a4-79}$$ ：同相磁束

$$\boldsymbol{\Phi}_b = L_2\boldsymbol{Q}(\theta_e)\boldsymbol{i}_{\gamma\delta} \tag{a4-80}$$ ：鏡相磁束

$$\boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Phi}_a - \boldsymbol{\Phi}_b$$

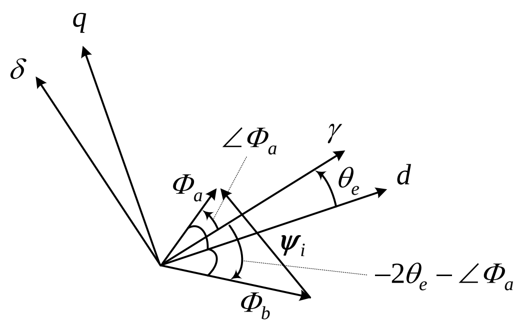


図 a4-4　鏡相磁束

d 軸は，$\boldsymbol{\Phi}_a$ と $\boldsymbol{\Phi}_b$ の 2 等分線に一致する。注目すべきは，静止座標系からみると $\boldsymbol{\Phi}_a$ と $\boldsymbol{\Phi}_b$ は同じ様に回転するということ。

証明） $\begin{bmatrix}\gamma'\\ \delta'\end{bmatrix}=Q(\theta_e)\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta_e & -\sin 2\theta_e\\ -\sin 2\theta_e & -\cos 2\theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}$ とする。

$$\gamma'+j\delta'=\gamma\cos 2\theta_e-\delta\sin 2\theta_e-j\gamma\sin 2\theta_e-j\delta\cos 2\theta_e$$

$$=(\gamma-j\delta)(\cos 2\theta_e-j\sin 2\theta_e)$$

$$=\left\{(\gamma+j\delta)(\cos 2\theta_e+j\sin 2\theta_e)\right\}^*$$

$$\therefore\quad \angle(\gamma'+j\delta')=-2\theta_e-\angle(\gamma+j\delta)$$

発生トルク $$\tau_e=\frac{P}{2}(\psi_\gamma i_\delta-\psi_\delta i_\gamma)=\frac{P}{2}\boldsymbol{i}_{\gamma\delta}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_{\gamma\delta} \qquad \text{(a4-81)}$$

○ 静止座標系（拡張磁束）

(a4-24), (a4-43)より

$$\dot{v}_s=R_s\dot{i}_s+p\dot{\psi}_s$$

$$\dot{\psi}_s=L_1\dot{i}_s-L_2e^{j\theta_r}\dot{i}_{dq}{}^*+\psi e^{j\theta_r}$$

$$=(L_1(i_d+ji_q)-L_2(i_d-ji_q)+\psi)e^{j\theta_r}$$

$$=(L_d\,i_d+j\,L_q\,i_q+\psi)e^{j\theta_r}$$

$$=(L_d\,i_d-L_qi_d+L_qi_d+\psi+j\,L_q\,i_q)e^{j\theta_r}$$

$$=((L_d-L_q)i_d+L_q(i_d+j\,i_q)+\psi)e^{j\theta_r}$$

$$=L_q\dot{i}_s+((L_d-L_q)i_d+\psi)e^{j\theta_r} \qquad \text{(a4-82)}$$

故に,

$$\begin{bmatrix}v_{s\alpha}\\ v_{s\beta}\end{bmatrix}=(R_s+L_q\,p)\begin{bmatrix}i_{s\alpha}\\ i_{s\beta}\end{bmatrix}+p\begin{bmatrix}\varphi_{s\alpha}\\ \varphi_{s\beta}\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-83)}$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_{s\alpha}\\ \varphi_{s\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}((L_d-L_q)\,i_d+\psi)\cos\theta_r\\ ((L_d-L_q)i_d+\psi)\sin\theta_r\end{bmatrix} \qquad \text{(a4-84)}$$

$\varphi_{s\alpha}$，$\varphi_{s\beta}$ は**拡張磁束**と呼ばれている。鎖交磁束を推定してセンサレスベクトル制御に用いている(54)。

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \end{bmatrix} = (R_s + L_d\ p)\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} \varphi'_{s\alpha} \\ \varphi'_{s\beta} \end{bmatrix} \tag{a4-85}$$

とするモデルもある。

○ 固定子磁束に同期した座標系

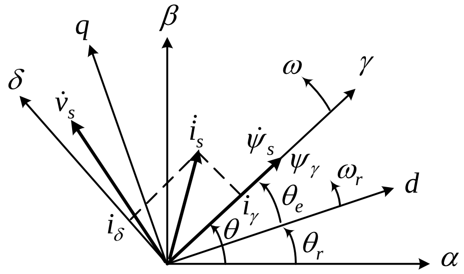


図 a4-5　固定子磁束

(a4-24)より

$$\dot{v}_s = R_s\dot{i}_s + p\dot{\psi}_s \tag{a4-86}$$

$\dot{\psi}_s$ に同期した γ − δ 座標系は，(a4-59)で $\psi_\delta = 0$ とおいて

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = R_s\begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ \omega \end{bmatrix}\psi_\gamma \tag{a4-87}$$

となる。トルクは(a4-63)より

$$\tau_e = \frac{P}{2}\psi_\gamma i_\delta \tag{a4-88}$$

である。

$\dot{\psi}_s$ を電圧から演算すると θ が求まるので， i_γ，i_δ が計算できる。Direct torque control (DTC)で弱め磁束制御(flux-weakening control)を考えるとき用いられている。高速運転で固定子抵抗が無視できるとき，定常状態で θ_e が負荷角 δ に一致する。

付録５　同期機の特性解析

永久磁石型同期電動機にいきなり交流電圧を加えても始動しないので，磁極位置を検出または推定しインバータで周波数を徐々に上げていくとか**ダンパー巻線**付きの構造にして誘導電動機として始動するなどが必要となる。しかし，ここでは始動のことは考えないで，定常状態の運転やその状態からの負荷変動を解析する。単に交流電圧を加えるだけであるから，単純な ***V/f* 一定制御**とする。なお，**ダンパー巻線**があると過渡特性が違ってくるが，ここではダンパー巻線も考えない。図 a5-1 に解析する *V/f* 一定制御システムを示す。このシステムは誘導電動機の *V/f* 一定制御システムと違って実際にはほとんど使われていない(安定化のため電流フィードバックなどが必要である)。しかし，同期機の基本的な特性を考える上で重要である。図 a5-1 でインバータの電圧制御は理想的で，次式で与える。

$$
\begin{aligned}
v_a &= v_a^* = -\sqrt{2}V\sin\theta = \sqrt{2}\,V\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) \\
v_b &= v_b^* = -\sqrt{2}V\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{2}V\cos(\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi) \\
v_c &= v_c^* = -\sqrt{2}V\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{2}V\cos(\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi)
\end{aligned}
\tag{a5-1}
$$

ここで，振幅と位相は次式で求められる。

$$
V = k\,f\,,\quad \theta = \int_0^t \omega(t)\,dt = 2\pi\int_0^t f(t)\,dt \tag{a5-2}
$$

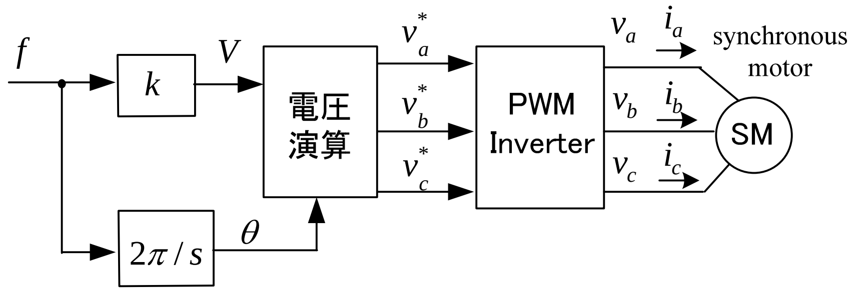


図 a5-1　同期電動機の *V/f* 一定制御システム

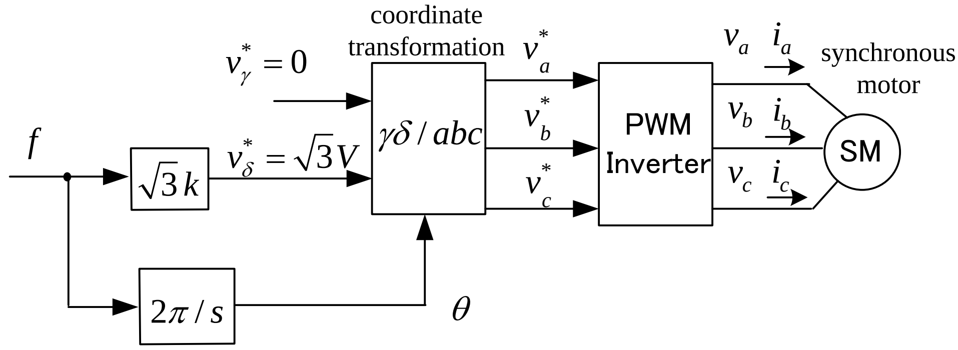


図 a5-2　座標変換器を用いた図 a5-1 と等価な *V/f* 一定制御システム

図 a5-2 は電圧指令を次式で与える。

$$v_\gamma^* = 0 \ , \ v_\delta^* = \sqrt{3}V \tag{a5-3}$$

また**座標変換器**は次式で演算する。

$$\begin{bmatrix} v_a^* \\ v_b^* \\ v_c^* \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\gamma^* \\ v_\delta^* \end{bmatrix} \tag{a5-4}$$

このとき，図 a5-2 は図 a5-1 と全く等価な *V/f* 一定制御システムであることがわかる。

同期機の解析モデルは図 a5-3 に示す磁極位置，巻線軸，$\alpha - \beta$ 軸（静止），$d - q$ 軸（磁極上），$\gamma - \delta$ 軸（任意回転）を使って導いた。図 a5-3 の磁極位置のとき，電動機として運転している場合は，相電圧の**空間ベクトル**は図 a5-3 の q 軸より少し進んだ向きであることが判っている（後で明らかとする）。つまり，磁極位置（機械的角度）と相電圧（電気的角度）は関係があって，両者を自由に選ぶことはできない。同期機の本質である。このため図 a5-3 のように $\gamma - \delta$ 軸及び θ を定義し，相電圧の空間ベクトルが δ 軸の向きにあるなら，マイナスがついて不自然に感じるが(a5-1)のように相電圧を定義する必要があった。

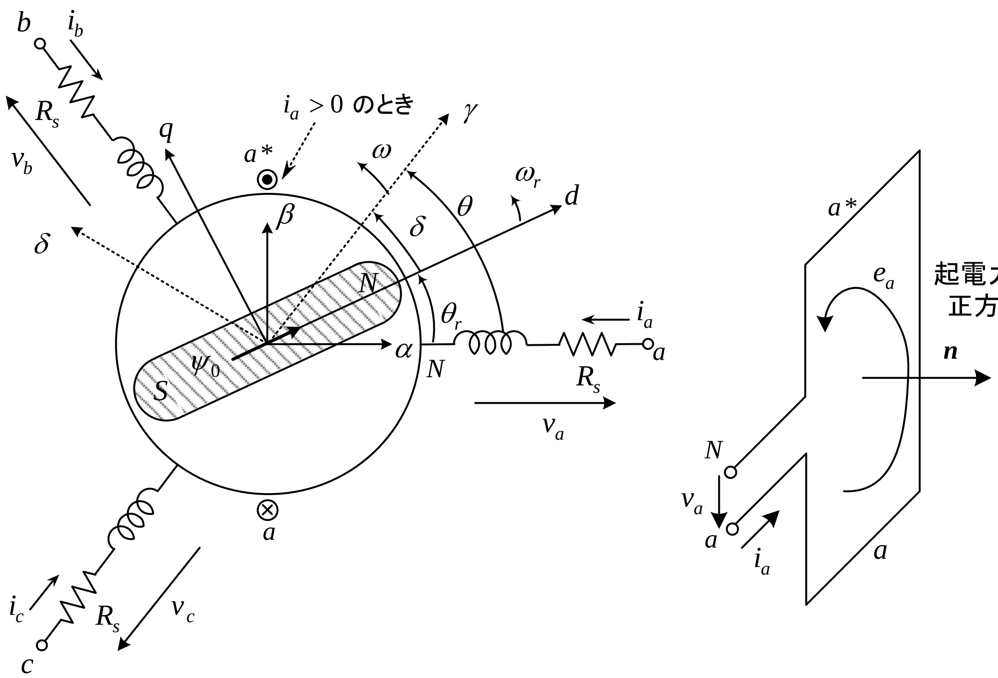


図 a5-3　同期機の解析モデルと軸の定義

○　非突極機の解析

<u>システムの記述</u>

同期機が SPMSM（表面磁石同期電動機）の非突極機である場合を考える。図 a5-1 及び図 a5-2 の解析を行う場合，まず SPMSM をどんな座標系で解析するかを考えなくてはならない。磁極位置θ_r に同期した$d-q$座標系よりも，電圧の位相θに同期した $\gamma-\delta$ 座標系の方が電圧がすぐに直流に変換できて便利そうである。しかも非突極機のモデルは $\gamma-\delta$ 座標系でも簡単である。 $\gamma-\delta$ 座標系で直接解析することに問題はないが，ここでは後に述べる突極機の解析と同じ解析が行えるように， $d-q$座標系と $\gamma-\delta$ 座標系の**座標変換式**と$d-q$**座標系のモデル**を併用して解析しよう（これは間接的に $\gamma-\delta$ 座標系のモデルで解析することになる）。突極性があると直接 $\gamma-\delta$ 座標系のモデルを使うのは複雑だからである。

2 軸理論で，$d-q$座標系での同期機の Park の式は(a4-37)より

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_1 & -\omega_r L_1 \\ \omega_r L_1 & R_s + pL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix} \tag{a5-5}$$

である。また，発生トルクは(a4-63)より

$$\tau_e = \frac{P}{2} \psi\, i_q \tag{a5-6}$$

運動方程式は

$$\frac{2}{P} J \;\; p\,\omega_r = \tau_e - T_L \tag{a5-7}$$

ここで，T_L ：負荷トルク

図 a5-3 より次式が得られる。角度及び角速度は全て電気角である。

$$p\,\theta = \omega \qquad \text{（電源電圧の角周波数）} \tag{a5-8}$$

$$p\theta_r = \omega_r \qquad \text{（回転角速度）} \tag{a5-9}$$

$$\delta = \theta - \theta_r \tag{a5-10}$$

$$p\delta = \omega - \omega_r \tag{a5-11}$$

$d-q$座標量と $\gamma-\delta$ 座標量の関係式は(a4-52)より

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} \tag{a5-12}$$

ここで，f は電圧，電流，鎖交磁束を意味する。$\theta_e = \delta$ と置き換えたのは，これが**負荷角**(load angle)と呼ばれ，一般の教科書で広く使われている記号だからである。

ところで，$\gamma-\delta$ 電圧と 3 相電圧の変換は(a4-55)より次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} \tag{a5-13}$$

電圧制御が理想的で，次式が成り立つと仮定する。

$$v_a^* = v_a \ , \ v_b^* = v_b \ , \ v_c^* = v_c \tag{a5-14}$$

このとき，(a5-4), (a5-13)より，次式が成り立つ。

$$v_\gamma^* = v_\gamma \ , \ v_\delta^* = v_\delta \tag{a5-15}$$

従って，(a5-3)より次式を得る。

$$v_\gamma = 0 \ , \ v_\delta = \sqrt{3}V \tag{a5-16}$$

(a5-12), (a5-16)より，次式が成り立つ。

$$v_d = -\sqrt{3}V\sin\delta \tag{a5-17}$$

$$v_q = \sqrt{3}V\cos\delta \tag{a5-18}$$

以上の式により**定常状態及び過渡状態の解析**を行うことができる。このとき，任意に与えられる入力は，電源角周波数$\omega\ (=2\pi f)$ ，電源電圧実効値$V(=kf)$ ，負荷トルク T_L （外乱入力）である。

定常解析

電源角周波数$\omega\ (=2\pi f)$ ，電源電圧実効値$V(=kf)$ ，負荷トルク T_L （外乱入力）が一定の場合，時間が十分経過した定常状態を解析する。$\delta=$一定なら，(a5-11)より$\omega=\omega_r$が成立し，(a5-17), (a5-18)より入力電圧が直流電圧なので(a5-5)で$p=0$とおいて電流が求まり，(a5-6)より発生トルクが一定となるから速度脈動を生じることはなく，矛盾がない。すなわち，定常解として考えられる。なお，δは発生トルクと負荷トルクが一致するように決まる。

以上により，定常状態では(a5-5), (a5-7), (a5-11)で**微分演算子**$p=0$とおくことができる。しかし，回転しているのだから(a5-8), (a5-9)では$p=0$とおけない。(a5-7), (a5-11)より次式が成り立つ。

$$\omega = \omega_r \tag{a5-19}$$

$$\tau_e = T_L \tag{a5-20}$$

(a5-5)より，(a5-17), (a5-18), (a5-19)を考慮して

$$v_d = -\sqrt{3}V\sin\delta = R_s i_d - \omega L_1 i_q \tag{a5-21}$$

$$v_q = \sqrt{3}V\cos\delta = R_s i_q + \omega L_1 i_d + \omega\psi \tag{a5-22}$$

(a5-21), (a5-22)より

$$i_d = \frac{-\sqrt{3}V\,R_s\sin\delta + \omega L_1(\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi)}{R_s^2 + \omega^2 L_1^2} \tag{a5-23}$$

$$i_q = \frac{R_s(\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi) + \sqrt{3}V\omega L_1 \sin\delta}{R_s^2 + \omega^2 L_1^2} \tag{a5-24}$$

R_s を無視すると

$$i_d = \frac{\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi}{\omega L_1} \tag{a5-25}$$

$$i_q = \frac{\sqrt{3}V\sin\delta}{\omega L_1} \tag{a5-26}$$

トルクは

$$\tau_e = \frac{P}{2}\psi\, i_q = \frac{P}{2}\psi\frac{R_s(\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi) + \sqrt{3}V\omega L_1 \sin\delta}{R_s^2 + \omega^2 L_1^2} \tag{a5-27}$$

R_s を無視すると

$$\tau_e = \frac{P}{2}\frac{\sqrt{3}V\psi\sin\delta}{\omega L_1} \tag{a5-28}$$

負荷角 δ は負荷トルク T_L によって決まる。R_s を無視の場合，$\delta > 0$ のときトルクは正なので電動機運転状態，$\delta < 0$ のときトルクは負だから発電機運転状態を意味する。安定に運転できる領域は $-\pi/2 < \delta < \pi/2$ の範囲と言われている。

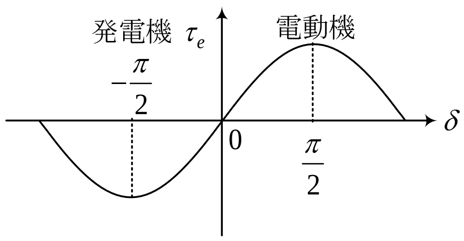


図 a5-4　負荷角とトルクの関係（非突極機，定常状態，一次抵抗無視）

相電圧の実効値 V や相電流の実効値 I については，以下の関係がある。

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{v_d^2 + v_q^2} \tag{a5-29}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{i_d^2 + i_q^2} \tag{a5-30}$$

<u>過渡空間ベクトル図</u>

　物理的な考察をする場合には，ベクトル図は有用な道具である。ここでは，過渡状態でも使える空間ベクトル図を導出しよう。

非突極機の場合には, 2 軸理論で, $L_2 = 0$ である。よって, 鎖交磁束の空間ベクトルは(a4-30)，(a4-33)より

$$\dot{\psi}_s = L_1 \dot{i}_s + \psi e^{j\theta_r} = L_1 e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq} + \psi e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-31)}$$

となる。(a4-24)より次式が得られる。

$$\dot{v}_s = R_s \dot{i}_s + L_1 p \dot{i}_s + j\omega_r \psi e^{j\theta_r}$$

$$= R_s \dot{i}_s + L_1 p \dot{i}_s + \dot{e}_0 ' \qquad \text{(a5-32)}$$

ここで**逆起電力**の空間ベクトル $\dot{e}_0 '$ は，次式で表される。

$$\dot{e}_0 ' = -\dot{e}_0 = j\omega_r \psi e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-33)}$$

$\dot{e}_0$ は**起電力**の空間ベクトルである。

以上により，空間ベクトルを変数とした図 a5-5 の過渡等価回路が得られる。

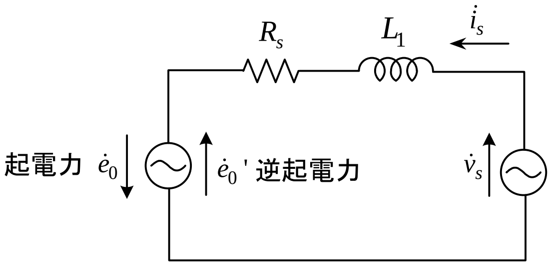


図 a5-5　過渡等価回路（非突極機）

(a5-16)より，端子電圧は δ 軸成分しかないので

$$\dot{v}_s(t) = \sqrt{3} V e^{j(\theta_r + \delta + \frac{\pi}{2})} = \sqrt{3} V e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \qquad \text{ここで，} \theta = \theta_r + \delta \qquad \text{(a5-34)}$$

となる（(a5-1)からも導出できる）。

d-*q* 軸電流を用いると(a5-31)より

$$\dot{v}_s = R_s \dot{i}_s + L_1 p(e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq}) + j\omega_r \psi e^{j\theta_r}$$

$$= R_s \dot{i}_s + j\omega_r L_1 e^{j\theta_r} \dot{i}_{dq} + L_1 e^{j\theta_r} p(\dot{i}_{dq}) + j\omega_r \psi e^{j\theta_r}$$

$$= R_s \dot{i}_s + (-\omega_r L_1 i_q + L_1 (p i_d)) e^{j\theta_r} + (\omega_r L_1 i_d + L_1 (p i_q)) j e^{j\theta_r} + j\omega_r \psi e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-35)}$$

以上により，図 a5-6 の空間ベクトル図が得られる。これは過渡状態でも成り立つ。実際の起電力の最大位置と向きはフレミングの右手の法則でも求まり物理的に理解が容易である（巻線は相対的に磁極と反対方向に動くと考える）。逆起電力 $e_0 '$ については，⊙印の方向の電流を妨

げるような向きにその位置の巻線内に最大値が発生していると解釈できる。端子電圧については，⊙印の方向に電流を流そうとする向きに図の巻線位置に最も高い電圧が外部から加えられている。従ってこれらは打ち消しあう。

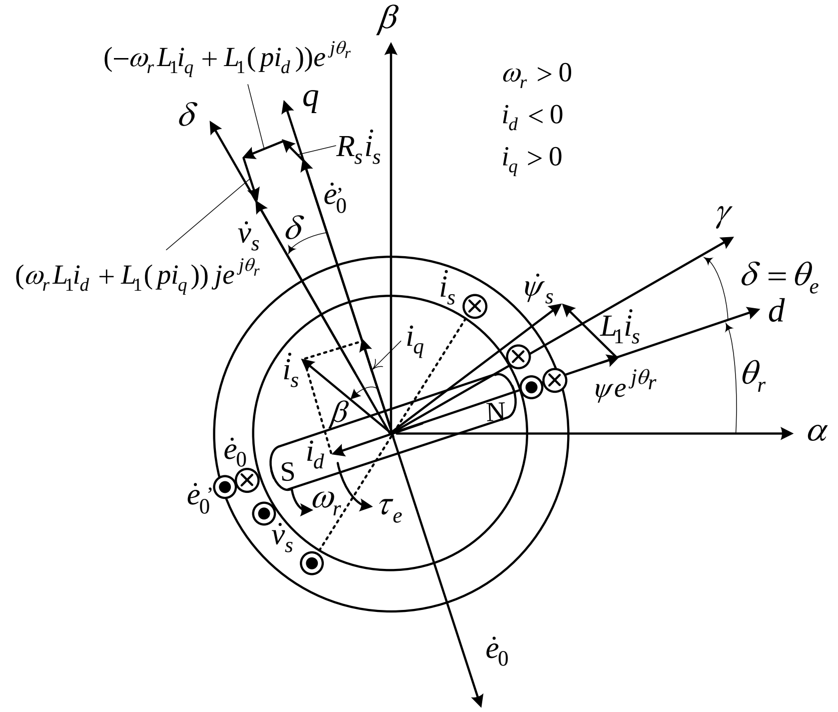


図 a5-6　過渡状態の空間ベクトル図（非突極機，電動機動作）

発生トルクについては，過渡状態を含め，(a5-6)より計算でき，**電流進み角** β を用いて以下のようにも表現できる。

$$\tau_e = \frac{P}{2}\psi\, i_q = \frac{P}{2}\psi \left|\dot{i}_s\right|\cos\beta \qquad \text{(a5-36)}$$

磁石の作る磁束の向き（S 極に入る向き）と $\dot{i}_s$ の向き⊙に，フレミングの左手の法則を適用すると，力はトルク τ_e と逆向きとなるが，その反作用で磁極には図の向きにトルクが発生する。

同期発電機の場合の過渡状態の空間ベクトル図を図 a5-7 に示す。本稿では，電圧，電流，起電力の定義は変更しないで，空間ベクトル図を書いた。図 a5-6 と図 a5-7 を比べるとき，その方が統一的に議論でき便利である。図 a5-7 ではトルクが回転と逆方向になる。文献(7)では，電流や起電力の向きは変えないで発電機の場合に端子電圧の向きを逆にして（V'，ここでは $-\dot{v}_s$）フェーザ図を書いていたが，円線図では，電動機の場合のフェーザ図だけで発電機も論じている。図 a5-7 で，起電力 $\dot{e}_0$ と電流 $\dot{i}_s$ の位相差の絶対値が $\pi/2$ より小さい，あるいは，$\pi/2 < \beta$ で q 軸電流が負の場合発電機動作になる。R_s を無視して考えると，$\delta < 0$ の場合発電機とも言える。

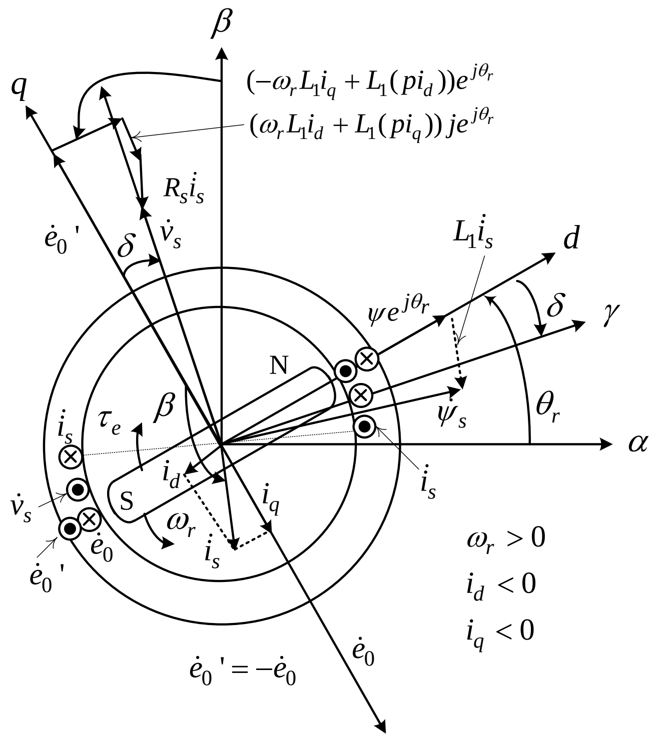


図 a5-7　過渡状態の空間ベクトル図（非突極機，発電機動作）

定常空間ベクトル図（フェーザ図）

定常状態では，電源の角周波数と回転角速度（電気角）は等しいので，$\omega = \omega_r$（一定）であるから，(a5-35)で $p = 0$ とおいて，

$$\dot{v}_s = R_s\dot{i}_s + j\omega L_1(i_d + ji_q)e^{j\theta_r} + j\omega\psi e^{j\theta_r}$$

$$= R_s\dot{i}_s + j\omega L_1\dot{i}_s + j\omega\psi e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-37)}$$

(a5-34)を代入して，

$$\dot{i}_s = j\frac{\sqrt{3}Ve^{j\delta} - \omega\psi}{R_s + j\omega L_1}e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-38)}$$

交流理論で用いられるフェーザについては，空間ベクトルと

$$\textbf{定常時の空間ベクトル} = \sqrt{3}e^{j\omega t} \times \textbf{フェーザ} \qquad \text{(a5-39)}$$

の関係がある。従って，定常時の空間ベクトルの大きさを$1/\sqrt{3}$ して，時間$t = 0$を代入すればフェーザ表示が得られる。ある瞬間に描いた定常時の空間ベクトル図はそのままフェーザ図として利用できる。θ_{r0}（任意に選べる）を定常状態の$t = 0$での磁極位置とすると

$$\theta_r = \omega t + \theta_{r0} \quad \text{（定常時）} \qquad \text{(a5-40)}$$

このとき， (a5-1)より電圧は次式で表される。

$$v_a = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} + \frac{\pi}{2})$$

$$v_b = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}) \qquad \text{(a5-41)}$$

$$v_c = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} + \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2})$$

このように$t=0$での磁極位置と電圧の初期位相には関連があり，両者を独立に選ぶことはできない。

(a5-38)より，電流のフェーザ$\dot{I}$ は

$$\dot{I} = j\frac{Ve^{j\delta} - (\omega\psi/\sqrt{3})}{R_s + j\omega L_1}e^{j\theta_{r0}} \qquad \text{(a5-42)}$$

となる。電流の実効値I は

$$I = \frac{|\dot{i}_s|}{\sqrt{3}} = |\dot{I}| = \left|\frac{Ve^{j\delta} - (\omega\psi/\sqrt{3})}{R_s + j\omega L_1}\right| = \frac{\sqrt{(V\cos\delta - (\omega\psi/\sqrt{3}))^2 + (V\sin\delta)^2}}{\sqrt{R_s^2 + (\omega L_1)^2}} \qquad \text{(a5-43)}$$

これは(a5-30)に一致する。

$\theta_{r0} = \pi/6$として，図 a5-8 に時間$t=0$での磁極位置，逆起電力の空間ベクトル，そのときの逆起電力の瞬時値を示す。S 極のところに$b*$があり，これが⊙であることは b 相巻線の逆起電力が最大（起電力最小）となっていることを意味する。このように回転すると S 極のところの巻線の逆起電力が次々と最大になっていく。⊙の方向はフレミングの右手の法則より求めた起電力を逆にすればよい。このように磁極位置と巻線の電圧や電流の関係がイメージできる。図中の式は(a5-33)，(a5-40)，(a4-20)，(a4-22)より得られる。

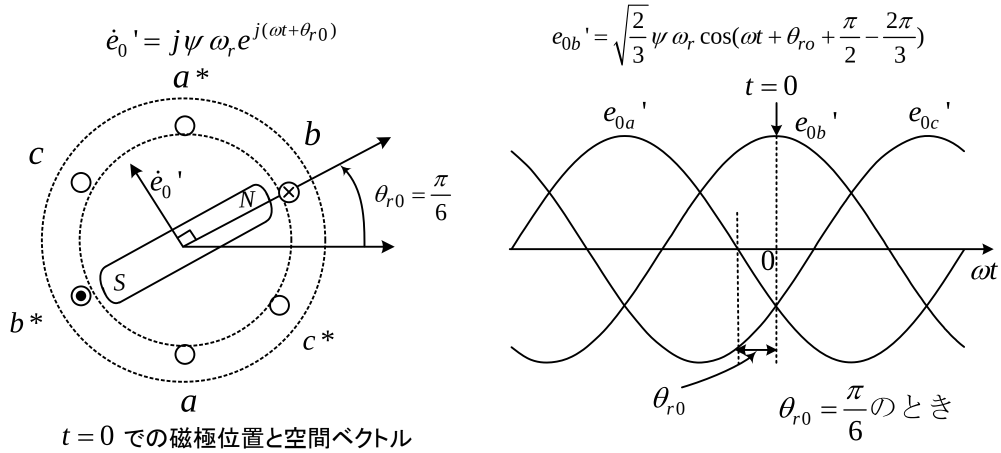


図 a5-8　定常状態の空間ベクトルと瞬時値の関係

○ 突極機の解析

システムの記述

同期機が IPMSM（**埋込磁石同期電動機**）の突極機である場合を考える。図 a5-1，図 a5-2 の解析を行う場合，まず IPMSM をどんな座標系で解析するかを考えなくてはならない。磁極位置 θ_r に同期した $d-q$ 座標系よりも，電圧の位相 θ に同期した $\gamma-\delta$ 座標系（図 a5-3）の方が電圧がすぐに変換できて便利そうである。しかし，突極性があると $\gamma-\delta$ 座標系のモデルは複雑である。そこで，$d-q$ 座標系と $\gamma-\delta$ 座標系の**座標変換式**と $d-q$ **座標系のモデル**を併用して使うことで，できるだけ簡単に解析しよう。

2 軸理論で，$d-q$ 座標系での同期機の式は(a4-37)より

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + p\,L_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + p\,L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \psi \end{bmatrix} \tag{a5-44}$$

である。また，発生トルクは(a4-63)より

$$\tau_e = \frac{P}{2}(\psi\, i_q + (L_d - L_q) i_d\, i_q) \tag{a5-45}$$

運動方程式は

$$\frac{2}{P} J\ \ p\,\omega_r = \tau_e - T_L \tag{a5-46}$$

ここで，T_L ：負荷トルク

図 a5-3 より

$$p\,\theta = \omega \tag{a5-47}$$

$$p\theta_r = \omega_r \tag{a5-48}$$

$$\delta = \theta - \theta_r \tag{a5-49}$$

$$p\delta = \omega - \omega_r \tag{a5-50}$$

$d-q$ 座標量と $\gamma-\delta$ 座標量の関係式は(a4-52)より

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\gamma \\ f_\delta \end{bmatrix} \tag{a5-51}$$

ここで，f は電圧，電流，鎖交磁束を意味する。

ところで，$\gamma-\delta$ 電圧と 3 相電圧の変換は(a4-55)次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} \tag{a5-52}$$

電圧制御が理想的で，次式が成り立つと仮定する。

$$v_a^* = v_a \ , \ v_b^* = v_b \ , \ v_c^* = v_c \tag{a5-53}$$

このとき，(a5-4), (a5-52)より，次式が成り立つ。

$$v_\gamma^* = v_\gamma \ , \ v_\delta^* = v_\delta \tag{a5-54}$$

従って，(a5-3)より次式となる。

$$v_\gamma = 0 \ , \ v_\delta = \sqrt{3}V \tag{a5-55}$$

(a5-51), (a5-55)より，次式が成り立つ。

$$v_d = -\sqrt{3}V\sin\delta \tag{a5-56}$$

$$v_q = \sqrt{3}V\cos\delta \tag{a5-57}$$

(a5-44)～(a5-50), 及び(a5-56), (a5-57)により，図 a5-1 及び図 a5-2 の定常状態及び過渡状態が解析できる。このとき，任意に与えられる入力は， $\omega\ (=2\pi f)$, $V(=kf)$, T_L である。

定常解析

定常状態で， $\delta =$ 一定なら，(a5-50)より $\omega = \omega_r$ が成立し，(a5-44)で入力が直流電圧なので $p=0$ とおいて電流が求まり，(a5-45)より発生トルクが一定となるから速度脈動を生じることはなく，矛盾がない。すなわち，定常解として考えられる。なお， δ は発生トルクと負荷トルクが一致するように決まる。

以上により, 定常状態では(a5-44), (a5-46), (a5-50)で微分演算子を $p=0$ とおくことができる。静止座標系では(a4-32)のように，複雑な式となる。

(a5-46), (a5-50)より次式が成り立つ。

$$\omega = \omega_r \tag{a5-58}$$

$$\tau_e = T_L \tag{a5-59}$$

(a5-44)より，(a5-56), (a5-57)を考慮して

$$v_d = -\sqrt{3}V\sin\delta = R_s i_d - \omega L_q i_q \tag{a5-60}$$

$$v_q = \sqrt{3}V\cos\delta = \omega L_d i_d + R_s i_q + \omega\psi \tag{a5-61}$$

(a5-60), (a5-61)より

$$i_d = \frac{-\sqrt{3}VR_s \sin\delta + \omega L_q(\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi)}{R_s^2 + \omega^2 L_d L_q} \tag{a5-62}$$

$$i_q = \frac{R_s(\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi) + \sqrt{3}V\omega L_d \sin\delta}{R_s^2 + \omega^2 L_d L_q} \tag{a5-63}$$

R_s を無視すると

$$i_d = \frac{\sqrt{3}V\cos\delta - \omega\psi}{\omega L_d} \tag{a5-64}$$

$$i_q = \frac{\sqrt{3}V\sin\delta}{\omega L_q} \tag{a5-65}$$

トルクは　$\tau_e = \frac{P}{2}(\psi\, i_q + (L_d - L_q) i_d\, i_q)$ であるが

マグネットトルク（R_s を無視）は逆起電力（相電圧）の実効値 E_0（ (a5-33)より）を用い

$$\tau_m = \frac{P}{2}\psi\, i_q = \frac{P}{2}\frac{\sqrt{3}V\psi\sin\delta}{\omega L_q} = \frac{3P}{2\omega}\frac{VE_0\sin\delta}{\omega L_q} \qquad where,\ E_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\psi \tag{a5-66}$$

リラクタンストルク（R_s を無視）は

$$\tau_r = \frac{P}{2}(L_d - L_q)\, i_d\, i_q = \frac{3P}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega L_d} - \frac{1}{\omega L_q}\right)VE_0\sin\delta + \frac{3P}{4\omega}\left(\frac{1}{\omega L_q} - \frac{1}{\omega L_d}\right)V^2\sin 2\delta \tag{a5-67}$$

(a5-66), (a5-67)より

$$\tau_e = \frac{3P}{2\omega}\frac{1}{\omega L_d}VE_0\sin\delta + \frac{3P}{4\omega}\left(\frac{1}{\omega L_q} - \frac{1}{\omega L_d}\right)V^2\sin 2\delta \tag{a5-68}$$

となる。(a5-68)は古くから教科書に書かれている式であり，負荷角を使った式である。(a5-68)右辺第 2 項をリラクタンストルクと従来呼んでおり，(a5-67)と全く違うので注意する必要がある[(52)]。ただ，トルクは電流と磁束で求まり，しかも(a5-68)が定常状態の抵抗を無視した式であることを考えると，(a5-67)をリラクタンストルクと定義することが妥当だろう。

過渡空間ベクトル図

物理的な考察をする場合には，ベクトル図は有用な道具である。ここでは，過渡状態でも使える空間ベクトル図を導出しよう。

まず，過渡状態での空間ベクトル図を導出する。電流の空間ベクトルを *d-q* 軸に分解して

$$\dot{i}_s = \dot{i}_{dq}\, e^{j\theta_r} \tag{a5-69}$$

とおく。これを用いて

$$\dot{\psi}_s = L_1\dot{i}_s - L_2 e^{j2\theta_r}\dot{i}_s^{\,*} + \psi e^{j\theta_r}$$

$$= L_1 e^{j\theta_r}\dot{i}_{dq} - L_2 e^{j\theta_r}\dot{i}_{dq}^{\,*} + \psi e^{j\theta_r}$$

$$= (L_d\, i_d + \psi + j\, L_q\, i_q) e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-70)}$$

となる。$2\theta_r$ の項が消える点が面白い。電圧方程式は

$$\dot{v}_s = R_s\dot{i}_s + j\omega_r\psi e^{j\theta_r} + (-\omega_r\, L_q\, i_q + L_d\,(pi_d))e^{j\theta_r} + j(\omega_r L_d\, i_d + L_q\,(pi_q))e^{j\theta_r} \qquad \text{(a5-71)}$$

以上により，図 a5-9 の空間ベクトル図が得られる。鎖交磁束については d-q 成分を導入しなくても図のように空間ベクトルが書ける。発生トルクについては，

$$\tau_e = \frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}_s^*\dot{i}_s) = \frac{P}{2}\left|\dot{\psi}_s\right|\left|\dot{i}_s\right|\sin(\theta_i - \theta_\psi) \qquad \text{(a5-72)}$$

で求まる。$\theta_i - \theta_\psi$ は $\dot{i}_s$ の偏角と $\dot{\psi}_s$ の偏角の差である。このように突極機の過渡状態でもフレミングの左手の法則によりトルクが捉えられる。L_1 については，電流と同方向であるからトルクに寄与しないが，L_2 の項はリラクタンストルクを発生する。

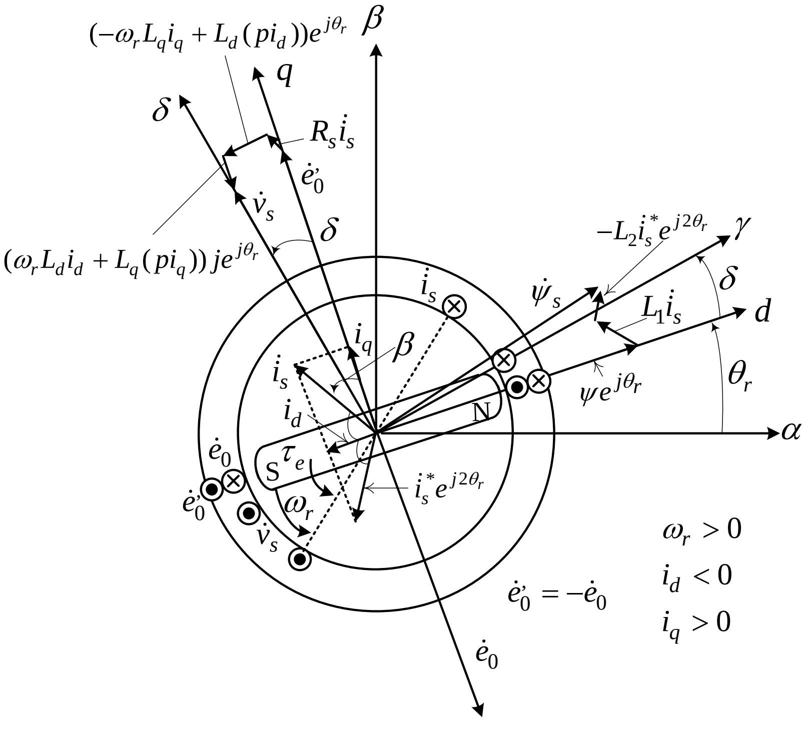


図 a5-9　過渡状態の空間ベクトル図（突極機；電動機動作）

定常空間ベクトル図（フェーザ図）

定常状態では，$\omega = \omega_r$（一定）であるから，図 a5-3 の角度 θ は，

$$\theta = \theta_r + \delta = \omega t + \delta + \theta_{r0} \qquad \text{(a5-73)}$$

である。ここで，θ_{r0} は $t=0$ での磁極位置である。

(a5-1)に代入して

$$v_a = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} + \frac{\pi}{2})$$

$$v_b = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}) \tag{a5-74}$$

$$v_c = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \delta + \theta_{r0} + \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2})$$

となる。

v_a のフェーザ $\dot{V}_a$ を（ここでは，cos に対し，フェーザを定義する）

$$\dot{V}_a = Ve^{j(\delta+\theta_{r0}+\frac{\pi}{2})} \tag{a5-75}$$

とする。フェーザを用いると定常時の空間ベクトルは

$$\dot{v}_s = \sqrt{3}\dot{V}_a e^{j\omega t} \tag{a5-76}$$

である。

一方，

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} \tag{a5-77}$$

であるから，(a5-60)，(a5-61)より

$$v_a = \sqrt{\frac{2}{3}}((R_s i_d - \omega L_q i_q)\cos\theta_r - (R_s i_q + \omega L_d i_d + \omega\psi)\sin\theta_r) \tag{a5-78}$$

であるから，(a5-40)よりフェーザ表示して

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a &= \frac{1}{\sqrt{3}}((R_s i_d - \omega L_q i_q)e^{j\theta_{r0}} + (R_s i_q + \omega L_d i_d + \omega\psi)je^{j\theta_{r0}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(R_s(i_d + ji_q)e^{j\theta_{r0}} - \omega L_q i_q e^{j\theta_{r0}} + \omega L_d i_d je^{j\theta_{r0}} + \omega\psi je^{j\theta_{r0}}) \\
&= R_s(\dot{I}_d + \dot{I}_q) + j\omega L_q \dot{I}_q + j\omega L_d \dot{I}_d + \dot{E}_0
\end{aligned} \tag{a5-79}$$

となる。ここで，

$$\dot{I}_d \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}i_d e^{j\theta_{r0}},\ \dot{I}_q \equiv j\frac{1}{\sqrt{3}}i_q e^{j\theta_{r0}},\ \dot{E}_0 \equiv j\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\psi e^{j\theta_{r0}} \tag{a5-80}$$

また，(a5-77)より

$$i_a = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_d \cos\theta_r - i_q \sin\theta_r) \tag{a5-81}$$

だから，フェーザ表示して次式が成り立つ。

$$\dot{I}_a = \dot{I}_d + \dot{I}_q \tag{a5-82}$$

(a5-79), (a5-82)は図 a5-10 に示す定常状態の $t = 0$ の空間ベクトル図と一致する。ただし，フェーザ図の場合には大きさが空間ベクトルの $1/\sqrt{3}$ になる。また空間ベクトルと違って回転しない。

$$\dot{v}_s = R_s(\dot{i}_d + \dot{i}_q) + j\omega_r L_q \dot{i}_q + j\omega_r L_d \dot{i}_d + \dot{e}_o'$$

ただし，$\dot{i}_s = \dot{i}_d + \dot{i}_q$, $\dot{i}_d \equiv i_d e^{j\theta_r}$, $\dot{i}_q \equiv j i_q e^{j\theta_r}$, $\dot{e}_o' \equiv j\omega_r \psi e^{j\theta_r}$

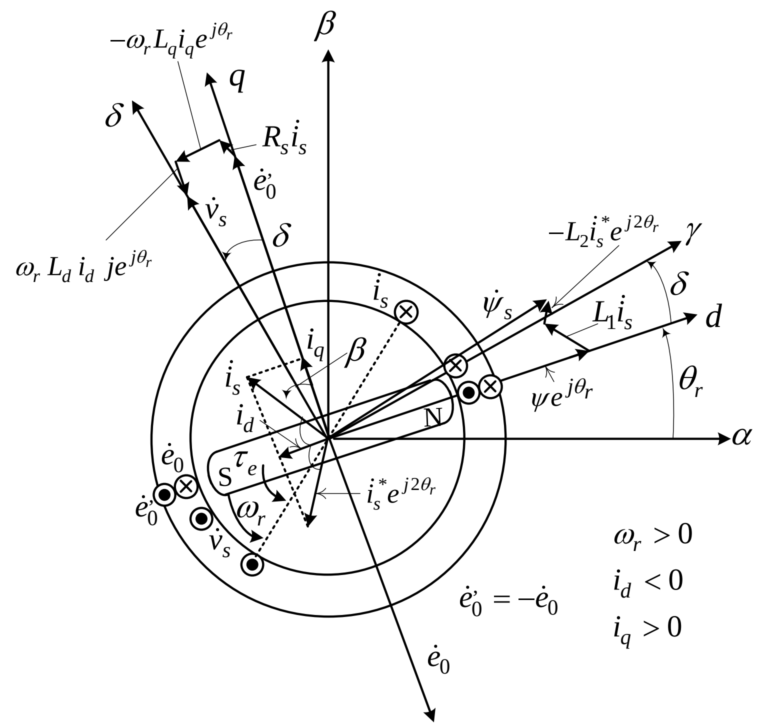


図 a5-10　定常状態の空間ベクトル図（突極性考慮）

図 a5-10 及び(a5-70)より，中高速運転で固定子抵抗が無視できるとき，$\dot{\psi}_s$ は γ 軸に一致する。すなわち，d 軸と $\dot{\psi}_s$ の成す角が負荷角に一致する。

付録６　同期機のインダクタンスとトルク

同期機の電圧，電流，トルクの時間的変化は Park の式を基に計算できた。しかし，Park の式を導く際に使用したインダクタンスについては不明のままであった。また，モータの巻線，磁束密度など空間的分布についてはあまり議論していなかった。さらにトルクがどのように計算できるかも示していなかった。ここでは以上のことを詳しく述べよう。この際，巻線の巻き方が問題になるが，話を単純化するため正弦波の絶対値の数に従って巻かれている**正弦波分布巻線**を考える。詳しく論じた文献は意外に少ないので本稿は貴重なものとなるだろう。空間ベクトルの物理的意味を考える上で役立つ**物理空間モデル**を定義している。磁束についてはこの定義は既になされていたが，電流密度分布などに拡張している。

○ 磁束密度の計算

固定子 a 相巻線に電流 i_a を流したとき，a 相巻線の鎖交磁束 ψ_{aa} を求めることで，自己インダクタンス L_{aa} が求まる。まず，i_a によるエアギャップの磁束密度を求める。図 a6-1 の同期機で，各相の巻線（巻数 N_s ）は正弦波の絶対値に相当する数が図 a6-2 のように巻かれているとする。従って，巻数分布は，$(N_s/P)|\sin\theta|$ で表わせる。角度 θ, α, θ_r は電気角で，P は極数である。全巻数は

$$\frac{P}{2}\int_0^{\pi}\frac{N_s}{P}\sin\theta\, d\theta = N_s \qquad \text{(a6-1)}$$

と確かめられる。図 a6-2(b)では，極数が 4 で，NS の 1 組に対して $N_s/2$ 回巻かれ，全体で N_s 回となる。

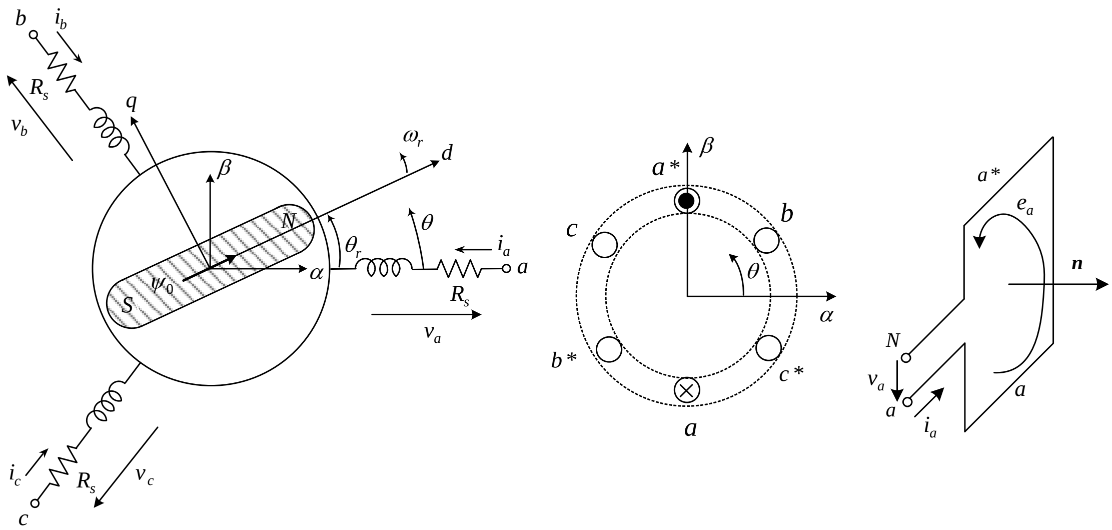
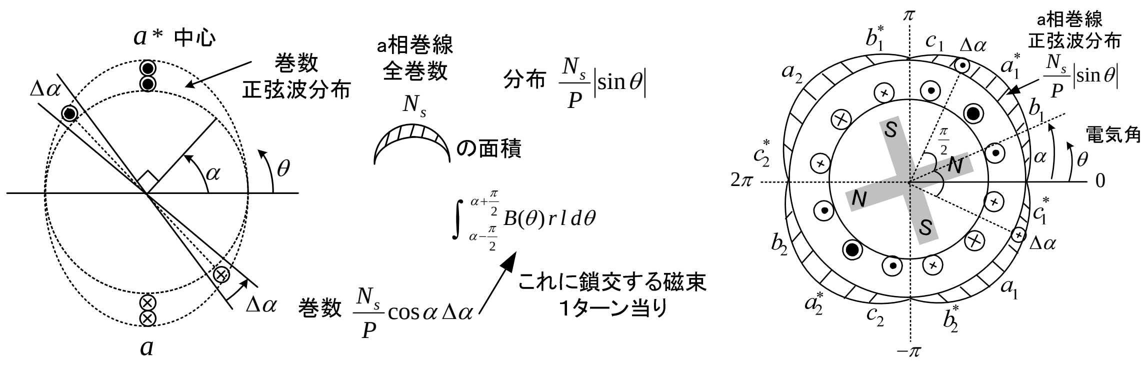


図 a6-1　同期機のモデル（2 極）



(a) 2 極 $P=2$ (b) 4 極 $P=4$

図 a6-2 **正弦波分布巻線**(sinusoidal distribution winding)[18]（断面図）

図 a6-2 で $\Delta\alpha$ 部分の巻数は $\theta=\alpha+\pi/2$ として，$\frac{N_s}{P}\left|\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\right|\Delta\alpha=\frac{N_s}{P}|\cos\alpha|\Delta\alpha$ より求まる。

$$\frac{P}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\,d\alpha=N_s \tag{a6-2}$$

である。この積分範囲の式を後で利用する。

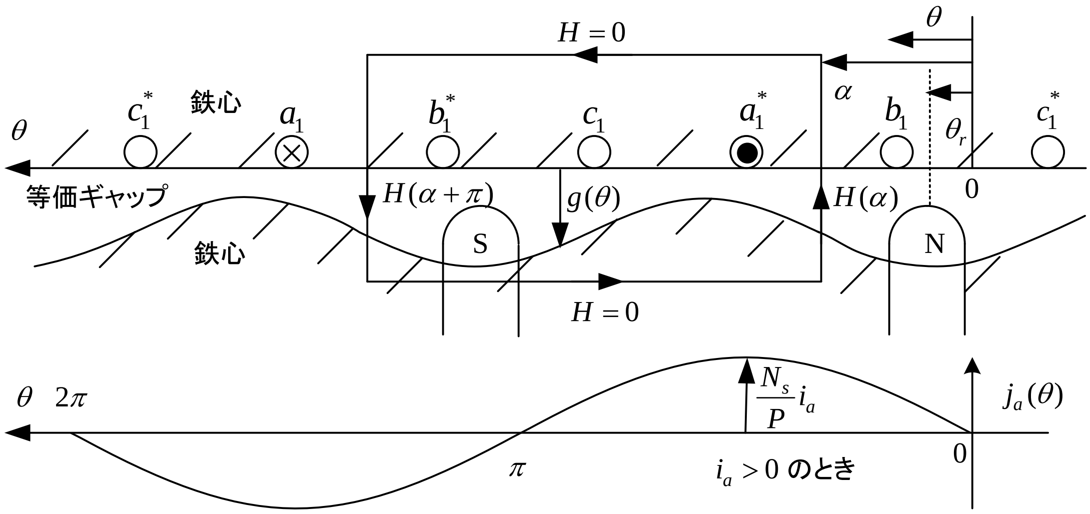


図 a6-3 アンペアの周回積分の法則

図 a6-3 に示すように，a 相巻線に電流 i_a を流したとき，巻線が図 a6-2 の様に正弦波状(sinusoidal distribution of a phase winding)に分布していると**電流密度分布** $j_a(\theta)$ (distribution of current density)[25]は次式で与えられる。a 相巻線はどこも同じ i_a が流れ，巻数が大きいところ程電流分布が大きくなる。b, c 相も同様。θ は電気角である。

$$j_a(\theta)=\frac{N_s\,i_a}{P}\sin\theta\,,\ \ j_b(\theta)=\frac{N_s\,i_b}{P}\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})\ \ ,\ \ j_c(\theta)=\frac{N_s\,i_c}{P}\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}) \tag{a6-3}$$

$j_a(\theta)$ は単位電気角当りの電流で，電気角で積分すれば全電流が求まる。

(参考) 電流密度として，単位を A/m （円周 1m 当り）を j_m [A/m] とすると

$$j_a\, d\theta = j_m r\frac{2}{P}\, d\theta \quad \text{なので，} \quad j_a = j_m r\frac{2}{P} \tag{a6-4}$$

文献（32）では，この電流密度 j_m が用いられトルクが計算されている。

ギャップ長は回転子位置の複雑な関数であり，永久磁石は空気と考えてよい。このため永久磁石同期機では, 磁極軸（d軸）の方が等価的にギャップ長は長いと考えられる。ギャップ長 $g(\theta)$ を次式で近似する（あとでギャップ長の逆数をとるので，この表現が便利である）[19]。

$$g(\theta) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta - \theta_r)} \tag{a6-5}$$

$\theta = \theta_r,\ \theta = \theta_r + \pi$ でギャップ長は最大となり， $\theta = \theta_r + \frac{\pi}{2},\ \theta = \theta_r + \frac{3}{2}\pi$ で最小となる。

$$g_{\max} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2},\quad g_{\min} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0 \tag{a6-6}$$

非突極では， $\alpha_2 = 0$ である。逆に

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_{\max}} + \frac{1}{g_{\min}}\right),\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_{\min}} - \frac{1}{g_{\max}}\right) \tag{a6-7}$$

鉄心中の透磁率を無限大とすれば，鉄心中では**磁界の強さ** H は 0 となる。ギャップ中の磁界は垂直方向成分のみと仮定し，図 a6-3 の積分路に関し**アンペアの周回積分の法則**(Ampere’s law) を適用すると次式を得る。右辺は積分路内の全電流である。

$$H(\alpha)g(\alpha) - H(\alpha+\pi)g(\alpha+\pi) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} j_a(\theta)\, d\theta \tag{a6-8}$$

対称性より（回転子側から固定子側向きが H の正の向きとする） $H(\alpha+\pi) = -H(\alpha)$, $g(\alpha+\pi) = g(\alpha)$ より

$$H(\alpha) = \frac{1}{2g(\alpha)}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} j_a(\theta)\, d\theta = \frac{N_s i_a}{P\, g(\alpha)}\cos\alpha \tag{a6-9}$$

よって，**磁束密度**は次式で求められる。

$$B_a(\alpha) = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N_s i_a}{P\, g(\alpha)}\cos\alpha \tag{a6-10}$$

i_a による α 地点における**起磁力**(magnetomotive force (MMF))[19] $F_a(\alpha)$ は次式で与えられる。

$$F_a(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} j_a(\theta)\, d\theta = \frac{N_s i_a}{P}\cos\alpha \tag{a6-11}$$

巻線係数 k_w を用いた起磁力は，次式となることがわかっている[6]。

$$F_a(\alpha) = \frac{4 k_w N_s i_a}{\pi P}\cos\alpha \tag{a6-12}$$

本稿で考えている**正弦波分布巻線**では，巻線係数は次式[16]で与えられ, (a6-11)が得られる。

$$k_w = \frac{\pi}{4} \tag{a6-13}$$

$i_b,\ i_c$ による起磁力は次式となる。

$$F_b(\alpha) = \frac{N_s i_b}{P}\cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) \tag{a6-14}$$

$$F_c(\alpha)=\frac{N_s i_c}{P}\cos(\alpha+\frac{2}{3}\pi) \tag{a6-15}$$

起磁力を用いると

$$B_a(\alpha)=\frac{\mu_0}{g(\alpha)}F_a(\alpha),\quad B_b(\alpha)=\frac{\mu_0}{g(\alpha)}F_b(\alpha),\quad B_c(\alpha)=\frac{\mu_0}{g(\alpha)}F_c(\alpha) \tag{a6-16}$$

より磁束密度が求まる。(a6-3)と(a6-11)を比べると，電流分布と起磁力分布は電気角で$\pi/2$の差がある。電磁気学では起磁力を単純に巻数×電流と考える教科書が多い。しかし，電気機器では起磁力の空間分布が考えられ，これはエアギャップで消費される起磁力として考えられている[16]。すなわち，(a6-8)の左辺の各項で，磁界の強さ×磁路長を起磁力という。(a6-11)では，磁界が図 a6-3 の様に 2 回エアギャップ中を通るので集めた電流の 1/2 になっている。

(a6-5)を(a6-10)に代入して，i_aによる角度α点でのエアギャップの磁束密度は

$$B_a(\alpha)=\frac{\mu_0 N_s i_a}{P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\alpha-\theta_r))\cos\alpha$$

$$=\frac{\mu_0 N_s i_a}{P}\{\alpha_1\cos\alpha-\frac{\alpha_2}{2}(\cos(3\alpha-2\theta_r)+\cos(\alpha-2\theta_r))\} \tag{a6-17}$$

b 相電流と c 相電流による磁束密度は起磁力の分布が変わるだけなのでそれぞれ次式となる。

$$B_b(\alpha)=\frac{\mu_0 N_s i_b}{P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\alpha-\theta_r))\cos(\alpha-\frac{2\pi}{3}) \tag{a6-18}$$

$$B_c(\alpha)=\frac{\mu_0 N_s i_c}{P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\alpha-\theta_r))\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3}) \tag{a6-19}$$

本稿の理論展開では電流密度分布を用いるので，起磁力を用いなくてもよいが，一般の電気機器の教科書では起磁力を基に理論が展開されているので，起磁力についても説明を加えた。

○ インダクタンスの計算

図 a6-2 の$\Delta\alpha$の部分の巻線について 1 ターン当り鎖交する磁束$\phi_a(\alpha)$は，磁束密度を$B_a(\theta)$，回転子の半径をr，鉄心の奥行き有効長をlとすると，

$$\phi_a(\alpha)=\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}B_a(\theta)\,r\,l\frac{2}{P}d\theta \tag{a6-20}$$

である（図 a6-4 参照）。角度θは電気角であるが，磁束を求める場合には面積を掛けるので実際の周の長さすなわち機械角$(2/P)d\theta$を使う必要がある。a 相巻線だけに電流を流した時の鎖交磁束ψ_{aa}は，$\Delta\alpha$の部分の巻数を掛けて，a 相の全巻線分を集めることで求められる。l_sは漏れインダクタンスである。

$$\psi_{aa}=\frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\ \phi_a(\alpha)\,d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}B_a(\theta)\,r\,l\frac{2}{P}d\theta\ d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{N_s^2 r l\mu_0 i_a}{P^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\cos\theta(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\theta-\theta_r))\,d\theta\ d\alpha+l_s\,i_a$$

$$= \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0 i_a}{P^2}(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}\cos 2\theta_r) + l_s i_a \tag{a6-21}$$

（注） $\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \cos\theta(\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2(\theta-\theta_r))\,d\theta = 2\alpha_1 \cos\alpha + \frac{\alpha_2}{3}\cos(3\alpha - 2\theta_r) - \alpha_2 \cos(\alpha - 2\theta_r)$

最初の積分範囲の $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ は巻数が正になる範囲で NS 一組の巻線を含むようにした。

(a6-21)は文献(19)の(1.5-25)と P=2 のとき一致する。しかし，一般の P に対する（1D-6）とは異なる。 後述の L_1 のチェックから，（1D-6）は誤っているだろう。文献(35)は 2 極しか論じていない。日本の教科書では(a6-21)は見当たらないようである。

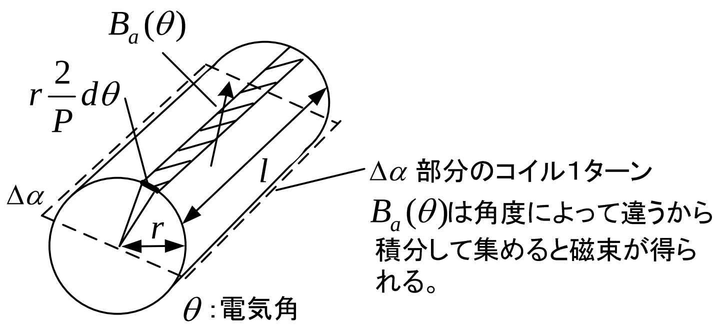


図 a6-4　機械寸法

$\theta_r = 0$ における**直軸インダクタンス**を L_{dd}， $\theta_r = \pi/2$ における**横軸インダクタンス**を L_{qq} とすれば,

$$L_{dd} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2}(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}) + l_s \equiv L_{ddm} + l_s \tag{a6-22}$$

$$L_{qq} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2}(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}) + l_s \equiv L_{qqm} + l_s \tag{a6-23}$$

以上により， $\psi_{aa} = L_a i_a$ より

$$L_a = l_s + L_0 - L_m \cos 2\theta_r \tag{a6-24}$$

但し， $L_0 = \frac{L_{ddm} + L_{qqm}}{2} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2}\alpha_1$ (a6-25)

$$L_m = \frac{L_{qqm} - L_{ddm}}{2} = \frac{N_s^2 \pi r l \mu_0}{P^2}\frac{\alpha_2}{2} \tag{a6-26}$$

(a5-29)より $L_1 = l_s + \frac{3L_0}{2}$， $L_2 = \frac{3}{2}L_m$ (a6-27)

(a5-36)より $L_d = L_1 - L_2 = \frac{3}{2}L_{ddm} + l_s$ ， $L_q = L_1 + L_2 = \frac{3}{2}L_{qqm} + l_s$ (a6-28)

b 相については， θ_r が $2\pi/3$ で，c 相については， θ_r が $4\pi/3$ で，a 相の $\theta_r = 0$ 対応するので

$$L_b = l_s + L_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{2}{3}\pi)) = l_s + L_0 - L_m \cos(2\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \tag{a6-29}$$

$$L_c = l_s + L_0 - L_m \cos(2(\theta_r - \frac{4}{3}\pi)) = l_s + L_0 - L_m \cos(2\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \tag{a6-30}$$

a 相巻線にのみ電流を流したとき，b 相巻線の鎖交磁束ψ_{ba}は巻線の空間分布が異なるだけなので，次式により求まる。

$$\psi_{ba}=\frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos(\alpha-\frac{2}{3}\pi)\ \phi_a(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{N_s^2 r\,l\mu_0 i_a}{P^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\alpha-\frac{2}{3}\pi)\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\theta-\theta_r))\,d\theta\ d\alpha$$

$$=\frac{N_s^2\,\pi\,rl\mu_0 i_a}{P^2}(-\frac{\alpha_1}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi)) \tag{a6-31}$$

よって， $\psi_{ba}=M_{ab}\,i_a$ より

$$M_{ab}=-M_0-L_m\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi) \tag{a6-32}$$

ただし，

$$M_0=L_0/2 \tag{a6-33}$$

同様に考えて，

$$M_{bc}=-M_0-L_m\cos(2(\theta_r-\frac{2}{3}\pi)-\frac{2}{3}\pi)=-M_0-L_m\cos 2\theta_r \tag{a6-34}$$

$$M_{ca}=-M_0-L_m\cos(2(\theta_r-\frac{4}{3}\pi)-\frac{2}{3}\pi)=-M_0-L_m\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi) \tag{a6-35}$$

○ 電流による鎖交磁束

3 相電流

$$i_a=I(t)\cos\theta_i(t)\ ,\qquad i_b=I(t)\cos(\theta_i(t)-\frac{2}{3}\pi)\quad ,\quad i_c=I(t)\cos(\theta_i(t)+\frac{2}{3}\pi) \tag{a6-36}$$

が流れた場合の a 相巻線の鎖交磁束ψ_aを求めよう。(a6-36)は(a5-21)などより**過渡状態でも成立**する。(a5-2)より

$$\psi_a=L_a\,i_a+M_{ab}\,i_b+M_{ca}\,i_c$$

$$=(l_s+L_0-L_m\cos 2\theta_r)I(t)\cos\theta_i\ +(-M_0-L_m\cos(2\theta_r-\frac{2}{3}\pi))\,I(t)\cos(\theta_i-\frac{2}{3}\pi)$$

$$+(-M_0-L_m\cos(2\theta_r+\frac{2}{3}\pi))I(t)\cos(\theta_i+\frac{2}{3}\pi)$$

$$=l_s\,I(t)\cos\theta_i+\frac{3}{2}L_0\,I(t)\cos\theta_i-\frac{3}{2}L_m I(t)\cos(2\theta_r-\theta_i) \tag{a6-37}$$

定常状態では同期速度で回転するので，$\theta_r-\theta_i$は一定で, 高調波成分は生じないと考えられる。(a6-37)は，界磁成分を除いた 3 相電流による磁束密度を求め，それを積分することでも求められる。以下これを示す。

(a6-36)を(a6-16)に代入して加えると,

$$B_{abc}(\alpha)=B_a(\alpha)+B_b(\alpha)+B_c(\alpha)=\frac{\mu_0}{g(\alpha)}(F_a+F_b+F_c)$$

$$=\frac{\mu_0}{g(\alpha)}\frac{N_s}{P}(i_a\cos\alpha+i_b\cos(\alpha-\frac{2}{3}\pi)+i_c\cos(\alpha+\frac{2}{3}\pi))$$

$$=\frac{\mu_0 N_s}{P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\alpha-\theta_r))\frac{3}{2}I(t)\cos(\theta_i-\alpha)$$

$$=\frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P}\{\alpha_1\cos(\theta_i-\alpha)-\frac{\alpha_2}{2}(\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i)+\cos(3\alpha-2\theta_r-\theta_i))\} \qquad \text{(a6-38)}$$

ある瞬間の空間の磁束密度は，α 以外を定数と考えると，磁束密度に **3 倍調波の成分**が生じることが判る(5)。$\cos(\theta_i-\alpha)$ の項は電流の位相と等しい位置の磁束密度が最大となることを意味し，**回転磁界**を意味する。次式の $B_a(\alpha)$ だけでは，**交番磁界**で正相分と逆相分の和である。

$$B_a(\alpha)=\frac{\mu_0 N_s I(t)}{2P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\alpha-\theta_r))(\cos(\theta_i+\alpha)+\cos(\theta_i-\alpha)) \qquad \text{(a6-39)}$$

鎖交磁束は

$$\psi_a=\frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}B_{abc}(\theta)\,r\,l\frac{2}{P}d\theta\,d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 N_s}{P}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\theta-\theta_r))r\,l\frac{3}{2}I(t)\cos(\theta_i-\theta)\,\frac{2}{P}d\theta\,d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{N_s^2\mu_0\,r\,l}{P^2}\frac{3}{2}I(t)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}(\alpha_1-\alpha_2\cos 2(\theta-\theta_r))\cos(\theta_i-\theta)\,d\theta\,d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{N_s^2\mu_0\,r\,l}{P^2}\frac{3}{2}I(t)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\{2\alpha_1\cos(\theta_i-\alpha)-\alpha_2\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i)+\frac{\alpha_2}{3}\cos(3\alpha-2\theta_r-\theta_i)\}d\alpha+l_s\,i_a$$

$$=\frac{N_s^2\mu_0\,r\,l}{P^2}\frac{3}{2}I(t)\{\pi\alpha_1\cos\theta_i-\pi\frac{\alpha_2}{2}\cos(2\theta_r-\theta_i)\}\;+l_s\,i_a$$

$$=l_s\,I(t)\cos\theta_i+\frac{3}{2}L_0 I(t)\cos\theta_i-\frac{3}{2}L_m I(t)\cos(2\theta_r-\theta_i) \qquad \text{(a6-40)}$$

これは(a6-37)に一致している。上式 3 行目の積分で，巻線の正弦波分布があるので3α 部分の積分が 0 となっている。(a6-40)は過渡状態でも成り立つが，他の文献で見当たらない。(a6-36)の表現が一般性を有することがあまり知られていないためと思われる。

○ トルクの式

3 相分を考えた電流の空間分布は(a6-3)，(a6-36)より次式で表せる。

$$j_{abc}(\alpha)=j_a(\alpha)+j_b(\alpha)+j_c(\alpha)=\frac{N_s\,i_a}{P}\sin\alpha+\frac{N_s\,i_b}{P}\sin(\alpha-\frac{2\pi}{3})+\frac{N_s\,i_c}{P}\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})$$

$$=\frac{N_s}{P}\frac{3}{2}I(t)\sin(\alpha-\theta_i) \qquad \text{(a6-41)}$$

電流の空間ベクトルに関しては，(a6-36)を用いると

$$\dot{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c) = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3}{2} I(t) e^{j\theta_i} = \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) e^{j\theta_i} \tag{a6-42}$$

となる。

磁束密度の空間分布は，(a6-38)に永久磁石の磁束密度を加えて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_{abc}(\alpha) &= B_a + B_b + B_c + B_0\cos(\alpha-\theta_r) \\ &= \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P}\{\alpha_1\cos(\theta_i-\alpha) - \frac{\alpha_2}{2}(\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i)+\cos(3\alpha-2\theta_r-\theta_i))\} \\ &\quad + B_0\cos(\alpha-\theta_r) \end{aligned} \tag{a6-43}$$

磁極に働くトルクは電流に働く力の反作用だから，フレミングの左手の法則より(a6-41)，(a6-43)を用いて次式で計算できる。最初のマイナスはトルクが電流に働く力と逆向きだからである。電流密度分布の単位は[A/rad]としているので角度を掛けるだけで電流となる（r の掛け算不要）。最初の $P/2$ は，0〜2π まで電気角で積分されているから，全体にわたり集める。

$$\tau_e = -r\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} j_{abc}(\alpha)B_{abc}(\alpha)\, l\, d\alpha \qquad \text{トルク＝半径×力}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{P}{2}\int_0^{2\pi}\frac{N_s}{P}\frac{3}{2}I(t)\sin(\alpha-\theta_i)\, l\, r[\frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P}\{\alpha_1\cos(\theta_i-\alpha) \\ &\qquad -\frac{\alpha_2}{2}(\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i)+\cos(3\alpha-2\theta_r-\theta_i))\} + B_0\cos(\alpha-\theta_r)]d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{2}\frac{9\mu_0 N_s^2 I^2(t)\alpha_2\, l\, r}{8P^2}\int_0^{2\pi}\sin(\alpha-\theta_i)\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i)d\alpha \\ &\quad -\frac{P}{2}\frac{3N_s I(t)B_0\, l\, r}{2P}\int_0^{2\pi}\sin(\alpha-\theta_i)\cos(\alpha-\theta_r)d\alpha \end{aligned}$$

$$= -\frac{P}{2}\frac{9\mu_0 N_s^2\alpha_2\, l\, r\pi}{8P^2}I^2(t)\sin 2(\theta_i-\theta_r) + \frac{P}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{N_s B_0\, l\, r\pi}{P}\sqrt{\frac{3}{2}}I(t)\sin(\theta_i-\theta_r)$$

$$= \frac{P}{2}\{-\frac{3}{2}L_2 I^2(t)\sin 2(\theta_i-\theta_r) + \psi\sqrt{\frac{3}{2}}I(t)\sin(\theta_i-\theta_r)\} \qquad \text{(a6-47)より}$$

$$= \frac{P}{2}\mathrm{Im}(-L_2 e^{-j2\theta_r}\dot{i}_s\dot{i}_s + \psi e^{-j\theta_r}\dot{i}_s) \qquad \text{(a6-42)より}$$

$$= \frac{P}{2}\mathrm{Im}(\dot{\psi}_s^*\dot{i}_s) \qquad \text{(a5-30)より} \tag{a6-44}$$

トルクは非常に簡単な式になる。磁束密度の 3 倍調波の成分はトルクに現れない。

ここで，(a6-44)の導出で用いた ψ について説明する。永久磁石だけを考えて

$$\psi_a = \frac{P}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N_s}{P}\cos\alpha\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} B_0\cos(\theta-\theta_r)\, r\, l\frac{2}{P}d\theta\, d\alpha$$

$$= \frac{N_s B_0 rl}{P}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\left[\cos(\theta-\theta_r)\right]_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{2N_s B_0 rl}{P}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\cos(\alpha-\theta_r)\, d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{P}N_s B_0 rl\cos\theta_r \tag{a6-45}$$

従って，同期機の２軸理論で定義した(a4-2) ，(a4-29)より

$$\psi_0 = \frac{\pi}{P} N_s B_0 rl \tag{a6-46}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{P} N_s B_0 rl \tag{a6-47}$$

となる。

○ 物理空間ベクトル

磁束線はモータのエアギャップにおける磁束密度分布を表すので，空間に実際に生じている。**起磁力**は，エアギャップの各部分で消費される起磁力を考えると空間に分布している。一方，モータの巻線は空間に分布しているので，巻線の電流，電圧及び起電力も空間と結びつけて考えられよう[51]。一般には，空間の角度α（電気角）をもつ関数

$$F_x(\alpha) = F_m(t)\cos(\alpha - \theta_x(t)) \qquad F_m(t) > 0 \tag{a6-48}$$

が与えられるとき，**物理空間ベクトル**(physical space vector)を次式で定義する[57]。

$$\dot{F}_x = F_m(t)\, e^{j\theta_x(t)} \tag{a6-49}$$

$\alpha = \theta_x(t)$ の部分で $F_x(\alpha)$ は最大となる。

逆に，

$$F_x(\alpha) = \mathrm{Re}(\dot{F}_x e^{-j\alpha}) \tag{a6-50}$$

である。物理空間ベクトルは筆者が名付けたもので，一般に使われているわけではない。

3 相分を考えた電流の空間分布は(a6-3)，(a6-36)より

$$j_{abc}(\alpha) = \frac{N_s\, i_a}{P}\sin\alpha + \frac{N_s\, i_b}{P}\sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \frac{N_s\, i_c}{P}\sin(\alpha + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t)\sin(\alpha - \theta_i) = \frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t)\cos(\alpha - \theta_i - \frac{\pi}{2}) \tag{a6-51}$$

これから電流の**物理空間ベクトル**は次式で表わせる。

$$\dot{j}_{abc} = \frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t) e^{j(\theta_i + \frac{\pi}{2})} = j\frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t) e^{j\theta_i} = j\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{N_s}{P}\dot{i}_s \tag{a6-52}$$

(a6-42)の電流密度の空間ベクトル$\dot{i}_s$より 90 度角度が進んでいる。

起磁力は(a6-11) , (a6-14), (a6-15) , (a6-36)より次式となる。

$$F_s(\alpha,t) = F_a(\alpha,t) + F_b(\alpha,t) + F_c(\alpha,t) = \frac{3N_s}{2P} I(t)\cos(\alpha - \theta_i(t)) \tag{a6-53}$$

これの物理空間ベクトル表示は

$$\dot{F}_s(t) = \frac{3N_s}{2P} I(t)\, e^{j\theta_i} = \frac{3N_s}{2P}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\dot{i}_s \tag{a6-54}$$

となる。このように 3 相分を合成した起磁力の物理空間ベクトルは電流の空間ベクトルと比例関係にある。

磁束密度の空間分布は，第 3 調波成分を含み，物理空間ベクトルに表わすことができない。しかし，正弦波巻線分布を考えているので，第 3 調波成分が鎖交磁束（従って誘起電圧，電流）

やトルクに及ぼす影響はない。従って，第 3 調波を無視した次式を定義する。

$$B_{eabc}(\alpha) = B_a + B_b + B_c + B_0\cos(\alpha-\theta_r)$$
$$= \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P}\{\alpha_1\cos(\alpha-\theta_i) - \frac{\alpha_2}{2}(\cos(\alpha-2\theta_r+\theta_i))\} + B_0\cos(\alpha-\theta_r) \qquad \text{(a6-55)}$$

この物理空間ベクトルは，ある瞬間に磁束密度の空間分布が正弦波となることから

$$\dot{B}_{eabc} = \frac{3\mu_0 N_s I(t)}{2P}\{\alpha_1 e^{j\theta_i} - \frac{\alpha_2}{2}e^{j(2\theta_r-\theta_i)}\} + B_0 e^{j\theta_r} \qquad \text{(a6-56)}$$

となる。

(a6-55)と (a4-30)で求めた次式の鎖交磁束の空間ベクトル $\dot{\psi}_s$ の関係を求めよう。

$$\dot{\psi}_s = L_1\dot{i}_s - L_2 e^{j2\theta_r}\dot{i}_s^* + \psi e^{j\theta_r}$$

ここで， $L_1 = l_s + \frac{3L_0}{2} = l_s + \frac{3N_s^2\pi r l\mu_0}{2P^2}\alpha_1$ ， $L_2 = \frac{3N_s^2\pi r l\mu_0\alpha_2}{4P^2}$

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{P}N_s B_0 r l$$

(a6-56)に，電流の空間ベクトルを代入して

$$\dot{B}_{eabc} = \frac{3\mu_0 N_s}{2P}\sqrt{\frac{2}{3}}\{\alpha_1\dot{i}_s - \frac{\alpha_2}{2}e^{j2\theta_r}\dot{i}_s^*\} + B_0 e^{j\theta_r} \qquad \text{(a6-57)}$$

よって $\dot{\psi}_s$ と $\dot{B}_{eabc}$ は以下の関係にある。

$$\dot{\psi}_s = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\pi r l N_s}{P}\dot{B}_{eabc} + l_s\dot{i}_s \qquad \text{(a6-58)}$$

従って，**鎖交磁束の空間ベクトル** $\dot{\psi}_s$ は l_s 分を除いた場合に第 3 調波成分を無視した**磁束密度の物理空間ベクトル**の向きと一致する。

物理空間ベクトルを用いると，以下のようにトルクが簡単に求められる。

$$\tau_e = -r\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} j_{abc}(\alpha)B_{abc}(\alpha)\, l\, d\alpha$$

$$= -l\,r\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} J_m\sin(\alpha-\theta_i)\{B_m\cos(\alpha-\theta_b) + B_{3m}\cos(3\alpha-\theta_{3b})\}d\alpha \qquad \text{(a6-41), (a6-43)より}$$

$$= -l\,r\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} J_m\sin(\alpha-\theta_i)\; B_m\cos(\alpha-\theta_b)\,d\alpha$$

$$= -\frac{P}{2}r\,l\,\pi B_m J_m\sin(\theta_b-\theta_i)$$

$$= -\frac{P}{2}r\,l\,\pi\,\mathrm{Re}(\dot{B}_{eabc}^*\dot{j}_{abc}) \qquad \dot{j}_{abc} = jJ_m e^{j\theta_i},\ \dot{B}_{eabc} = B_m e^{j\theta_b} \text{ とおけるから}$$

$$= \frac{P}{2}\mathrm{I_m}(\dot{\psi}_s^*\dot{i}_s) \qquad \text{(a6-59)}$$

何故なら， $\dot{i}_s = \frac{1}{j}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2P}{3N_s}\dot{j}_{abc}$ 　だから，

$$\dot{\psi}_s^* \dot{i}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi r l N_s}{P} \dot{B}_{abc}^* \frac{1}{j} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2P}{3N_s} \dot{j}_{abc} + l_s \dot{i}_s^* \dot{i}_s = -j\pi r l \dot{B}_{eabc}^* \dot{j}_{abc} + l_s \left|\dot{i}_s\right|^2 \quad \text{より}$$

○　空間ベクトルの物理的意味

野中によると“**誘導起電力や電流の空間ベクトルはある瞬時において，誘導起電力や電流が最大となっているコイルの巻線軸方向に右ねじ系にとる**”（以下右ねじ系の考え方と呼ぶ）とされている[7]。このことを過渡状態を含め理論的に考察する。判り易いように式を再掲載して示す。

まず，電流について考える。正弦波の巻線分布を仮定すると，電流分布は(a6-3)より，

$$j_a(\theta) = \frac{N_s i_a}{P} \sin\theta \text{，} j_b(\theta) = \frac{N_s i_b}{P} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \text{，} j_a(\theta) = \frac{N_s i_c}{P} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \qquad ①$$

であった。ここで θ は空間の角度（電気角）である。従って，3 相電流による電流密度の空間分布は次式で与えられる。

$$j_{abc}(\theta) = j_a(\theta) + j_b(\theta) + j_c(\theta) \qquad ②$$

いま, 3 相電流を

$$i_a = I(t)\cos\theta_i(t)\text{，}\quad i_b = I(t)\cos(\theta_i(t) - \frac{2}{3}\pi)\text{，}\quad i_b = I(t)\cos(\theta_i(t) + \frac{2}{3}\pi) \qquad ③$$

とする。これは過渡状態でも成立する（このことは従来あまり明確に述べられていなかったように思う)。これにより，過渡状態でも以下の理論が適用可能となる。③を②に代入して，

$$j_{abc}(\theta) = \frac{N_s I(t)}{P}(\cos\theta_i \sin\theta + \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3})\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta_i + \frac{2\pi}{3})\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}))$$

$$= \frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t)\cos(\theta - \theta_i - \frac{\pi}{2}) \qquad ④$$

よって電流密度分布の**物理空間ベクトル**は次式で表わせる。

$$\dot{j}_{abc} = \frac{N_s}{P}\frac{3}{2} I(t) e^{j(\theta_i + \frac{\pi}{2})} \qquad ⑤$$

一方，③より電流の空間ベクトルは

$$\dot{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c) = \sqrt{\frac{2}{3}} I(t)(\cos\theta_i + \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3})e^{j\frac{2}{3}\pi} + \cos(\theta_i + \frac{2\pi}{3})e^{-j\frac{2}{3}\pi})$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} I(t) e^{j\theta_i} \qquad ⑥$$

電流密度 j_{abc} が最大になる角 θ（物理空間ベクトルの方向）は，④より

$$\theta = \theta_i + \frac{\pi}{2} \qquad ⑦$$

となって，⑥式の電流の空間ベクトルから 90 度角度が進むことが判る。例えば，$\theta_i = 0$ のとき⑥式の空間ベクトルは実軸を向き，③式より $i_a > 0$ で最大となる。⑥式の空間ベクトルと**右ねじ系の考え方**による空間ベクトルが一致するためには，i_a が正で最大であるとき，a^* に⊙印が

ある必要がある。

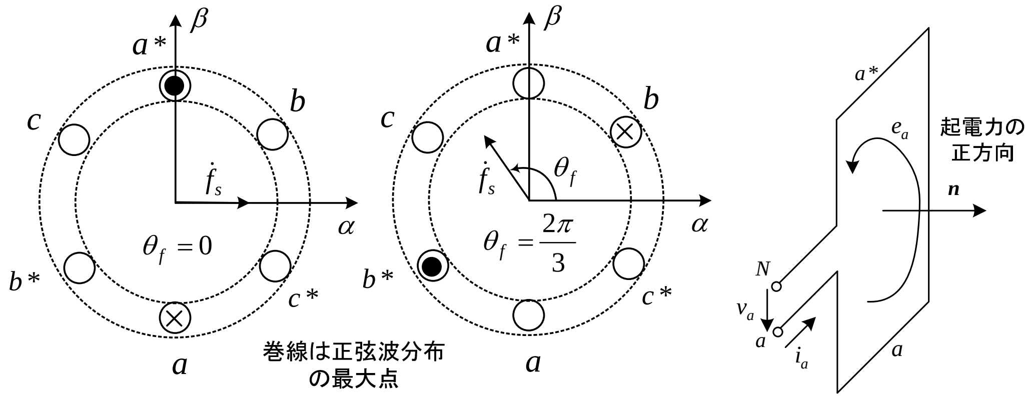


図 a6-5　空間ベクトルの物理的意味

一般の空間ベクトルの定義は

$$\dot{f}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_a + e^{j\frac{2}{3}\pi} f_b + e^{-j\frac{2}{3}\pi} f_c) \qquad ⑧$$

であり，変形して　$\dot{f}_s(t) = F(t)e^{j\theta_f(t)}$　とでき，よって

$$f_a = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos\theta_f(t),\quad f_b = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos(\theta_f(t) - \frac{2\pi}{3}),\quad f_c = \sqrt{2/3}\,F(t)\cos(\theta_f(t) + \frac{2\pi}{3}) \qquad ⑨$$

と表せる。右ねじ系の考え方による空間ベクトルとなるためには，f_a が正で最大であるとき，図の $a*$ に⦿印がある必要がある。つまり回路中に勝手に矢印で定義した a 相の電圧や電流の全てについて，その量が正で最大であるなら，$a*$ に⦿印がある必要がある。例えば，電流 $i_a' = -i_a$ と定義し，定義に従って

$$\dot{i}_s' = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a' + e^{j\frac{2}{3}\pi} i_b' + e^{-j\frac{2}{3}\pi} i_c') \qquad ⑩$$

で空間ベクトルを求めるときも，$i_a' > 0$ で最大のとき，$a*$ に⦿印がある必要がある。しかし，実際には⊗方向に電流が流れているのに表示で⦿なるのは判りにくい。以上のことから，変数を定義する場合にはその値が正で最大になったときに，$a*$ に⦿印があるものがよい。従って，電流は i_a が適する。

端子電圧については，v_a の方向とする。$v_a > 0$ のとき最大となり，$a*$ に⦿印が来ると，その⦿印の方向に電流を流すような端子電圧の方向と考えることができる。起電力については，磁束の向きを定める法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を図 a6-5 の向き（電流と右ねじの関係）に選ぶと起電力 e_a が電流を流す向きにコイル内にできるので実際と一致して適する。起電力 e_a と逆向きに逆起電力 $e_a' = -e_a$ を考える場合には，$e_a' > 0$ のとき，$a*$ に⦿印が来ると，⦿印の方向の電流を妨げるような最大逆起電力がその位置の巻線内に発生していると解釈できる。$a*$ が⊗印になったら定義した量は負で最小値である。$b*, c*$ に⦿印があるとき，それぞれ f_b, f_c が正の最大値で

ある。

図 a5-6 などの空間ベクトル図に示す⊙印や⊗印はこのような意味で書かれている。⊙印の点を物理空間ベクトルが向いている。

○　自己インダクタンス L_1 のチェック

(a6-27)より求まる自己インダクタンス L_1 のチェックを行う。但し，漏れインダクタンスは省いて考える。誘導機も同じである。(a6-25)より

$$L_1 = \frac{3N_s^2\,\pi\, r\, l\,\mu_0}{2P^2}\alpha_1 = \frac{3N_s^2\,\pi\, r\, l\,\mu_0}{2P^2 g} \qquad (\alpha_1 = \frac{1}{g}) \qquad \text{（非突極機）} \qquad ①$$

ここで，g ：ギャップ長

野中の文献(6) の(5.30)式より

$$E_1 = \frac{\omega k_{w1} N_s \Phi}{\sqrt{2}} = \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \tau l B_m = \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \tau l \frac{6\sqrt{2}\mu_0}{\pi g} \frac{k_{w1} N_s}{P} I_1$$

$$= \frac{\omega k_{w1} N_s}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \frac{2\pi r}{P} l \frac{6\sqrt{2}\mu_0}{\pi g} \frac{k_{w1} N_s}{P} I_1 = \omega \left(\frac{k_{w1} N_s}{P}\right)^2 \frac{24 r l \mu_0}{\pi g} I_1 \qquad ②$$

k_{w1} ：巻線係数，$\tau = \dfrac{2\pi r}{P}$ ：磁極ピッチ

故に，
$$L_1 = \left(\frac{k_{w1} N_s}{P}\right)^2 \frac{24 r l \mu_0}{\pi g} \qquad ③$$

$$= \left(\frac{N_s}{P}\right)^2 \frac{3\pi r l \mu_0}{2g} \qquad when,\ k_{w1} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{（①に一致）}$$

これは，森安の文献(32)の(4-10)より得られる値とも一致する。金の文献(51)も $2N_{es1} = k_{w1} N_s$ とすると同じ式が得られる。**巻線係数は分布巻係数と短節巻係数を掛けたもの**である。

巻線係数を使う理論で, $k_{w1} N_s$ の部分を $(\pi/4) N_s$ に置き換えると，正弦波巻線になるので，正弦波巻線で導いた式の N_s を $(4/\pi) k_{w1} N_s$ に置き換えれば，巻線係数を使う理論の式になるはずである。但し，巻線係数は空間高調波ごとに違うので安易に拡張できない。

正弦波巻線には，巻線係数の概念がない。集中巻起磁力の振幅 $(4N_s/\pi P) i_a$ に対して，分布巻や短節巻にして正弦波巻線に近づけると巻数が巻線係数を掛けた $k_{w1} N_s$（実効巻数）に減少し，起磁力の振幅は $(4N_s k_{w1}/\pi P) i_a$ となる。そして，完全に正弦波になれば $k_{w1} = \pi/4$ した値になると考えられる。巻線係数は磁束密度から相ごとの鎖交磁束や起電力を求める場合にも使われる。これは同じ相の巻線でも位置が異なるためである。

巻線係数を使った理論が正弦波巻線より実用的であるが，巻線の巻き方を考慮しないといけない。その理論では，一般に起磁力の空間高調波を無視するので，電流分布は正弦波，よって巻線分布も正弦波と考えていることになる。巻線係数を導入して等価な正弦波巻線を考えるより，まず正弦波巻線で理解した方がスッキリするだろう。

付録７　同期機のセンサレスベクトル制御

○　拡張誘起電圧モデルを利用した位置センサレスベクトル制御

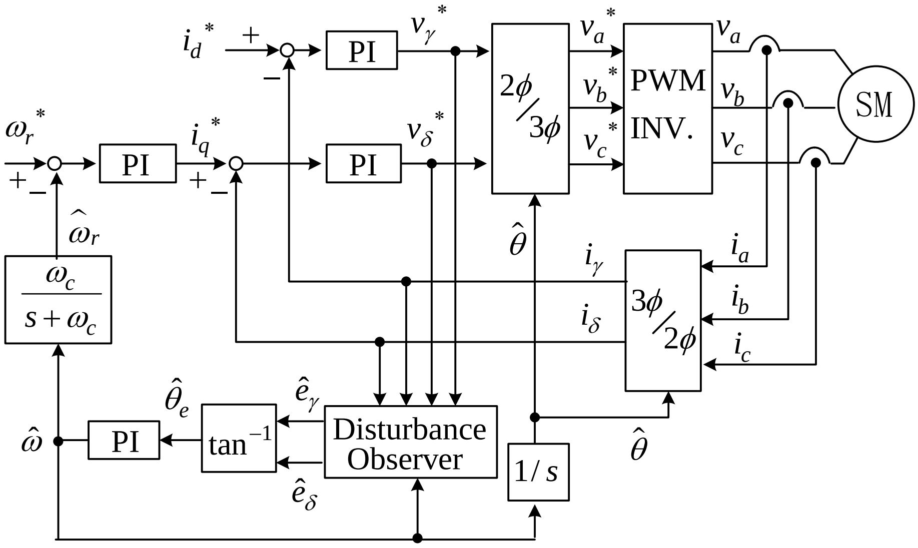


図 a7-1　同期電動機（SM）のセンサレスベクトル制御系

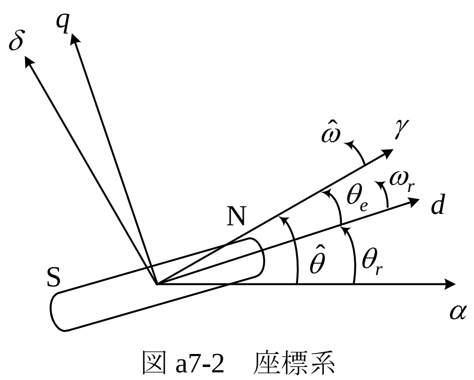


図 a7-2　座標系

多くの位置センサレスベクトル制御法が提案されているが，その中で構成が比較的簡単な**拡張誘起電圧モデル**を利用した位置速度推定法について述べる[(33)(38)(39)]。拡張誘起電圧を用いた同期機の $\gamma-\delta$ 軸モデルは(a4-69)より次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_q & R_s + pL_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\gamma \\ e_\delta \end{bmatrix} \tag{a7-1}$$

ここで，　e_γ, e_δ は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} e_\gamma \\ e_\delta \end{bmatrix} = E_{ex} \begin{bmatrix} \sin\theta_e \\ \cos\theta_e \end{bmatrix} + (\widehat{\omega} - \omega_r) L_d \begin{bmatrix} -i_\delta \\ i_\gamma \end{bmatrix} \tag{a7-2}$$

拡張誘起電圧 E_{ex} は次式で与えられる。

$$E_{ex} = \omega_r \left[(L_d - L_q) i_d + \psi \right] - (L_d - L_q) p i_q \tag{a7-3}$$

(a7-1)より，

$$e_\gamma = v_\gamma + \omega_r L_q i_\delta - (R_s + pL_d) i_\gamma \tag{a7-4}$$

(a7-4)の微分を避けるため，ローパスフィルタを用い， e_γ を次式で演算する。v_γ ， ω_r はそれぞれコントローラで使用できる $v_\gamma{}^*$， $\widehat{\omega}$ に変更した。

$$\hat{e}_\gamma = \frac{g}{s+g} \left(v_\gamma{}^* + \widehat{\omega} L_q i_\delta - (R_s + sL_d) i_\gamma \right) \tag{a7-5}$$

同様に，

$$\hat{e}_\delta = \frac{g}{s+g} \left(v_\delta^* - \widehat{\omega} L_q i_\gamma - (R_s + sL_d) i_\delta \right) \tag{a7-6}$$

(a7-5)，(a7-6)は**外乱オブザーバ**による推定となっている。

(a7-2)の第 2 項を無視し， θ_e の推定値を $\hat{\theta}_e$ として

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\gamma \\ \hat{e}_\delta \end{bmatrix} = \hat{E}_{ex} \begin{bmatrix} \sin\hat{\theta}_e \\ \cos\hat{\theta}_e \end{bmatrix} \tag{a7-7}$$

が得られる。よって，

$$\hat{\theta}_e = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{e}_\gamma}{\hat{e}_\delta} \right] \tag{a7-8}$$

が演算できる。$-\pi < \hat{\theta}_e < \pi$ とする。

速度推定は $\hat{\theta}_e$ を 0 にするように PI 制御器を用いて次式で行う。

$$\widehat{\omega} = -(K_{ep} + \frac{K_{ei}}{s}) \hat{\theta}_e \tag{a7-9}$$

磁極位置は

$$\hat{\theta} = \frac{1}{s} \widehat{\omega} \tag{a7-10}$$

で推定する。積分器はローパスフィルタの一種と考えられるので，後述の速度 PI 制御のように $\widehat{\omega}$ をローパスフィルタに通す必要はないであろう。$0 < \hat{\theta}_e < \pi$ のとき，(a7-9)より $\widehat{\omega}$ は

小さくなるので（積分制御が働いているから$\hat{\omega}$ と$\hat{\theta}_e$ の符号は必ずしも一致せず，　$\hat{\omega}$ はもとの値から徐々に変化する）(a7-10)よりそれを積分した$\hat{\theta}$の増え方が緩慢になってγ軸がd軸に近づく。逆に，$-\pi < \hat{\theta}_e < 0$のとき，(a7-9)より$\hat{\omega}$は大きくなるので(a7-10)より$\hat{\theta}$の増え方が急になって$\gamma$軸が d 軸に近づく。ここ結果，定常時にはγ軸が d 軸に一致するようになる。図 a7-3 に 位置・速度推定の近似ブロック図を示す。角度の誤差が 0 になるように PI 制御で速度（周波数）を変えるフィードバック制御系となっており，これは一般に PLL(phase locked loop)**制御**と呼ばれているものの一種である。

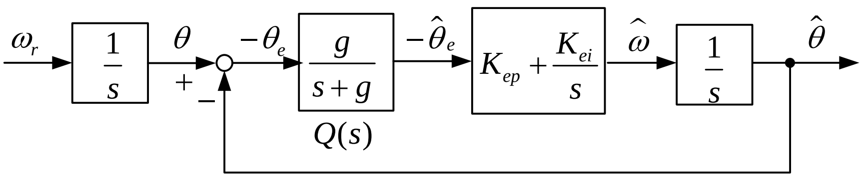


図 a7-3 位置・速度推定の近似ブロック図

近似の部分はθ_eと$\hat{\theta}_e$の間の関係が単純に$Q(s)$だけで表わせないと考えられる点にある。

オブザーバの推定速度が十分速く，$Q(s)=1$と仮定すると

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta}=\frac{K_{ep}\,s+K_{ei}}{s^2+K_{ep}s+K_{ei}} \tag{a7-11}$$

分母$=s^2+K_{ep}\,s+K_{ei}=s^2+2\zeta\omega_n\,s+\omega_n{}^2$　とおいて

$$K_{ep}=2\zeta\,\omega_n \quad , \quad K_{ei}=\omega_n{}^2 \tag{a7-12}$$

ω_n :固有角周波数，ζ ：ダンピング係数

PI 速度制御においてはノイズの影響を減らすため，遮断周波数ω_cのローパスフィルタをつける。

$$\hat{\omega}_r=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}\hat{\omega} \tag{a7-13}$$

以上，(a7-5)，(a7-6)，(a7-8)，(a7-9)，(a7-10)，(a7-13)を用いて制御を行う。

○ 簡易位置センサレスベクトル制御

(a7-7)の演算を簡単化することが考えられる。　$\hat{\theta}_e$が小さいと考えて

$$\sin\hat{\theta}_e \simeq \hat{\theta}_e,\quad \cos\hat{\theta}_e=1 \tag{a7-14}$$

とし，(a7-7)より次式が得られる。

$$\hat{\theta}_e = \frac{\hat{e}_\gamma}{\hat{E}_{ex}} \tag{a7-15}$$

(a7-3)の微分項を無視して次式で演算が可能となる。

$$\hat{\theta}_e = \frac{\hat{e}_\gamma}{\hat{\omega}\left\{(L_d - L_q)i_\gamma + \psi\right\}} \tag{a7-16}$$

$\hat{\theta}_e$ の代わりに e_γ^* を零にすることで，磁極の角速度 $\hat{\omega}$ が推定できる。すなわち

$$\hat{\omega} = -(K_{ep} + \frac{K_{ei}}{s})\ e_\gamma^* \tag{a7-17}$$

ただし， $K_{ep} = \mathrm{sign}(\hat{\omega})\left|K_{ep}\right|$， $K_{ei} = \mathrm{sign}(\hat{\omega})\left|K_{ei}\right|$ (a7-18)

逆転の場合には角速度 $\hat{\omega} < 0$ となるから，ゲインの符号を変えないといけない。一般に $(L_d - L_q)i_\gamma + \psi > 0$ である。図 a7-4 に簡易センサレスベクトル制御系 I [53]を示す。

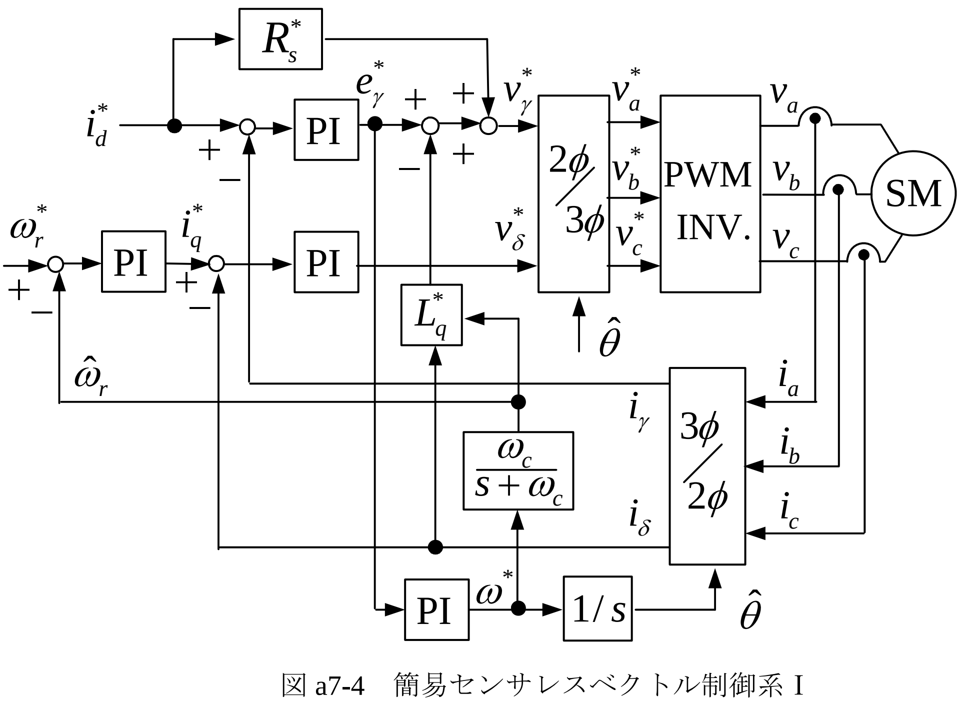


図 a7-4　簡易センサレスベクトル制御系 I

e_γ^* は(a7-4)で，微分項 $p\,i_\gamma = 0$ とした次式の制御（一種の非干渉制御）を行うと d 軸 PI 電流制御の出力より求まる。

$$v_\gamma^* = e_\gamma^* + R_s^* i_d^* - \hat{\omega}_r L_q^* i_\delta \qquad \text{(a7-19)}$$

$p\,i_\gamma = 0$ の仮定は，d 軸 PI 電流制御により i_γ がほぼ一定に制御されるので，妥当な仮定と考えられる。

(a7-17)では，e_γ^* を PI 制御して磁極の角速度 $\hat{\omega}$（推定速度）を求めたが，速度指令を e_γ^* の情報で補正して求めることもできる。図 a7-5 に簡易センサレスベクトル制御系 II を示す。図の ω_d は，次式の関係があり指令速度と推定速度の偏差と考えられる。

$$\omega_d = \omega_r^* - \hat{\omega} \qquad \text{(a7-20)}$$

このとき，e_γ^* は指令速度と推定速度の偏差に比例することになるので，この偏差を積分制御して v_δ^* を変えてトルク電流を変化させると速度制御が可能となる。v_δ^* の演算は次式で行う。これはフィードフォワード的に必要な電圧は加えることを行っている。

$$v_\delta^* = (\psi + L_d i_d^*)(\omega_r^* + \omega_c) \qquad \text{(a7-21)}$$

ただし，$\omega_c = \dfrac{K_{ie}}{s} e_\gamma^*$ (a7-22)

(a7-21) は Park の式(a4-37)で，q 軸電圧の項で微分項と抵抗分を無視した式を利用した。

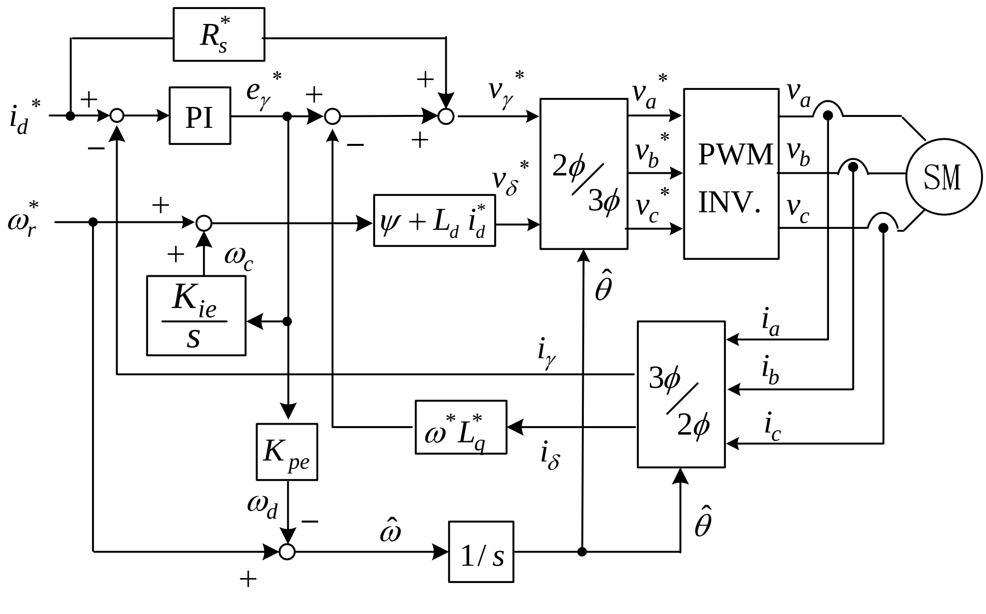


図 a7-5　簡易センサレスベクトル制御系 II

付録 8　数学の公式

10^n　を表す記号

記号	T	G	M	k	m	μ	n	p
	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
名称	テラ	ギガ	メガ	キロ	ミリ	マイクロ	ナノ	ピコ

ギリシャ文字

頭字	小字	読み方	頭字	小字	読み方
A	α	アルファ	N	υ	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	グサイ
Γ	γ	ガンマ	Π	π	パイ
Δ	δ	デルタ	P	ρ	ロー
E	ε	イプシロン	Σ	σ	シグマ
Z	ζ	ゼータ	T	τ	タウ
H	η	イータ	Φ	ϕ , φ	ファイ
Θ	θ	シータ	X	χ	カイ
K	κ	カッパ	Ψ	ψ	プサイ
Λ	λ	ラムダ	Ω	ω	オメガ
M	μ	ミュー			

三角関数

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

$\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ の三角関数

・　関数の決定　　n 偶数：そのまま

n 奇数： $\cos \to \sin$,　$\sin \to \cos$

sin

Ⅱ　+	+　Ⅰ
Ⅲ　−	−　Ⅳ

cos

−	+
−	+

・　符号の決定　　θを第１象限と考えて処理する。

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \end{cases}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad , \ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \quad , \ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}, \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$\cos\theta + \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) = 0$$

$$\sin\theta + \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) = 0$$

$$\cos^2\theta + \cos^2(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \cos^2(\theta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}$$

$$\sin^2\theta + \sin^2(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \sin^2(\theta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha - \frac{2}{3}\pi)\sin(\beta - \frac{2}{3}\pi) + \sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi)\sin(\beta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta - \frac{2}{3}\pi) + \cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin(\alpha - \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta - \frac{2}{3}\pi) + \sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta - \frac{2}{3}\pi) + \sin(\alpha - \frac{2}{3}\pi)\cos(\beta + \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha+\frac{2}{3}\pi)\sin(\beta-\frac{2}{3}\pi)+\sin(\alpha-\frac{2}{3}\pi)\sin(\beta+\frac{2}{3}\pi)=-\frac{3}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{2}{3}\pi)\cos(\beta-\frac{2}{3}\pi)+\cos(\alpha-\frac{2}{3}\pi)\cos(\beta+\frac{2}{3}\pi)=\frac{3}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\theta+e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta+\frac{2}{3}\pi)=\frac{3}{2}e^{j\theta}$$

$$\cos\theta+e^{j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta+\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\cos(\theta-\frac{2}{3}\pi)=\frac{3}{2}e^{-j\theta}$$

$$\sin\theta+e^{j\frac{2}{3}\pi}\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi)=-\frac{3}{2}je^{j\theta}$$

$$\sin\theta+e^{j\frac{2}{3}\pi}\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi)+e^{-j\frac{2}{3}\pi}\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi)=\frac{3}{2}je^{-j\theta}$$

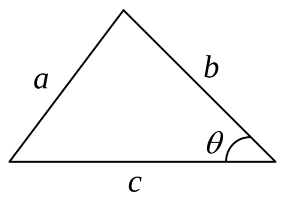
オイラーの式　$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

但し、$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　,　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　,　$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$$

$(\sin x)'=\cos x$　　,$(\cos x)'=-\sin x$　　,$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$　　,$(\dfrac{f}{g})'=\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$

$(\sin a\,x)'=a\cos a\,x$　　, $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

文　献

⑴ A.E. Fitzgerald, C. Kingsley, “Electric Machinery”, McGraw-Hill (1961)

⑵ 宮入　庄太：“エネルギー変換工学入門　下”，丸善(1965)

⑶ 天野　寛徳，常広　譲：“電気機械工学”，電気学会(1968)

⑷ 猪狩　武尚：“電気機械学”，コロナ社(1970)

⑸ 堀井　武夫：“電気機器概論”，コロナ社（1970）

⑹ 野中　作太郎，大口　國臣，岡田　英彦，小山　純：“電気機器Ⅱ”，森北出版(1971)

⑺ 野中　作太郎：“電気機器Ⅰ”，森北出版(1973)

⑻ 宮入　庄太：“パワーエレクトロニクス”，丸善(1974)

⑼ 猪狩　武尚：“電気機械理論”，コロナ社(1977)

⑽ 古賀　高志：“パワーエレクトロニクスと電動力制御”，東京電機大学出版局(1977)

⑾ 柴田　孝則　他：“パワーエレクトロニクスによる交流電動機の可変速駆動”，東京電機大学出版局(1981)

⑿ 見城　尚志，松井　信行：“モータのマイコン制御”，総合電子出版局(1981)

⒀ 辻　峰男，山田　英二，小山　純，泉　勝弘：“三相誘導機の 2 軸理論の応用”，長崎大学工学部研究報告，第 14 巻，第 22 号，pp.51-58 (1984)

⒁ P.K.Kovács: “Transient Phenomena in Electrical Machines”, Elsevier (1984)

⒂ 山村　昌監修，大野　栄一編著：“パワーエレクトロニクス入門”，オーム社(1984)

⒃ 難波江　章　他：“基礎電気機器学”，電気学会（1984）

⒄ 難波江章，金東海，高橋勲，仲村節男，山田速敏“電気機器学”，電気学会（1985）

⒅ W. Leonhard: “Control of Electrical Drives”, Springer-Verlag (1985)

⒆ Paul C. Krause: “Analysis of Electric Machinery”, McGraw-Hill Book Company(1986)

⒇ 石崎他：“三相永久磁石電動機の同期特性算定法”，電気学会論文誌 B，106 巻 4 号，pp.347-354，（1986）

(21) 矢野　昌雄　他：“半導体電力変換回路”，電気学会(1987)

(22) 猪狩 武尚：“二相理論を基礎とする空間ベクトル法の基礎理論の構成”，電気学会研究会資料，RM-89-63, pp.35-46 (1989)

(23) 杉本　英彦，小山　正人，玉井伸三：“AC サーボシステムの理論と設計の実際”，総合電子出版社(1990)

(24) Peter Vas: “Vector Control of AC Machines”, Oxford Science Publications (1990)

(25) Peter Vas: “Electrical Machines and Drives – A Space-Vector Theory Approach”, Oxford Science Publications (1992)

(26) C. Schauder: “Adaptive speed identification for vector control of induction motors without rotational transducers”, IEEE Trans. Industr. Applic., Vol.28, No.5, pp. 1054-1061(1992)

(27) 大谷　継利　他：“インバータドライブハンドブック”，p.69　日刊工業(1995)

(28) Y.Murai, Y.Tanizawa, M.Yoshida; ”Three-Phase Current-Waveform-Detection on PWM

Inverters from DC Link Current-Steps”, IPEC-Yokohama, pp.271-275 (1995)
(29) Peter Vas: “Sensorless Vector and Direct Torque Control”, Oxford Science Publications (1998)
(30) 電気学会編：“交流電動機可変速駆動の基礎と応用”，コロナ社(1998)
(31) 矢野　昌雄　他：“パワーエレクトロニクス回路”，オーム社(2000)
(32) 森安　正司：“実用電気機器学”，　森北出版(2000)
(33) 市川，陳，冨田，道木，大熊：「拡張誘起電圧推定による IPMSM の位置・速度センサレス制御」，電学研資 RM-00-163, pp31-36 (2000)
(34) M. Tsuji, S. Chen, K. Izumi and E. Yamada, “A Sensorless Vector Control System for Induction Motors using q-axis Flux with Stator Resistance Identification”, *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol.48, No.1, pp. 185-194 (2001)
(35) D. W. Novotny, T. A. Lipo 著　篠原，飯盛，山本訳：“ベクトル制御と交流機駆動の動力学”，電気書院(2001)
(36) 武田洋次，松井信行，森本茂雄，本田幸夫：“埋込磁石同期モータの設計と制御”，オーム社(2001)
(37) 電気学会技術報告第 896 号:“可変速制御システムにおける電動機モデルと高性能制御”，電気学会(2002)
(38) 森本，河本，武田：「推定位置軸誤差情報を利用した IPMSM の位置・速度センサレス制御」，電学論 D，122 巻，No.7 , pp722-729 (2002)
(39) 市川，陳，冨田，道木，大熊：「拡張誘起電圧モデルに基づく突極型永久磁石同期モータのセンサレス制御」，電学論 D，122 巻, No.12 , pp1085-1089 (2002)
(40) 電気学会技術報告第 920 号：“特定用途指向型リラクタンストルク応用電動機の高性能化”，電気学会(2003)
(41) 萩野弘司　：ブラシレス DC モータの使い方，オーム社(2003)
(42) 堀洋一　他：自動車用モータ技術，日刊工業新聞社(2003)
(43) 多田隈　進，石川　芳博，常広　譲：“電気機器学基礎論”，電気学会(2004)
(44) 河村　篤男：“現代パワーエレクトロニクス”，サイエンス社(2005)
(45) 電気学会技術報告第 1034 号：“永久磁石電動機、リラクタンスモータの駆動回路技術と制御技術”，電気学会(2005)
(46) 井上　亮二，坂本　守，神田　淳：“N700 系新幹線車両用主回路システム”，富士時報 Vol.79, No.2, pp.110-117 (2006)
(47) 松瀬　貢規：“電動機制御工学”，電気学会(2007)
(48) 曽根　悟，松井　信行，堀　洋一編集：“モータの事典”，朝倉書店(2007)
(49) 新中　新二：“永久磁石同期モータのベクトル制御技術上，下”，電波新聞社(2008)
(50) 大野　榮一　編著：“パワーエレクトロニクス入門（改訂４版）”，オーム社(2009)
(51) 金　東海：“現代電気機器理論”，電気学会（2010）
(52) 近藤：“突極同期機のトルク式と等価回路”，電学論 D，130 巻 2 号，pp.236-242 (2010)

(53) M. Tsuji, K. Kojima, G. M. C. Mangindaan, D. Akafuji, S. Hamasaki: "Stability Study of a Permanent Magnet Synchronous Motor Sensorless Vector Control System Based on Extended EMF Model", IEEJ Journal of Industry Applications, Vol.1, No. 3, pp.148-154 (2012)
(54) 松本, 長谷川, 松井 : “最大トルク制御に適した磁束モデルの提案とこれに基づく IPMSM の位置センサレス制御”，電学論 D，Vol.132, No.1, pp.67-77(2012)
(55) 電気学会編 : “電気工学ハンドブック（第 7 版）”，オーム社(2013)
(56) M. Tsuji, G. M. Ch. Mangindaan, Y. Kunizaki, S. Hamasaki: "Simplified Speed-Sensorless Vector Control for Induction Motors and Stability Analysis”, IEEJ Journal of Industry Applications, Vol.3, No. 2, pp. 138-145(2014)
(57) M. Tsuji, S. Hamasaki, A. Del Pizzo: “Physical Space Vectors for Permanent Magnet Synchronous Machine”, Proc. of International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM), pp.583-588 (2014)