数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究(2)

－RME 理論を手がかりにして－

平岡　賢治*　野本　純一**

（平成26年10月31日受理）

Study of Developing the Ability to use Mathematics Textbooks Effectively(2)

－The RME theory－

Kenji HIRAOKA*　Junichi NOMOTO**

（Received October 31, 2014）

１．はじめに

近年，数学の授業において，導入時における生徒の活動を観察していると，積極性に乏しい場面と出会うことがよくある.「教師の話をよく聴いているのか？」,「しっかりと考えているのか？」または,「よく理解できていないのか？」,「話の内容に追いついていないのか？」. どちらかというと，後者であるような気がしてならない.

教師が導入の説明後，問題を提示して解くように指示すると，児童・生徒は一斉にノートを書き始めるが，その実態は問題を解くのではなく，板書を写し始める活動に入るのである. 生徒は問題に対する意味理解が十分になされないまま取り組んでいるので，結果として，積極性に乏しくなっている. この現状を解決するために大切なことは，数学教師が授業で扱う教科書の内容や問題を数学の知識のみではなく，生徒が行うであろう数学的活動の視点から具体的に問題理解し，授業を構成することである.

そこで，本研究の(1)では，教科書で扱われている題材や問題を数学的活動の視点から問題理解する方略について研究を進め，具体的事例の考察から，教師の問題理解の方略として，次の２点を提示した.

○数学化（具体的な事象を数理的に捉える）の活動として，操作や図表示，帰納的な考え方などの数学的活動を取り入れること

○定式化（数学的な課題を設定する）の活動として，数学化で得られた結果を既習内容と関連させることや数学的不変性の考察などを通して，数学的性質を見いだすこと

（平岡・野本，2014，p.9）

一方，構成主義や社会文化主義などの観点から，子どもの知識の成長を捉える上で，子どもがもっている問題解決のための既有の知識や考えに対し，より関心が向けられている

（日野，2010）．例えば，日常経験や具体物，絵図などのように外的に結びついた知識，すなわち，生徒のインフォーマルな知識（Mack,1990）を授業による生徒間の相互作用により，授業としてのフォーマルな数学に練り上げることに焦点をあてた研究が行われている（例えば，布川，1993；吉田・河野，2003；石井，2012）．また，平林（2006）は，「古典的認識論の最も大きい欠陥は，「知識」を客観的な存在と見ていること」（p.32）と述べ，知識の客観性と主観性を明確に区別するフランス語の構造に着目し，前者の知識を外知識，後者の知識を内知識と呼んでいる．そして，内知識の役割について，「その個人の主観的環境と，既習の内知識，他者（友人・教師など）の知識との相互関連のなかで，まるで，生き物のように成長し，変化し，時には消滅し，ときには大繁茂・大繁殖する」（p.42）と述べ，各生徒が持つ内知識に着目し，それが相互関連のなかで生き物のように成長するという観点に立って，授業を捉えようとしている．

このように，インフォーマルな知識，内知識のいずれにおいても，生徒が主観的・直観的に持っている素朴な知識や既習の知識に着目しており，授業づくりにおいても，教師が学習内容を，生徒の素朴な知識や既習の知識を基に構成できるように学習場面を構成することが望まれる．

そこで，筆者らは，生徒の素朴な知識や既習の知識から，他者との相互関連の中で行う数学的活動を通してフォーマルな数学に練り上げる過程に視野に入れて，教科書の教材研究を行うことが重要であると考えた．そのために，本稿では,次節で示す，Freudenthalの考えを基にし，授業において，子どもたちにとって経験的に現実的であるような問題場面を取り上げながら，子どもたちがインフォーマルな推論を数学化する過程を重視しているRealistic Mathematics Education（RME）理論を手がかりに，教科書の幾つかの問題を，教材研究の視点に立って，生徒の素朴な知識や既習の知識を活用して数学的活動を行う観点から考察する．その上で，授業づくりにおける，教師の教科書の問題理解に関する方略の視点を提案する．

2．RME理論における自己発達モデル

RME理論には，Freudenthalの「人間の活動としての数学」という数学観が背景にあり（Gravemeijer,1997; van den Heuvel-Panhuizen,2003），その核となる活動は「数学化」である．Freudenthal（1968）は，「人間が学ばなければならないものは，閉じた体系としての数学ではなく，活動としての数学，つまり，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスである.」(p.7)と述べている．

Gravemeijer（1997）によれば，RME理論は，「再発明」・「漸進的数学化」，「教授学的現象学」，「フォーマルな数学とインフォーマルな知識の間のギャップを橋渡しする自己発展モデル」を基本原理としている．以下，基本原理の概要を述べる．

①再発明・漸進的数学化

再発明（re-invention）とは，Freudenthal（1973,1991）が数学化を学校数学において実現する指導方法として位置づけたものであり，数学を所産とみなし，所産を所産として教えようとするのではなく，数学を「活動として解釈し，分析することで構成された指導方法」（1973,p.120）である．Gravemeijer & Doorman（1999）は，再発明について強調すべき点は，児童・生徒が発明すること自体にあるのではなく，児童・生徒が教師に支援

されながら発明していく学習過程に力点があることを述べている．

漸進的数学化（progressive mathematization）とは，Treffers（1987）が，Freudenthal の数学化を，特に問題解決に関わって具体化した水平的数学化（horizontal mathematization）・垂直的数学化（vertical mathematization）をもとに規定したものである．Treffers は，２つの数学化を次のように述べている．

「問題を数学的に表現しえるまでの試みを水平的数学化という言葉で表す．・・・・垂直的数学化は，数学的手段によって問題解決ができるようにしていく概念領域をなす．問題を解く，解決を一般化する，一層形式化するなどの数学的過程に関係した活動が垂直的数学化である．」（Treffers，1987,p.71）

その上で，漸進的数学化とは，上記の２つの数学化は独立したものではなく，強く相互に関係し，その進み方は一様ではなく，水準の上がり方も「細切れ」で直線的ではないという意味で規定している．図１は，そのことを図式化したものであり，「ある課程内の学習過程におけるマクロな水準に対して，ミクロな水準における数学化の網目と特定の進展を区別して示す」（p.248）を目的に導入している．

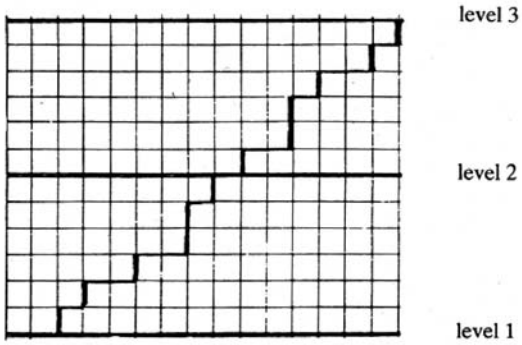


図１　Treffers の漸進的数学化（Treffers 1987,p.248）

②教授学的現象学

Freudenthal（1983）は，上記の再発明の指導法を具現化するための方法として提案したものが現象学的分析である．Freudenthal は，現象学（Phenomenology）ならびに教授学的現象学（Didactical Phenomenology）について，次のように定義している．

「数学的概念の現象学，数学的構造の現象学，数学的観念の現象学とは，私の考えによれば次のことを意味している．現象との関係において，組織化の方法である本質を記述すること，どの現象に対し，本質が組織化のために創り出されるかを提示すること，また，どの現象に対し，本質がどのように拡張化されるかを提示すること，本質がこれらの現象の上で，組織化の方法としてどのような力をわれわれに与えてくれるのかを提示することである．私は，このような本質と現象との関係の中で，教授学的な要素を強調するのであれば，すなわち教授－学習過程の中で，この関係がどのようにして得られ，また使われるかということに注意を払うならば，この本質の教授学

的現象学について語ることになるのである.」

（Freudenthal，1983，pp.28-29）

このことから，教授学的現象学とは，学習過程の中で，本質と現象との関係が構成されていく過程の分析を行うことであるということができる．Gravemeijer（1987）は，RME理論における教授学的現象学の目的として，一般化される問題状況を見つけることと，「垂直的数学化」の基本として用いられる典型的な解決手続きを引き起こす問題状況を見つけることを挙げている.

③フォーマルな数学とインフォーマルな知識の間のギャップを橋渡しする自己発達モデル

Freudenthal（1973）によれば,「生徒は，自分自身の活動に潜在する内容を数学化することを学ぶ」（p.125),「次の水準では，子どもは，自分がその前の水準でしたことを反省する．その前の水準における組織化の方法は，分析の対象になる」（p.128）と述べるように，学校数学における数学化は，それが水準という数学の階層性を前提に構成されている.

RME理論では，具体から抽象への４つの水準,「状況的水準（the level of the situations)」,「参照的水準（a referential level)」,「一般的水準（a general level)」,「形式的水準（the level of formal arithmetic)」が想定されている．そして，具体から抽象への水準に移行は「モデル」の自己発展で説明している．そのために，水準上昇を理解，または説明する道具として「モデル」の研究がされている（Treffers，1987; Gravemeijer，1997；van den Heuvel-Panhuizen,2003）.

モデルについて，児童・生徒の内的な世界に構成されるシェマをモデルとして表現し，モデルの変容を数学的概念の理解の深化として捉えている．また，モデルの変容について,「model-of」,「model-for」という用語で説明している点が特徴的である.「model-of」とは，文脈に固有な状況のモデルのことを指しており，数学的に形式化される前のものであり，ある特定の場面に対する問題解決の具体的な解決方法である.「model-for」とは，ある特定の場面を超え一般化された形式的な数学的推論のためのモデルのことを指している.

そして，図２のように「活動」と「自己発達モデル」とを対置し，表１のように，各水準を設け，一般的な特徴を記述している.

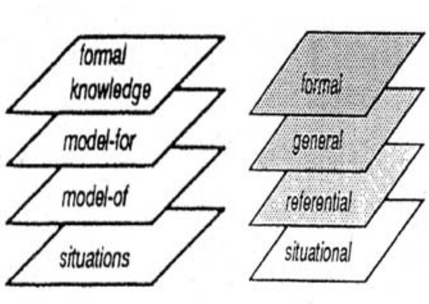


図２　自己発達モデルと活動の水準
(Gravemeijer,K 1997,pp.339-340)

表１　各水準における一般的特徴

水準	一般的な特徴
形式的水準（formal）	標準的な表記やアルゴリズムを使って解決する
一般的水準（general）	具体的な状況を参照することなく算数的な視点から考察するためのモデル(model-for)が構成される（形式的水準の具体的基礎，状況はない）
参照的水準（referential）	状況およびそこにある要素やそれらの関係を表すモデル（model-of）が表記されて構成される（具体的典型的な状況に言及する）
状況的水準（situational）	実生活と関連した場面，あるいは学習者が具体的にイメージできる場面で，インフォーマルな知識や状況的知識などで解決する

つまり，RME 理論では，状況的水準において，学習者のインフォーマルな知識などにより解決したことを，参照的水準において，「model-of」として構成する．そして，一般的水準では，参照的水準で行われた「model-of」の活動あるいはその結果それ自体を，新たな数学的推論のためのモデルを生み出していく．ここでは，モデルそれ自体が，一般化につながるためのモデルという意味があり，「model-for」として位置づけられる．最後に，形式的水準では，モデルは必要でなく，ファーマルな記号などを用いて推論が行なわれていくのである．

以上，RME 理論を概観した．その注目すべき特徴を整理すると，次のようにまとめることができる．

・生徒が数学化を意識化させようとする働きや教師による支援，生徒間の相互作用などを通して数学を構成していること

・インフォーマルなモデル（表現）である model-of やフォーマルなモデル（表現）である model-for という概念を導入していること。

・モデルの対象化やモデルの役割の転換が数学の学習の本質であり，model-for のベースとなる model-of を認識し，それらを生かしていること

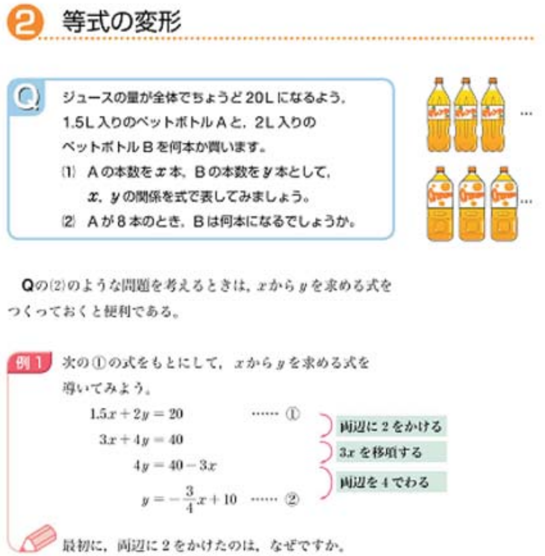
そして，このような数学の学習を行う上で重要な点は，「状況的水準」，「参照的水準」における課題の設定である．この段階での問題やその学習内容が，生徒にとって抽象度が高ければ，自分自身の考えをもてない生徒も多くなり，結果として，いわゆる練り上げの段階で考えが深まらなくなってしまう．

教師にとって必要なことは，**教科書の問題を，学習者である生徒に具体的にイメージできるようにすること，また，model-of に対応する表記やインフォーマルな知識を促す場面を設定すること**である．そのためには，授業においては問題理解の場面で RME 理論の具現化が重要になる．そこで，次節では，中学校数学の教科書の問題を具体的にイメージできる場面で，model-of に対応する表記やインフォーマルな知識を促す場面を設定することを試みる．その上で，教師の教科書の問題理解に関する方略の視点を提案する．

３．具体的事例

(1) 等式の変形（中学校２年生）

等式には恒等式と方程式があり，前者は，任意のの値に対して，常に成立する等式であり，後者は，いくつかのの値に対してのみ成立する等式である．



❷ 等式の変形

Q ジュースの量が全体でちょうど20Lになるよう，
1.5L入りのペットボトルAと，2L入りの
ペットボトルBを何本か買います。
(1) Aの本数をx本，Bの本数をy本として，
x，yの関係を式で表してみましょう。
(2) Aが8本のとき，Bは何本になるでしょうか。

Qの(2)のような問題を考えるときは，xからyを求める式をつくっておくと便利である。

例1 次の①の式をもとにして，xからyを求める式を導いてみよう。

$$
\begin{aligned}
1.5x+2y&=20 &\cdots\cdots ①\\
3x+4y&=40 &\text{両辺に2をかける}\\
4y&=40-3x &\text{3xを移項する}\\
y&=-\frac{3}{4}x+10 &\cdots\cdots ② \quad \text{両辺を4でわる}
\end{aligned}
$$

最初に，両辺に2をかけたのは，なぜですか。

（新しい数学２　p. 23　東京書籍）

授業における「状況的水準」に相当するＱでは，1.5ＬのペットボトルＡと２ＬのペットボトルＢをそれぞれ何本かずつで20Ｌをつくる．ここで，問題文を数学化するためには，“1.5Ｌ”,“Ａ”,“２Ｌ”,“Ｂ”,“20Ｌ”，さらに，(1）には，“Ａをｘ本，Ｂをｙ本”と多くの情報がある．

インフォーマルな観点では，

ＡＡ・・・Ａ　と　ＢＢ・・・Ｂ　で20Ｌ

Ａの本数ｘとＢの本数ｙで，Ax＋By＝20である．

しかし，問題ではジュースの量を考えているため，Ａのジュースの量は1.5x，Ｂのジュースの量は2yとなり，フォーマルな数学である1.5x＋2y＝20を導くことが重要である．しかし，筆者の経験上，これはなかなか，多くの生徒にとって解決の糸口がつかめないのが実態である．

そこで，見通しをもつための導入課題と身近な例として，

> ジュース全体の量が５Ｌになるよう，
> １Ｌ入りのペットボトルＡと，２Ｌ入りのペットボトルＢを
> 何本か買います。Ａの本数とＢの本数は？

と提示する．これは，５を１と２の和に分解するものであり，

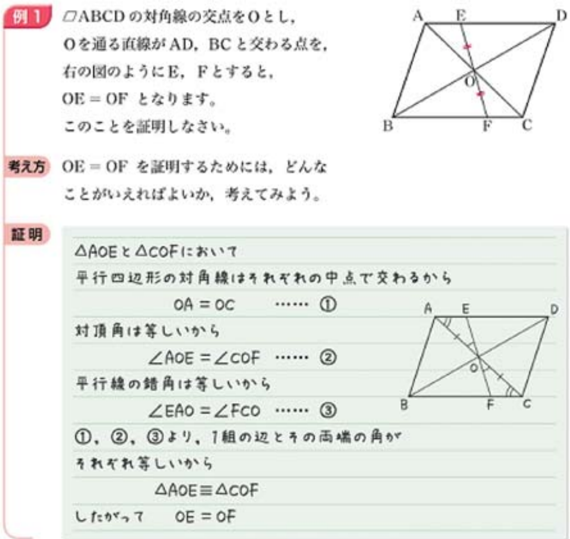
1＋1＋1＋1＋1＝5		2×0＋1×5＝5
2＋1＋1＋1＝5	←――――→	2×1＋1×3＝5
2＋2＋1＝5		2×2＋1×1＝5

など，インフォーマルな知識で解決できる場面を設定することができる．すなわち，RME理論の状況的水準に対応する，この和→積のプロセスから，$2\times x+1\times y=5$への橋

渡しが参照的水準に対応することになる．

改めて，教科書のQにもどると，$1.5x+2y=20$ となる．これは，x の値からの y 値を決めることができる．上記の model-of の例を想起させせることを通して，$y=-\frac{3}{4}x+10$ の意味もあわせて理解を促す状況を設定することが可能になる．

(2) 図形の性質（中学２年生）



例1 ▱ABCDの対角線の交点をOとし，
Oを通る直線がAD，BCと交わる点を，
右の図のようにE，Fとすると，
OE＝OF となります。
このことを証明しなさい。

考え方 OE＝OF を証明するためには，どんなことがいえればよいか，考えてみよう。

証明
△AOEと△COFにおいて
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから
OA＝OC ……①
対頂角は等しいから
∠AOE＝∠COF ……②
平行線の錯角は等しいから
∠EAO＝∠FCO ……③
①，②，③より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△AOE≡△COF
したがって OE＝OF

（新しい数学２　p.132　東京書籍）

この問題を考えようとする場合，「平行四辺形とその対角線」，「対角線の交点を通る直線」，「図の２つの線分の長さが等しい」ことを理解したうえで，「図の２つの線分の長さが等しい」ことを示すことが求められている．

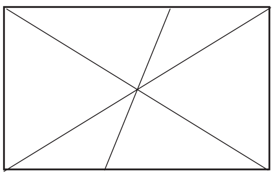
ここで，教師が考えるべきことは，状況的水準，すなわち，インフォーマルな知識とは何か，生徒に理解を促すものとは何かということを提示することである．例えば，

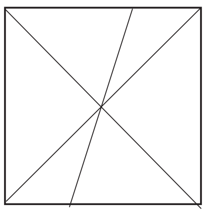
①長方形や正方形の場合の問題として考える

②交点を通る直線が対角線そのものの場合

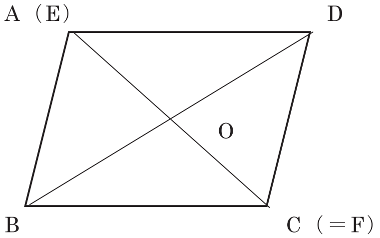
がある．

①については，平行四辺形よりは慣れ親しんできた図形であり，直観的に想起したり，図形を実際に書く活動を通して，正方形・長方形の対称性の活用や三角形の活用など，インフォーマルからフォーマルへの橋渡しを考えることができる．





②については，下記の図のように，２点 E, F が端点にある図から始める．

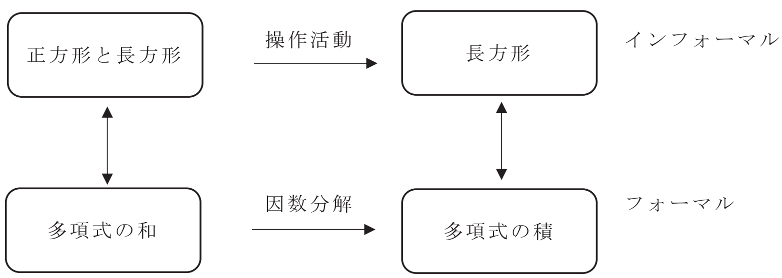


この図は，平行四辺形の性質で使用した図である．この図を通して，「平行四辺形では，対角線はそれぞれの中点で交わる」などの既習事項や証明の方針を確認するとともに，OE＝OFにつなげる橋渡しとする．

(3) 因数分解（中学３年生）

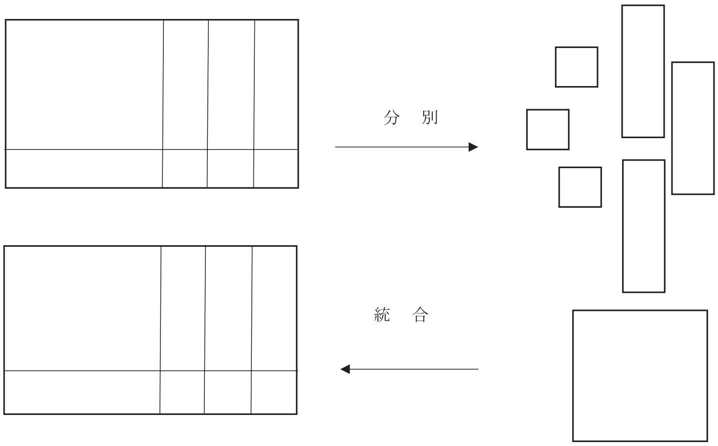
（新しい数学３　p.19　東京書籍）

この問題では，いくつかの正方形といくつかの長方形を組み合わせて，１つの長方形をつくる活動を通して，多項式の和を多項式の積で表す問題である．すなわち，



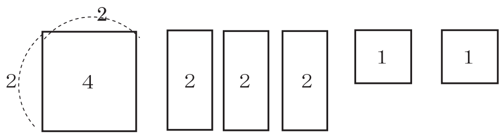
と図式化することができる．

この問題を考える際に重要なことは，まず，長方形を正方形と長方形に分別することである．例えば，



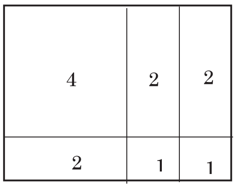
このような活動が,インフォーマルな知識を促す１つの要因として考えることができる．その上で，１辺の長さが具体的な数の正方形と長方形の操作活動などを通して，展開と因数分解の関係性に注目させていくことが考えられる．

例えば，１辺の長さが２の場合

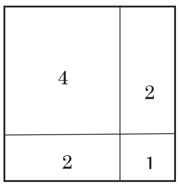


そして，いろいろな長方形や正方形をつくる場面をつくる．

例　縦が３，横が４となる場合，



例　縦が３，横が３となる場合，



その上で面積の表し方を考えさせ，

$$4+2\times3+1\times2=(2+2)(2+1)$$

という関係などを導いていく．

１辺の長さが他の場合についても同様な活動を行い，それを通して，

$$4+2\times3+1\times2=(2+2)(2+1)$$
$$9+3\times3+1\times2=(3+2)(3+1)$$
$$16+4\times3+1\times2=(4+2)(4+1)$$
$$\cdots$$

から，$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$であることを帰納的に導いていく．

４．具体的事例からの示唆

前節では，中学校数学の教科書の問題を具体的にイメージできる場面で，model-of に対応する表記やインフォーマルな知識を促す場面を設定することを試みた．それらの要点をまとめると次のようになる．

(1)の問題では，問題文に整数や分数が混在していたので，数学的に捉えにくい．そこで，整数のみで問題を構成し直したので，数学的に操作しやすくなっている．

(2)の問題では，図形の性質の不変性を捉えることを考えさせるために，慣れ親しんだ図形を使ったり，図形上の点を図形の端点に移したりしている．それらにより，問題場面が既習事項の図と関係したものになり，学習したことの振り返りから，図形の性質の不変性を捉えることができ，数学的活動の深まりに繋がる．

(3)の問題について，長方形を正方形と長方形に分別することは，パズルの操作活動を想起させ,インフォーマルな知識を促す１つの要因として考えることができる．

また，１辺の長さが具体的な数の正方形と長方形の操作活動は,「擬変数」の考えに依ると思われる．藤井（1998）によれば,「擬変数は数字を用いた「数字の式」から文字を用いた「文字の式」に至る過程で，数字を用いてはいるがそれが文字と同じ機能を持つように配慮されている数字」（p.125）であり，文字で表す前に，擬変数を用いて数量の構造を表すことの意義を述べている．ここでは，具体的な数による計算を通して，数学的構造に気付いた上で，それを文字を使って数学的に処理をしていこうとしている．

これらをまとめると,**「生徒がインフォーマルな数学的活動からフォーマルな数学的活動につながるような場面をつくること」**とまとめることができる．

５．おわりに

本稿では，RME の自己発達モデルを手がかりに，具体的事例を通して，数学教師の教科書の問題理解の方略として,**「生徒がインフォーマルな数学的活動からフォーマルな数学的活動につながるような場面をつくること」**という視点を提案する．

このために，具体的事例で分かるように，問題文の数値を簡単なものに変更したり，慣れ親しんだ図形を使ったり,「擬変数」の考えを用いて，具体的な数における計算から始めたりしている．

われわれ数学教師は，数学的形式やそれらの操作に関する方略になれ親しんでいる．しかし，授業においては，生徒のインフォーマルな表現をより洗練された数学的表現に形成することが大切である．このことについて，David ら（2008）も，教師教育の観点から，形式化されていない表現や形式化につながる表現を具体的に調べることが，学習過程や生徒が用いる方略を考える際の支えになると指摘しており，その重要性が伺える．

本稿で提案した視点を，更なる研究を通して，より数学教師に役立つ視点に仕上げていきたい．また，生徒の思考や相互作用を促す教師の役割についても言及した上で授業実践を行っていきたい．

引用・参考文献

石井康博（2012）．『数的活動で利用される具体物が子どものインフォーマルな知識および方略に与える影響』，早稲田大学学位論文（人間科学）

布川和彦（1993）．「van Hiele 理論に対する新たな意味づけ－インフォーマルな知識と発達と発達の最近接領域を手がかりとして－」，『教育方法学研究』，19，37-46

日野圭子（2010）．「第５章　認知・理解・思考　§１　認知・認識論」，日本数学教育学会編，『数学教育学研究ハンドブック』，pp.294-309,東洋館出版社

平岡賢治・野本純一（2014）．「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究（1）－算数・数学的活動の視点から－」，長崎大学教育学部研究紀要（教科教育学），1-10

平林一栄（2006）．「数学教育学の居場所（niche）－新しい認識論の視点から－」，『数学教育学論究』，vol.91，39-47

藤井斉亮ほか（2012）．新しい数学２，東京書籍

藤井斉亮ほか（2012）．新しい数学３，東京書籍

藤井斉亮（1998）．「「文字の式」の理解に関する一考察：擬変数について」，日本数学教育学会，『第31回数学教育論文発表会論文集』，123-128

吉田　甫・河野康男（2003）．「インフォーマルな知識を基にした教授介入－割合の概念の場合－」，『科学教育研究』，27（2），111－119

David C.Webb, Nina Boswinkel, Toruus Dekker（2008）．Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. Mathematics Teaching in the Middle School, Vol.14．No.2，110-113

Freudenthal,H（1968）．Why to teach mathematics so as to be useful. Educational Studies in Mathematics,1,3-8

Freudenthal,H（1973）．Mathematics as an Educational Task,Reidel,Dordrecht.

Freudenthal,H（1983）．Didactical Phenomenology of Mathematics Structures,D.Reidel

Freudenthal,H（1991）．Revisiting Mathematics Education, Kluwer Academic Publshers

Gravemeijer,K.（1997）．Mediating between concrete and abstract, Nunes,T. & Bryant P.（eds），Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective, Psychology Press, pp.315-345

Gravemeijer,K.& Doorman.M.（1999）．Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics,39,pp. 111-129

Mack, N.（1990）. Learning fractions with understanding: Building on informal Knowledge. Journal for Research in Mathmaitics Education, 21(1), 16-32

Treffers, A.（1987）. Three Dimensions, D, Reidel, Dordrecht.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.（2003）. The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, 54(1), 9-35