

数学的な思考力・表現力を伸ばす 数学的な活動を取り入れた授業構成の研究

溝口 春恵・馬場 仁修・作元 浩二

(長崎大学教育学部附属中学校)

平岡 賢治

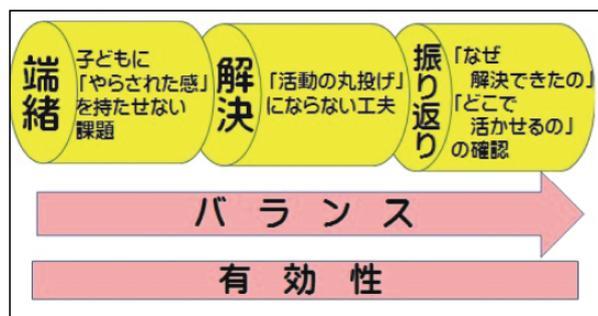
(長崎大学教育学部)

1. はじめに

数学を活用した問題解決能力を身に付けさせるには、まず数学を活用したいという意欲を高めることが必要である。そのために、普段の授業において、観察、操作や実験などの活動、事象に深く関わる様々な体験などを通して、主体的に学習し、数学の必要性や有用性を、実感を伴って理解できるようにする。次に問題解決のプロセスを習得させる。最後に、数学を通して、数学を用いて解決できる問題に変換したり、数学的に推論したりする数学的な見方や考え方を伸ばす。

つまり、主体的に数学を活用しようとする態度を身に付けて、数学的に考えることを重視する問題解決型の授業を具現化することが重要である。この学習活動は、まさしく学習指導要領で示されている数学的活動のことである。数学的活動とは、生徒が目的意識を持って主体的に取り組む数学に関わりのある様々な営みであり、主に、問題解決の形で行われるものである。われわれは学習指導要領で示されている、「数や図形の性質などを見いだす活動」、「数学を利用する活動」及び「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」を、普段の授業に取り入れるよう授業を構想するとともに、数学的活動の基本的な授業スタイルを研究・実践している。

また、文教大学の永田潤一郎先生は、本年度行われた山口市立鴻南中学校の研究発表会において、数学的活動の5つの視点として、「端緒」、「解決」、「振り返り」、「バランス」、「有効性」を提案された。本校数学科では、この5つの視点に立った数学的活動を取り入れる授業を図1のように設計した。



(図1 5つの視点を基にした授業設計)

5つの視点の具体的内容は次のようである。

- 「端 緒」活動のきっかけをつかむ場面であり、生徒が不思議さを感じたり、疑問を持ったりできるように問題設定を工夫する。答えや解法を予想させたり、問題を共有したりして解決へつなげていく。
- 「解 決」生徒に活動を丸投げするのではなく、操作活動を取り入れて問題を解決させたり思考を促すような発問を工夫したりする。
- 「振り返り」本時の学習内容を振り返り、解決の方法やその過程を評価したり、別の問題に利用したりすることで、学習内容の定着を図る。この活動が新たな活動への「端緒」となることも考えられる。
- 「バランス」単元を通して、数学的活動が適切に位置づけられるように計画する。1時間の授業の基本的な時間配分は、端緒 10分→解決 30分→振り返り 10分とする。
- 「有効性」生徒が自身の活動に達成感を得ることができるような有効な数学的活動であったか教師が検証する。

なお、本稿は今年度の長崎大学教育学部附属中学校公開授業研究会での公開授業について考察したものであり、研究協議における質疑内容も記述している。

2. 授業について

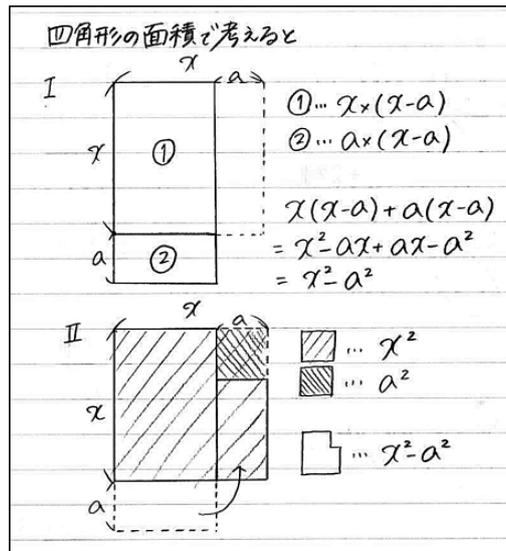
公開授業は、第3学年「3章 二次方程式」の

「二次方程式 $x^2 + 2x = 5$ の解き方を考えよう」

である。数学的活動は学習指導要領解説に示されている3つの数学的活動の中で「数や図形の性質などを見いだす活動」に視点を当てたものである。授業のねらいは、平方完成を利用した二次方程式の解法を、正方形の面積と平方根の考えを基に見いださせることである。その際、長方形の面積を正方形に変形する方法を考える操作活動を取り入れ、平方完成を視覚的に捉えさせるとともに、実感を伴う理解を図った。さらに、「振り返り」の場面では、平方完成の一般化を通して本時の学習が次時の二次方程式の解の公式を導くための足がかりとなるよう、学びのつながりを意識した授業展開になるように工夫した。

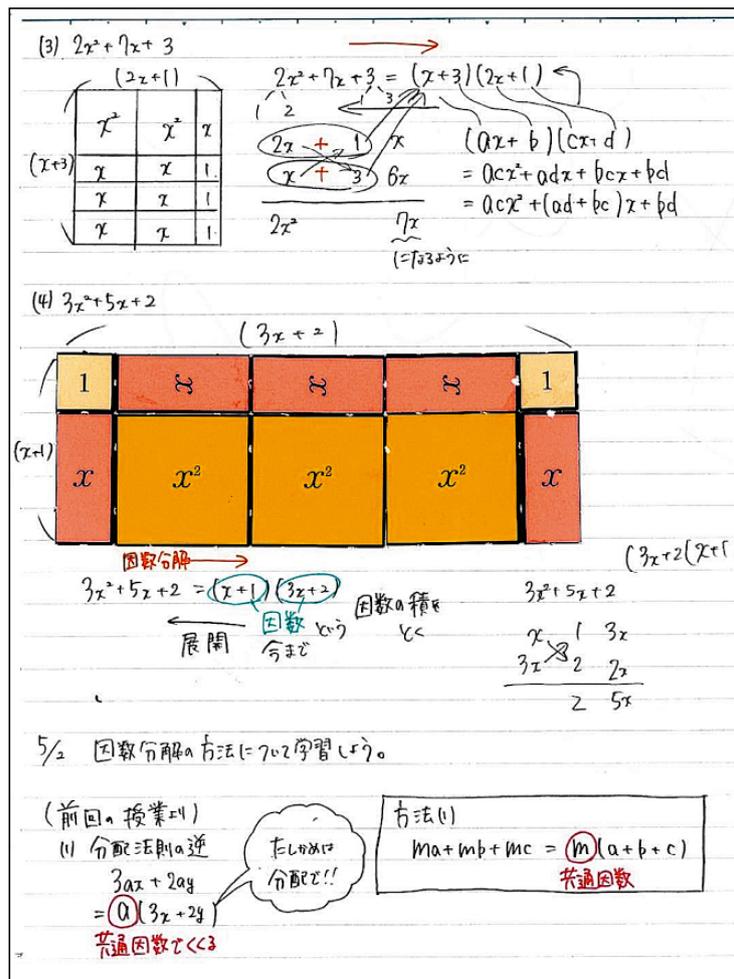
前時までに、生徒は面積図と式変形の間を、操作活動を通して理解を深め、学習のつながりを実感している。

第3学年「1章 多項式」では、積や2次式の図形的意味を正方形や長方形の切り分けや、その面積を考えることで、式の展開公式をつくったり、展開した式と図形の間を関係を確認したりして理解を深めてきた。(図2)



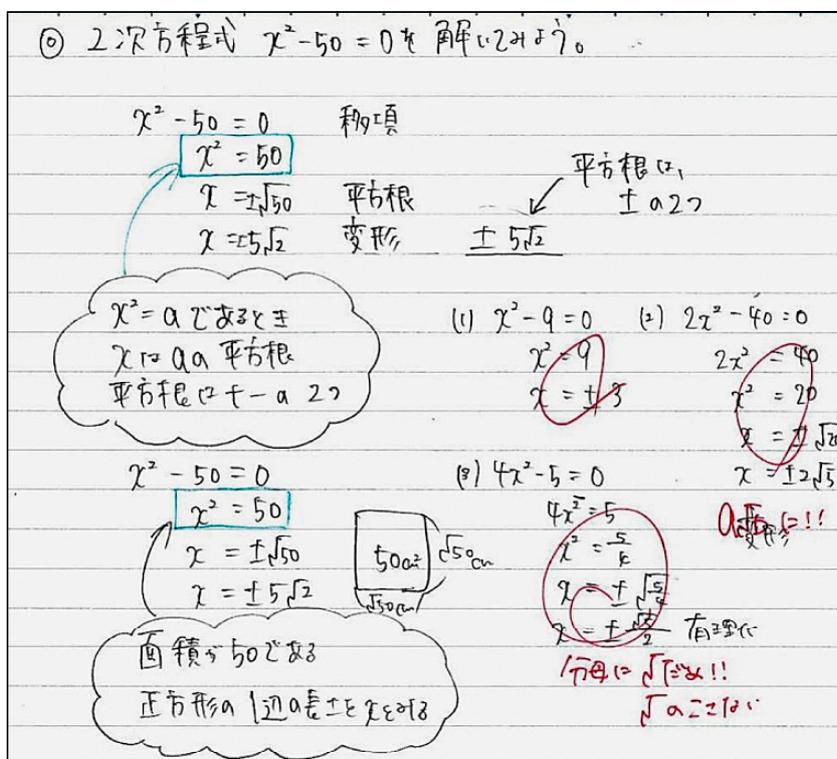
(図2 生徒の記録)

さらに、いつかの長方形や正方形を並べかえて、1つの長方形をつくる活動を通して、式の展開と因数分解が逆の操作になっていることに気づかせ、因数分解の意味を視覚的に理解している。(図3)



(図3 生徒の記録)

そして、本単元では、前時の平方根を利用した二次方程式の解き方の学習において、左辺を正方形の面積と捉えることで、二次方程式の解を導いた。(図4) 正方形の面積図を用いて、新たな二次方程式の解法を考察する足がかりをつくることで、平方完成の式変形に気づかせることができると考えている。



(図4 生徒の記録)

次に、本時における数学的活動として、永田先生の5つの視点を次のように設定し、授業を展開した。

「端 緒」活動のきっかけをつかむ。

平方根を利用した解き方を確認した後、左辺が平方の形ではないため、平方の考えを用いて解くことができない方程式 ($x^2 + 2x = 5$) と出会う。

これまでの学習のつながりから、 $x^2 + 2x = 5$ の解き方を考えるためには、面積図を用いればよいのではないかという意見が、すぐに生徒から出てきた。

「解 決」これまでの方法を利用して解けないか【思考：類推】

左辺を長方形の面積と見なし、正方形の面積へ変換する方法を考える。

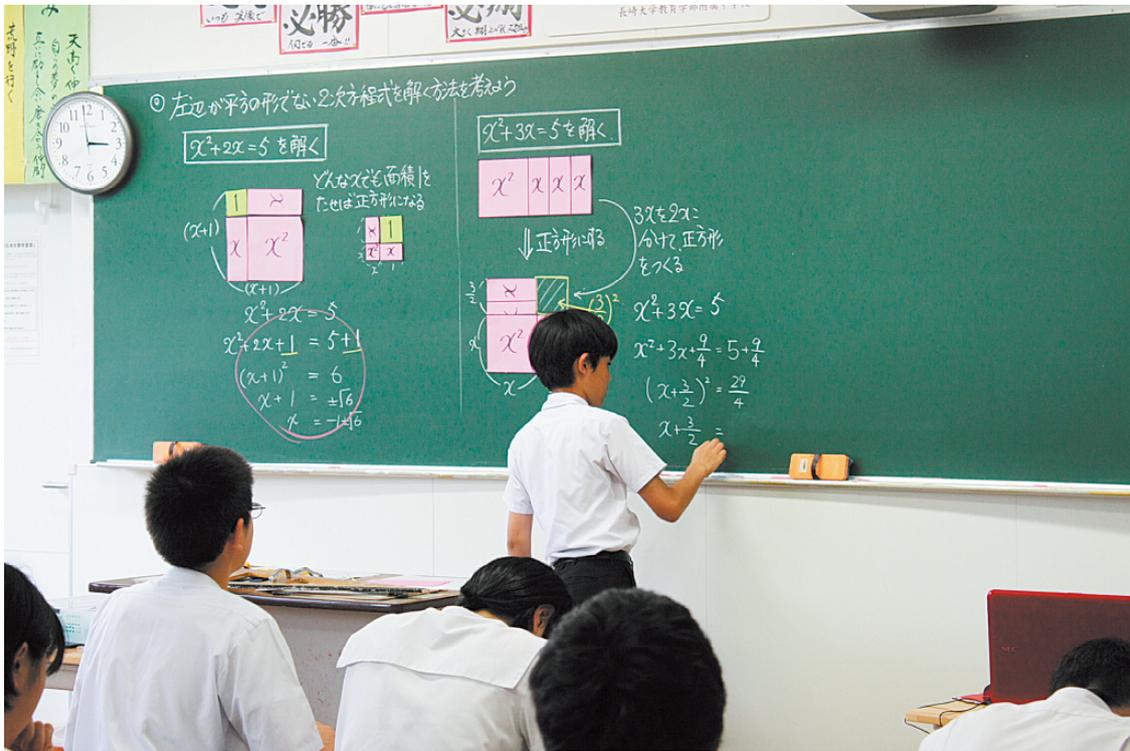
左辺 $x^2 + 2x$ について、実際に画用紙に描いた長方形を切り離し、それを操作しながら、正方形にする方法を考察した。その際、2人組で解決の方法を探る場(協働*)を設定した。さらに、どんな x でも面積1を足せば正方形に変形できることに気づかせ、右辺が5であることから、 x が一意的に定まる、すなわち、方程式の解を求めることができることを全体で確認した。

協働*について

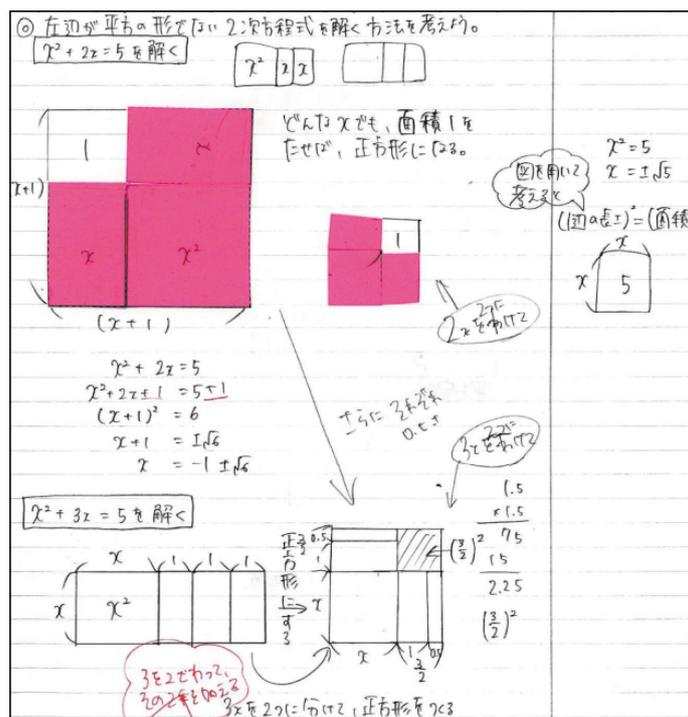
自己の考えの枠から抜け出し、他者の新しい考えに触れ、多様な考え方を比較検討していく場を「協働」とし、数学科においては、協働による学習を「目的意識を持ち、他者と関わりながら問題解決を図ることで自身の思考を深める学活動」とする。

次に、条件を変えて、 x の係数が奇数の場合 ($x^2 + 3x = 5$) について考察した。この場面で、生徒は、 $x^2 + 2x = 5$ の解決の方法と同じようにして、左辺の長方形を正方形にするには、まず x の係数を半分にすればよいということに容易に気づくであろうと予想したが、思いのほか時間を要する結果となった。しかし、協働によって解決を図ったことで、気づかなかった生徒も気づいた生徒の意見を聞きながら理解することができた。図5は、生徒の発表を基に解決の方法について全体で確認したときの様子である。

また、図6は、そのときの生徒の学習の記録である。



(図5 操作活動を基に発表する生徒の様子)



(図6 生徒の学習の記録)

「振り返り」なぜ、解決できたのか。どこで、生かせるか。

左辺に着目し、その平方完成によって、正方形の面積と辺の関係を通して平方根を利用した解法を用いることができるという解決の方法を全体で共有した。その後、左辺が $x^2 + ax$ を取り上げ、一般化を図ることを計画していたが、本時では、一般化するまでに至らなかった。それは解決の場面の操作活動において教師の予想以上の時間を要したことによる。しかし、生徒が試行錯誤しながら面積操作を繰り返す中で、長方形を半分に切ればよいということを見いだしたり、協働によって他者の考え方に納得し、自らの考えを深めたりする時間を確保することができ、生徒は実感を伴って理解することができた。

「バランス」1時間の時間配分の計画と実際

1時間の授業の時間配分を、端緒 10分→解決 30分→振り返り 10分で計画した。しかし、解決の場面において、長方形の面積を正方形の面積に変形する方法を見いだすことに予想以上の時間を要した。1時間の授業のバランスの見直しを図ることが必要である。

「有効性」生徒自身の活動による達成感

本授業では、面積図を用いて課題を解決することと関係付けて解決の見通しを立てることで、生徒が既習事項との学びのつながりを実感しながら問題解決に臨むことができた。さらに、その過程で長方形の面積を正方形の面積に変形する際に、操作活動を取り入れ、その方法について2人組で自身の考えを伝え合い、共有しながら活動を進めさせた。これらの活動を通して、生徒は、図形の操作が式変形に結びつき、新しい形の二次方程式を解くことができた、すなわち、既習の内容を用いて新たな解法を見いだすことができたという達成感を

得ることができた。左辺の一般化を次時で扱ったが、 x の係数が a に変わっても戸惑う生徒もなく、解を求めることができ、解の公式を導く学習へとつなげることができた。

3. 授業の考察

今回の授業実践は、既習の数学から解法を見いだすことをねらいとし、文字係数の演算操作で形式的なものとして捉えられがちな解の公式を導く過程を、図形の具体的な操作を通して視覚的に捉えるとともに、思考と理解を深め、次時への足がかりとすることをねらった。実際に、次時の二次方程式の解の公式を導く授業において、生徒は、係数が文字である二次方程式の場合にも、面積図を用いることで解法を導くことができた。さらに、それを演算操作と比較することによって、実感を伴って理解することができた。このことから、既習の数学とのつながりを実感しながら「類推」や「関係付ける」という思考によって新たな解法を見いだす数学的思考力を伸ばすことができたと考える。

授業後には、次のような生徒の感想が見られた。

- 長方形から正方形をつくることで解くことができるなんて面白いと思った。
- 平方根の考え方は便利だと思ったし、納得できた。
- また違った形の二次方程式も解いてみたい。

一方、今回の授業の課題としては、解決の場面における生徒の活動に時間を要し、振り返りの時間を十分に確保できなかったことが挙げられる。

4. 授業後の研究協議

この授業は、今年度の長崎大学教育学部附属中学校公開授業研究会において公開したものであり、授業後に行われた研究協議での主な内容は次のようであった。

- 本時までの授業で、正方形を使うということが定着できていた。解決の場面で、すべての生徒の x が違うところに意味があったのではないかと感じた。 x の係数が2から3に変わったときに、再度操作活動を取り入れることで考えさせると半分に切るという考えがすぐにでたのではないか。
- x の係数が、3だったら、4だったら、… a だったら、という帰納的に解法を見いだす流れを仕組む方法もある。
- 因数分解では、操作活動で、すべての長方形をそのまま使っていたため今回の「切る」という活動は難しかったようだ。
- 生徒が活動に慣れ親しむ時間をつくる。偶数から奇数ではなく、偶数から別の偶数へ、など見通しを持ちやすいようにする。

- 偶数から奇数になっても、すぐに解決の方法に気づくことができる生徒はさすがだと思った。操作活動に用いた画用紙の長方形に工夫をすると、半分に切るといふ考えが出てきやすいのではないか。

○指導助言

- ・ 式を図で表すとき、図では多様な考え方ができるが、それを式にすると一つになる、これが数学的活動ではないか。操作を式にして、式で計算すればよいということを実感させる。
- ・ 1回の授業で、生徒は一体何を学んだのか分かるような、実感できるような授業づくりをすることが大切である。
- ・ 授業のねらいを明確にすることが必要であり、1時間の授業で生徒に身に付けさせたい力を絞って、それが達成できたかどうかをきちんと評価するという授業が増えてきている。
- ・ めあてと評価の整合性を常に気がけ、授業の後生徒がどのような姿になっているかを想像し、評価することが必要である。
- ・ 言語活動の充実と数学的活動の充実で、活動自体が楽しいのではなく、数学を学ぶことが楽しいと言えるような活動を仕組む。
- ・ 今日の活動のメインは何なのか、図を分けることか、解法を見いだすことかをはっきりさせるべきである。また、図で分かったことを式にするのか式の確認を図でするのか、その点についても明確にしておくべきであった。
- ・ 既習の学習内容を基に新しいことを学習することは大切なことである。
- ・ 数学的活動を授業にどのように取り入れるか。授業を通して、生徒が分かったつもりではなく、分かったと言えるような授業づくりをする。考える根拠を持つと数学がつくられる。その視点を持つべきである。
- ・ 導入の課題をどう処理するか、それをどのように生かすのかという点から図の操作と式の関係をもう少し対応させる必要があった。
- ・ 偶数を奇数にするところが場面展開であったが、類推を促す手だてがなかった。
- ・ 物があつてはじめて式ができるので、1時間の授業で少しでもいいので操作をする題材を入れると生徒に残りやすい。

5. おわりに

1時間の授業で、生徒に身に付けさせたい力を明確にし、より効果的に数学的活動を仕組んだ授業を展開するには、単元全体の指導の見通しを持つておくことも必要である。数学的活動を実践する中で、特に留意しなければならないことは実験・操作や課題を提示して、「やってみよう」、「考えてみよう」と指示するだけの、言わば、活動を生徒に丸投げする、のではなく、活動の中で生徒の思考

を促す有効な手だてを講じることが大切である。

今回の授業実践では、これら2点について、改善すべきところが残った。今後の研究課題の一つである。学習指導要領に示されている中学校数学科の目標は

「数学的活動を通して、数量や図形などに関する基本的な概念や原理・法則について理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」

であるが、この目標を達成するために、普段の授業において、いかに題材を設定し、具体的な手だてを講じていくかを常に念頭において授業づくりを行うことの必要性と重要性を、本実践を通じて改めて痛感した。

学びの主体は生徒であり、その学びがつながり、深まり、生かされる授業スタイルを研究し、数学的活動を通して生徒の数学的な思考力や表現力を高める授業実践をさらに進めていきたい。

参考文献

- ・ 文部科学省(2008)、中学校学習指導要領解説数学編、教育出版
- ・ 藤井斉亮、俣野博他(2011)、新しい数学3、東京書籍
- ・ 峰陽児。作元浩二、山本圭介、平岡賢治(2014)、数学的活動の充実とICTの活用を取り入れた授業の考察～「協働」を通じた数学的活動～、長崎大学教育学部教育実践総合センター紀要、pp21-30