

# 自動制御の理論と応用

Automatic Control

- Theory and Application -

平成 27 年

辻 峰男

## まえがき

センサからのフィードバック信号を基に目標値通りに対象物を動作させる制御理論は多くの分野で使われている。飛行機やロケットが安定に運転できているのはこのお蔭である。電気で動く物（エレベータ、電車、電気自動車、ロボット、工作機械、エアコンなど）には必ずモータが入っているが、モータの電流、速度、位置を自由に操るには制御理論が欠かせない。自動車のエンジンの制御、化学プラントの温度や圧力の制御及び構造物の制御にも制御理論が役立っている。制御理論は数学と同じようにこれらの各分野に共通した学問である。

本テキストでは、ラプラス変換して得られる伝達関数に基づく**古典制御理論**(classical control)が中心であるが、**現代制御理論**(modern control)の出発点となる状態方程式についても基本的なことを述べている。古典制御理論というと、古いイメージであるが、むしろより基本的な制御理論と考えるべきである。古典制御理論は実際に多く使われているのである。本テキストでは、電気電子に関係の深いシステムを例題として多く取り上げ、具体的に判りやすく述べたつもりである。工学の立場から実際にどのように応用するかという点に力を入れて書いている。電気以外のシステムでも多くの制御対象は微分方程式で記述できるので、本講義で学ぶ理論を応用できる。これは先にも述べたように制御理論が数学と同じように各分野に共通した学問であることを考えれば当然のことである。

本テキストの特徴を具体的に述べるとすれば以下の点があげられる。

- (1)第1章で、最も簡単な制御対象を例題として示し、自動制御という学問はどんな内容かをおよそつかむことができるようにしている。
- (2)第3章で、広く利用されている負帰還増幅器（オペアンプ）の伝達関数に関してやや詳しく述べている。
- (3)第5章は、周波数応答の物理的な意味を理解しやすいように、フェーザを用いた交流回路理論から出発している。電気系の学科では、1年次に既に交流理論を履修していると思われるので、理解が得やすいだろう。
- (4)第6章で、安定判別の応用例として不安定現象を利用する発振器を取り上げている。またモータの例を用いて非線形システムを線形化して安定判別する方法を示している。
- (5)第7章で、ナイキストの安定判別法を説明するが、従来の教科書では見られない伝達関数の軌跡と安定条件の説明を行って、理解が得やすいようにしている。
- (6)第9章で、PID制御の説明を行うが、ここで定常偏差に関する内部モデル原理も説明している。
- (7)第11章で、制御系の設計法を説明するが、具体的なモータの電流、速度、位置制御系の例を取り上げている。また、PLL回路の設計法も紹介している。

# 目次

第 1 章 自動制御で何をするのか？	1
1.1 制御システムの数学的表現(モデリング)	2
1.2 ブロック線図	3
1.3 時間応答	4
1.4 周波数応答	5
1.5 制御工学の歴史	8
第 2 章 ラプラス変換	
2.1 ラプラス変換の定義	10
2.2 ラプラス変換の性質	16
2.3 ラプラス変換とフーリエ変換の関係	19
第 3 章 システムの表現－伝達関数とブロック線図－	
3.1 線形システムの伝達関数	21
3.2 ブロック線図	27
3.3 状態方程式	34
第 4 章 時間応答	
4.1 1次遅れ要素の時間応答	38
4.2 2次遅れ要素の時間応答	41
4.3 零点の影響	46
4.4 むだ時間要素の時間応答	47
4.5 インパルス応答	49
4.6 状態方程式による応答の計算	51
第 5 章 周波数応答	
5.1 周波数応答とは？	56
5.2 1次遅れ要素の周波数応答	59
5.3 積分要素と微分要素の周波数応答	62
5.4 2次要素の周波数応答	64
5.5 むだ時間要素の周波数応答	67
5.6 一般の伝達関数の周波数応答の描き方	68
第 6 章 フィードバック制御系の安定判別 I	
6.1 伝達関数と安定条件	72
6.2 ラウスの安定判別法	77
6.3 状態方程式の安定判別	85
6.4 非線形システムの安定判別	86

第 7 章 フィードバック制御系の安定判別 II	
7.1 ナイキストの安定判別法	90
7.2 むだ時間を含むシステムの安定条件	101
7.3 ボード線図による安定判別法	102
7.4 ニコルス線図	106
第 8 章 根軌跡	
8.1 特性方程式の根と応答の関係	110
8.2 根軌跡の描き方	114
第 9 章 PID 制御	
9.1 PID 制御とは？	121
9.2 定常特性	123
9.3 PI 制御器を含む制御系の状態方程式	131
第 10 章 制御系の設計 I	
10.1 制御系に要求されるもの	136
10.2 両立できない制御性能	136
10.3 制御系の設計指針	138
10.4 補償要素と制御系の設計	141
10.5 2自由度制御系	151
第 11 章 制御系の設計 II	
11.1 電動機制御系の設計	156
11.2 プロセス制御系の設計	163
11.3 PLL 周波数シンセサイザの設計	168
参考文献	172
索引	173

# 第1章 自動制御で何をするのか？

制御(control)とは、我々が望むとおりの運転状態にすることである。例えば、エアコンで部屋の温度を一定に保つこと、自動的にドアが開閉すること、エレベータがきちんと床面と同じ高さに止まること、電源の周波数や電圧を一定に保つこと、ロボットが決められた位置に動くこと、飛行機が安定に飛行することなど。人手で行う制御を**手動制御(manual control)**といい、コンピュータや機械を使って行う制御を**自動制御(automatic control)**という。上記の例は全て自動制御である。一方、自動車の運転は、手動制御である（自動車そのものには多くの自動制御装置が使われている）。

エアコンを例にとり、自動制御をもう少し詳しく考えてみよう。我々は温度の設定を行うが、エアコンには温度センサが付いていて実際の部屋の温度を計測している。エアコンは温度の設定値と実際値との差を基に熱の量を加減して部屋の温度を一定に保っているのである。図 1-1 に信号の流れを示す。矢印の方向に信号が伝わっていく。このように、センサからの情報を利用する制御を、**閉ループ制御(closed loop control)**または**フィードバック制御(feedback control)**という。閉ループとは、エアコンが加えた熱が部屋に行き渡り、それがセンサから検出されてエアコンに戻ることでループを形成していることを意味する（図 1-1 参照）。フィードバックとは、目標と結果に差があるとき、この差を小さくするように働く機能のことで、厳密には**負帰還(negative feedback)**をさす。**正帰還(positive feedback)**は、差を益々大きくする機能で、普通は望ましくない。

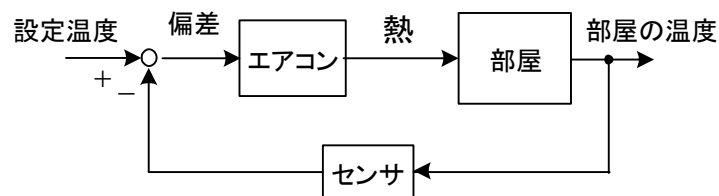


図 1-1 エアコンによる温度制御の信号の流れ

一方、**開ループ制御(open loop control)**と呼ばれるものもある。開ループ制御ではセンサからの情報を使用しない。これには時間や条件によってスイッチを切り替える**シーケンス制御**と、結果を予測して制御対象に何らかの量を加える**フィードフォワード制御(feed-forward control)**がある。シーケンス制御には、信号機、ネオンサイン、洗濯機などがある。信号機は決められた時間に点滅するもので、交通情報を検出している訳ではない。フィードフォワード制御は、図 1-1 でセンサのないエアコンを考えればよく、正確ではないが経験や数式モデルにより、ある程度の目的は達成できる。フィードフォワード制御はフィードバック制御と組み合わせて利用されることもある。この講義では主として閉ループ制御を対象とする。

図 1-2 に示す電気回路の電流フィードバック制御を考えることで、自動制御の概要をつかんで欲しい。完全に分る必要はありません。まず、言葉の定義をしておこう。

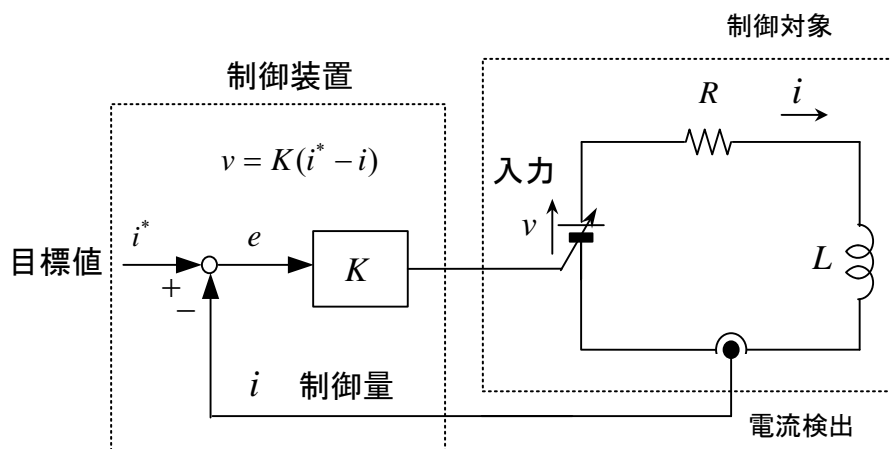


図 1-2 RL 回路の電流制御システム

**制御対象**(controlled system)：制御されるもの。

**制御装置**(controller)：制御対象を制御する装置で、コンピュータや電子回路で組み立てられる部分と制御対象の入力部分（**操作部**:final control element）よりなる。しかし、本テキストでは操作部（ここでは電源）は制御対象に含めて考えることとする。

**制御量**(controlled variable)：制御すべき量でセンサを用いて測定される。制御対象の出力なので、単に**出力**(output)と言うこともある。（ここでは、電流  $i$  である）

**操作量**(manipulated variable)：制御を行うため制御対象に加える量。制御対象の入力なので、単に**入力**(input)と言うこともある。（ここでは、電源電圧  $v$  である。直流電圧源の記号で書いているが自由に電圧を変えられるものとする。）

**目標値**(desired value)：制御量の目標値として外部から与えられる量。**設定値**とか**指令値**と言われることもある。（ここでは、電流指令  $i^*$ ）

**フィードバック信号**(feedback signal)：制御装置にフィードバックされる信号（ここでは、電流  $i$ ）。制御量以外もフィードバックされることがある。

**偏差**(error)：目標値と制御量の差（ここでは、 $e = i^* - i$ ）

### 1.1 制御システムの数学的表現（モデリング）

制御対象は一般に常微分方程式で記述される。この例では、次式となる。

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (1-1)$$

制御装置は、目標値とフィードバック信号を基に制御のための演算を行い、操作量を可変電圧電源より出力する。演算は、アナログまたはデジタルの電子回路で行われる。ここでは、最も簡単な比例制御を考える。 $i^* > 0$ 、 $i^* > i$  の場合には電流の偏差が大き

いほど、電源電圧を高くして電流を増やさないといけないから

$$v(t) = K(i^*(t) - i(t)) \quad (1-2)$$

としよう。 $i^*(t) > i(t)$  なら  $v(t) > 0$ ,  $i^*(t) < i(t)$  なら  $v(t) < 0$  とすべきなので、物理的に  $K > 0$  でないと制御はうまくいかない。指令値  $i^*(t)$  が負の場合も(1-2)でよい。

## 1.2 ブロック線図

ラプラス変換して、初期値を零と置くことにより得られる関係式から、ブロック線図を書くことができる。初期値が0の場合のラプラス変換は、大変容易で、

$$f(t) \rightarrow F(s), \quad \frac{df(t)}{dt} \rightarrow sF(s), \quad \frac{d^2f(t)}{dt^2} \rightarrow s^2F(s)$$

と機械的に置き換えるだけでよい。これは、交流回路のフェーザ表示で  $j\omega$  を  $s$  と置き換えたものと同じ形である。 $L[f(t)] = F(s)$  と書き、 $L$  はラプラス変換を表す。

(1-1)をラプラス変換して、初期値を0と置くと

$$V(s) = LsI(s) + RI(s) \quad (1-3)$$

$$\therefore \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls} \quad (1-4)$$

ラプラス変換した量で、出力/入力は**伝達関数**(transfer function)と呼ばれ、(1-4)は制御対象の伝達関数である。(1-2)をラプラス変換して、制御装置の式は

$$V(s) = K(I^*(s) - I(s)) \quad (1-5)$$

となる。(1-4), (1-5)を基に次の**ブロック線図**が得られる。

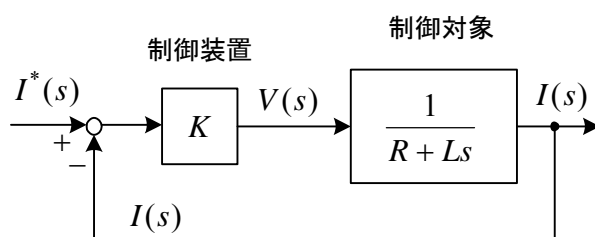


図 1-3 図 1-2 のブロック線図

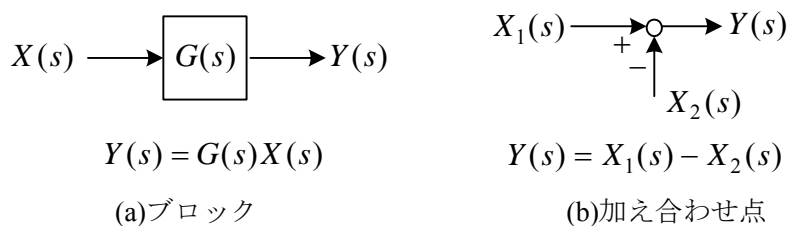


図 1-4 ブロック線図の基本

(注) 線上の値はちょうど電圧のようにどこでも等しい。図 1-3 の  $I(s)$  を見よ。

(1-3),(1-5)より，出力/目標値である**閉ループ伝達関数**(closed loop transfer function)が次のように得られる。

$$G_{cl}(s) = \frac{I(s)}{I^*(s)} = \frac{K}{R + K + Ls} \quad (1-6)$$

閉ループ伝達関数の分母を零と置いたものは，**特性方程式**(characteristic equation)と呼ばれ，安定性を知る上で極めて重要である。

$$\text{特性方程式： } R + K + Ls = 0 \quad (1-7)$$

(1-7)を解いて，**特性方程式の根**(characteristic root)  $s$  は次式となる。

$$s = -\frac{R + K}{L} \quad (1-8)$$

一般に，特性方程式の全ての根の実部が負であれば（全ての根が複素平面の左半平面内にあれば）制御系は安定である。この場合， $L > 0$  だから，安定条件は次式で与えられる。

$$R + K > 0 \quad (1-9)$$

抵抗  $R$  は正なので， $K$  が正であれば十分に安定であるが， $K$  が  $K < -R$  の場合には不安定になる。

### 1.3 時間応答

図 1-2 の制御系で，設定値（指令値） $i^*$ を  $t=0$  で 0 から 1 に階段状に変化させたときの実際の電流  $i$  を求めてみよう。これを**ステップ応答**(step response)と言う。この求め方には，2つの方法が考えられる。1つは微分方程式を直接解く方法，もう1つはラプラス逆変換より求める方法である。ここでは，ラプラス逆変換による方法を述べる。

$i^* = 1$  であるから，そのラプラス変換  $I^*(s)$  は次式で与えられる。

$$I^*(s) = \frac{1}{s} \quad (1-10)$$

(1-6)より，

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{K}{R + K + Ls} I^*(s) = \frac{K}{s(R + K + Ls)} \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b}{R + K + Ls} \quad (\text{部分分数展開}) \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b/L}{s + \frac{R + K}{L}} \end{aligned} \quad (1-11)$$



$s$  についての恒等式を解いて,

$$K = a(R + K + Ls) + bs \quad \therefore a = \frac{K}{R + K}, b = -\frac{LK}{R + K} \quad (1-12)$$

(1-11)を, ラプラス逆変換して,

$$i = \frac{K}{R + K}(1 - e^{-(R+K)t/L}) \quad (1-13)$$

を得る。なお, 電流の初期条件は伝達関数(1-6)を求めるときに  $0$  としていたので, これが仮定されている。 $L > 0$  であるから  $R + K > 0$  であれば,  $t \rightarrow \infty$  のとき,

$$i(\infty) = \frac{K}{R + K}$$

に収束する(安定である)。しかし,  $R + K < 0$  であれば,  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $i \rightarrow -\infty$  となって発散する(不安定である)。(1-8)の特性方程式の根で過渡応答が決まるので, この実部が全て負であれば安定となることが理解できる。実根の場合には, 実部という表現は適さないが, 一般の複素共役根の場合も含め, 一般にこのことが言える。 $K < -R$  の場合には,  $i^* > i$  であるとき, 電流を増やすには正の電圧を加えないといけないが,  $K$  が負だから負の電圧を加えることになりますます電流が減ってしまい不安定となる。

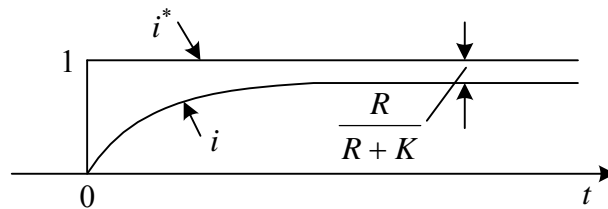


図 1-5 電流のステップ応答(安定な場合)

$t=0$  で  $i^* = 0$  から  $1$  への変化に対する電流のステップ応答を図 1-5 に示している。この場合, 定常値が偏差  $R/(R + K)$  を持ち, これは比例制御の欠点である。ただし,  $K$  を大きく選ぶと偏差も小さくなる。

#### 1.4 周波数応答

これまでに, 制御対象の伝達関数や閉ループ伝達関数を紹介した。他にも, いろんな伝達関数がある。これらは, ラプラス変換された入出力の比であり, 入出力の選び方でいろんな伝達関数が作れるからである。ただ, それらには共通の物理的意味がある。

ここでは,  $s = j\omega$  ( $\omega$  は角周波数 (rad/s)) とおくことにより,  $\omega$  に対する伝達関数のグラフを書いて, その意味を考えてみる。最も簡単な, 制御対象だけの伝達関数(1-4)を取り

上げる。

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls} \quad (1-14)$$

$s = j\omega$  とおくと,

$$G(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} \quad (1-15)$$

となる。この場合、 $G(j\omega)$  は、回路のインピーダンスの逆数（アドミタンス）となっていることが判る。 $G(j\omega)$  は複素数であり、大きさと位相に分けて極形式で書ける。 $\angle$  は  $\arg$  と同じ意味で使う。 $|G(j\omega)| \equiv r$ ,  $\angle G(j\omega) \equiv \theta$  とおく。 $\equiv$  は定義を意味する。

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \equiv r e^{j\theta} \quad (1-16)$$

$\omega$  を変化させて  $G(j\omega)$  の軌跡をそのまま複素平面上に描いたものを **ナイキスト線図(ベクトル軌跡)** という。 $\omega$  を横軸に対数目盛りで取り、縦軸に大きさ(ゲインという)と位相角を書いたグラフを **ボード線図** という。このとき、**ゲイン  $g$**  は次式に示す **デシベル値(dB)** を用いる。

$$g \equiv 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad [\text{dB}] \quad (1-17)$$

(1-15)の場合,

$$g = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad [\text{dB}] \quad (1-18)$$

上式より、ゲインは次のように近似できる。

$$g \begin{cases} \approx 20 \log_{10}(1/R) & (\omega \ll R/L) \\ \approx 20 \log_{10}(1/R) - 10 \log_{10} 2 & (\omega = R/L) \quad (\text{折点角周波数}) \\ \approx 20 \log_{10}(1/(\omega L)) & (R/L \ll \omega) \end{cases} \quad (1-19)$$

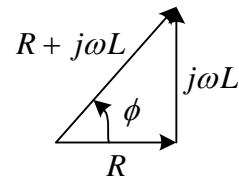
$10 \log_{10} 2 \approx 3 \text{ dB}$  であるから、 $\omega = R/L$  では 3 dB 小さくなる。 $R/L \ll \omega$  では、 $\omega$  が 10 倍になれば、ゲインは 20 dB 低下する。なぜなら、

$$20 \log_{10} \frac{1}{10\omega_0 L} = 20 \log_{10} \frac{1}{10} + 20 \log_{10} \frac{1}{\omega_0 L} = -20 + 20 \log_{10} \frac{1}{\omega_0 L} \quad [\text{dB}] \quad (1-20)$$

であるから。これを、 $-20 \text{ dB/dec}$  と書く。dec は decade (デカード) の略で、10 の 1 組の意味がある。

一方、**位相** は、次式のように近似できる。 $\angle G(j\omega) = \theta = -\phi$  である。

$$\angle G(j\omega) \begin{cases} \approx 0 & (\omega \ll R/L) \\ = -45^\circ & (\omega = R/L) \\ \approx -90^\circ & (R/L \ll \omega) \end{cases} \quad (1-21)$$



これから、ボード線図の概略図が以下のように書ける ( $R < 1$  の場合)。ナイキスト線図は半円になる。

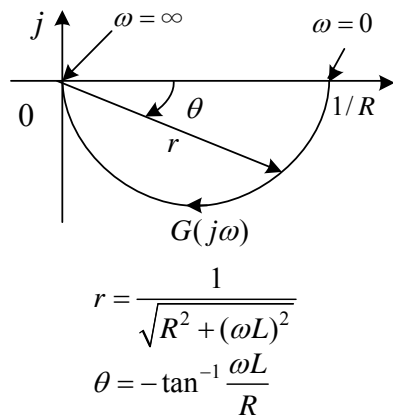


図 1-6 ナイキスト線図

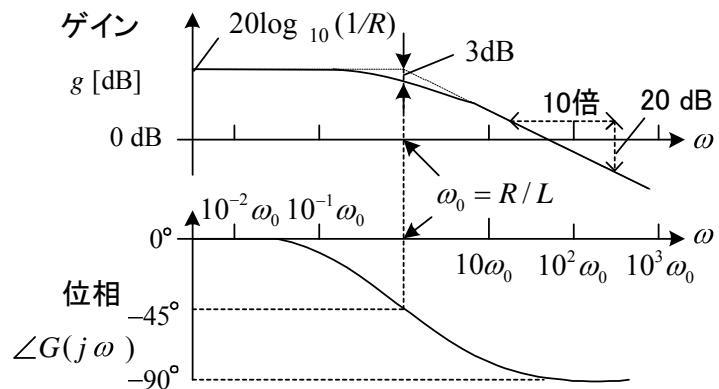
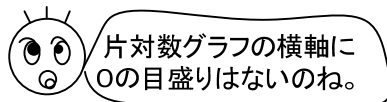


図 1-7 ボード線図



$x = \log_{10} \omega$  として、 $x$ で横軸の目盛をつけると等間隔

図 1-6 のナイキスト線図や図 1-7 ボード線図は、以下のことを表している。

- (1) 入力（この場合電源電圧  $v$ ）として正弦波を加えたとき、出力（この場合電流  $i$ ）も正弦波となるが、伝達関数の絶対値  $r$  やゲイン  $g$  は入出力の振幅の比、 $\angle G = \theta$  は入出力の位相のずれを表す。ナイキスト線図やボード線図は、いろいろの角周波数  $\omega$  の正弦波を別々に回路に加えたときの出力がどのようになるかを一点一点表わしている。
- (2) 角周波数  $\omega$  が高い正弦波入力の場合、 $\omega L$  が大きくなり、電流が流れにくくなって、ゲイン  $g$  は低下する。すなわち、入力の振幅に対する出力の振幅が小さく、信号が伝わらない。ゲインが 0dB のとき、入力と出力の振幅の比が等しく  $r = 1$  である。
- (3) 角周波数  $\omega$  が高い正弦波入力の場合には、出力の位相が  $90^\circ$  遅れるようになる。これは、コイルの影響が強くなって電圧に対し電流の位相が  $90^\circ$  遅れるようになるということを意味する。逆に、角周波数  $\omega$  が低い正弦波入力の場合にはコイルの影響は小さく抵抗だけの回路とみなせる。

## 1.5 制御工学の歴史

	年	事項
古典制御理論	1788	Watt 蒸気機関の遠心调速機の発明 1868年 電磁気学で有名な Maxwell (マクスウェル) が安定性を調べ、特性方程式の根の実部が負であればシステムは安定であることを示した。
	1877	Routh (ラウス) 安定判別法 一般的な安定判別法の開発は、懸賞問題となっていた。これに勝利したのがケンブリッジ大学でマクスウェルと同級生であったラウスである。
	1892	Lyapunov (リアプノフ) 安定判別法 非線形システムにも使用可能
	1895	Hurwitz (フルビッツ) 安定判別法 ラウスの安定判別法と本質的に同じもの。
	1932	Nyquist (ナイキスト) 安定性 (ナイキスト線図) フィードバック増幅回路
	1936	Callender (カレンダー) PID 制御 現在でも大活躍している制御法
	1940	Bode (ボードまたはボーデ) 周波数領域の理論 (ボード線図)
	1942	Ziegler-Nichols (ジエグラ-ニコルス) PID 制御の調整法 (限界感度法)
	1947	Nichols (ニコルス) ニコルス線図
	1948	Evans (エバンズ) 根軌跡法
現代制御理論	1954	Bellman (ベルマン) 動的計画法
	1956	Pontryagin (ポントリャーギン) 最大原理
	1960	Kalman (カルマン) 最適制御理論, カルマンフィルタ 現代制御理論の中心的存在で、システムの微分方程式 (状態方程式) をラプラス変換しないで、直接時間領域で解析・設計する理論である。制御の性能を表すのに状態変数の 2 乗積分である評価関数を設定し、それを最小にするような制御系を設計する。全ての状態量をセンサで検出してフィードバックすることが前提となっている。
	1964	Luenberger (ルーエンバーガ) オブザーバ理論 システムの微分方程式 (状態方程式) を利用して、センサで検出された状態量から検出できない状態量を推定する。一部の状態量しか検出できないシステムを最適制御する場合などに利用できる。
	1965	Astrom 同定法 同定とは未知のパラメータを推定すること。
	1965	Zadeh (ザデー) ファジィ集合
	1965	Butchart リアプノフの安定論を用いた適応制御
ポスト現代制御理論	1973	Carroll 適応観測器
	1989	Doyle (ドイル) $H_{\infty}$ 制御 (ロバスト制御) $H$ 無限大と読む。 $H$ は Hardy 空間のことで、この無限大次数ノルムを用いることに由来している。ロバスト(robust)は頑丈なとか強いとかの意味があり、制御対象のパラメータ変動が起こっても制御性能を所定の値または範囲に保つように補償器を設計する理論である。これは、古典制御でも行われていたことであるが、 $H_{\infty}$ 制御ではこれをシステムティックに (系統的に) 行う。理論は難解であるが、Matlab などの市販ソフトで設計できる。
	現在	ロバスト制御をはじめ、2 自由度制御、モデル予測制御、非線形制御、LMI (線形行列不等式) に基づく制御、学習・適応制御、AI (人工知能)、現代及びポスト現代制御理論の実システムへの応用などの研究が進展している。

文献 (10), (13) 参照

### 蒸気機関の遠心调速機（ガバナー）

蒸気が蒸気機関に多く流入すると蒸気機関が出すトルクが大きくなって回転速度を上昇させようとする。いま負荷が軽くなって、回転が速くなると遠心力によって遠心錘（振り子）が上昇して蒸気弁は閉じる向きに動く。この結果トルクが低くなるので、速度の上昇を抑えようとする。逆に負荷が重くなって、回転が遅くなると、遠心錘が下降して蒸気弁を開き、回転速度を上昇させようとする。このようにガバナーは自動的に速度を一定に制御しようとするもので、これはフィードバック制御である。精度を上げるために遠心錘の感度をあげると振動的になり、ついに不安定になることがしばしばあった。

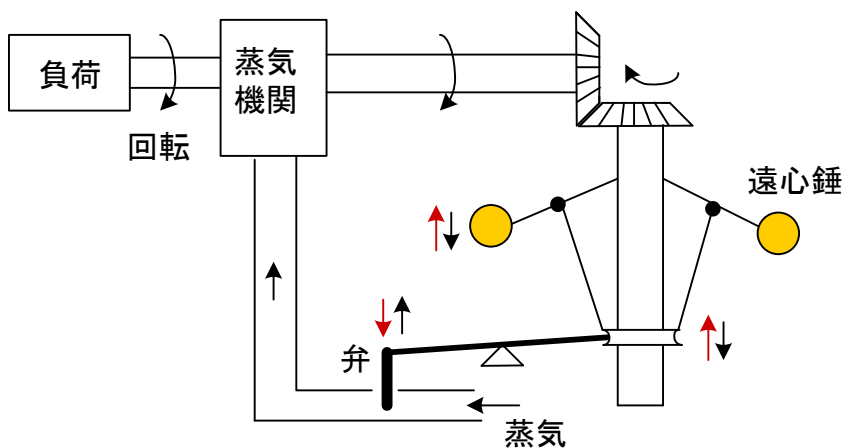


図 1-8 遠心调速機

## 第2章 ラプラス変換

ラプラス変換は、微分方程式を解いて応答を求める場合や伝達関数を求める場合に必要となる。自動制御では欠くことのできない数学であり、本書ではその基本公式を述べる。

### 2.1 ラプラス変換の定義

$f(t)$  が時間  $t$  の関数で  $t < 0$  のとき  $f(t) = 0$  とし、

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2-1)$$

が存在するものとする。このとき、 $F(s)$  を  $f(t)$  のラプラス変換(Laplace transform)と呼び、 $f(t)$  から  $F(s)$  にラプラス変換するという。ここで、 $s$  は  $s = \sigma + j\omega$  なる複素数である。(2-1)を

$$F(s) = L[f(t)] \quad (2-2)$$

と略記することがある。

(例題 2-1)  $f(t) = 1$  のラプラス変換を求めよ。

$$\text{(解)} \quad L[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$$

となる。ここで、 $s = \sigma + j\omega$  で、積分が収束するように  $\sigma$  を選ぶ。

$$e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

であるから、 $\sigma > 0$  とすればよい。このとき、次式となる。

$$L[1] = \frac{1}{s}$$

\* 以上の様に、 $\sigma$  は積分が収束するように選ばれるが、実際にラプラス変換を利用する場合には、変換表を用いるので  $\sigma$  を意識することはないであろう。

(例題 2-2)  $f(t) = \sin at$  のラプラス変換を求めよ。

$$\text{(解)} \quad e^{jat} = \cos at + j \sin at \text{ であるから, } \sin at = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j}$$

である。ゆえに

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left( \left[ \frac{e^{(ja-s)t}}{ja-s} \right]_0^{\infty} - \left[ \frac{e^{-(ja+s)t}}{-ja-s} \right]_0^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-ja} - \frac{1}{s+ja} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

(問題 2-1)  $L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$  を証明せよ。収束条件も求めよ。

(答) 収束条件は  $\text{Re}[a+s] > 0$  ( $\text{Re}[z]$  は  $z$  の実部を表す。)

(問題 2-2)  $L[t] = \frac{1}{s^2}$  を証明せよ。収束条件も求めよ。

(答)  $L[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[ -t \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$

部分積分を利用する。収束条件は  $\text{Re}[s] > 0$

表関数  $f(t)$  と裏関数  $F(s)$  とは 1 対 1 に対応していると考えて良く、 $F(s)$  から  $f(t)$  を求めることを **ラプラス逆変換**(inverse Laplace transform) といい、これは一般に、

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad c > 0 \quad (2-3)$$

で求められる。 $L^{-1}$  はラプラス逆変換を表す。しかし、通常の有理関数の場合は(2-3)を用いる必要はなく、 $F(s)$  を **部分分数展開**(partial fraction expansion) して求める方法が簡単である。

下記の  $F(s)$  の例で説明する。 $F(s)$  の分母は因数分解して、次式で表せるとする。

$$F(s) = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)^2} \quad (2-4)$$

$a, b, c, d$  は、0 でもよい。 $s_1 = 0$  や  $s_1, s_2$  が共役複素数の場合もよい。

$F(s)$  の **部分分数展開** は次式となる。重根の場合はそれより次数の低い項も有り得る。

$$F(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{(s-s_3)^2} + \frac{D}{s-s_3} \quad (2-5)$$

$A, B, C, D$  は以下のようにして求める。先に  $\left| \right.$  の左の演算をした後で根を代入する。例えば、(2-5)の両辺に  $(s-s_1)$  を掛けると、右辺の  $A$  の項だけが約分でき、後で  $s = s_1$  を代入したら、それ以外は 0 となるので、結局右辺は  $A$  となる。 $D$  は微分した後で  $s = s_3$  を代入する。

$$A = (s-s_1)F(s) \Big|_{s=s_1}, \quad B = (s-s_2)F(s) \Big|_{s=s_2}$$

$$C = (s - s_3)^2 F(s) \Big|_{s=s_3}, \quad D = \frac{d}{ds} \left\{ (s - s_3)^2 F(s) \right\} \Big|_{s=s_3} \quad (2-6)$$

後述のラプラス変換表を用いて、(2-5)の逆変換は次式となる。

$$f(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Cte^{s_3 t} + De^{s_3 t} \quad (2-7)$$

分母が  $(s - s_3)^2$  の代わりに  $(s - s_3)^3$  となっていたら、

$$F(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{(s - s_3)^3} + \frac{D}{(s - s_3)^2} + \frac{E}{s - s_3}$$

となる。C は  $(s - s_3)^3 F(s)$  を求め  $s = s_3$  とおいて、D は  $(s - s_3)^3 F(s)$  を  $s$  で微分して  $s = s_3$  とおいて、E は  $(s - s_3)^3 F(s) / 2!$  を  $s$  で2階微分し  $s = s_3$  とおいて求められる。

重根がなければ計算は容易である。なお、係数は**恒等式**(identical equation)から求めることもできる。基本的な関数のラプラス変換表を表 2-1 に示す。これらの表を利用すると必ずしも部分分数に分ける必要がない場合もある。表中、

**単位ステップ関数**(unit step function)は

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

で定義される。ラプラス変換は  $0 \leq t < \infty$  で積分するため、実質的に1のラプラス変換と同じものとなる。(2-1)の定義では、厳密には1は許されず  $U(t)$  に統一すべきだが、簡単のため良く使用される。

また、**単位インパルス関数**(unit impulse function)は

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2-9)$$

$$\text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-10)$$

で定義される。

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt} \quad (2-11)$$

の関係がある。制御では  $\delta$  関数を  $t \geq 0$  側で考える(回路では-0 から+0 の範囲)。

単位インパルス関数のラプラス変換は次式で求まる。

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t) e^0 dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



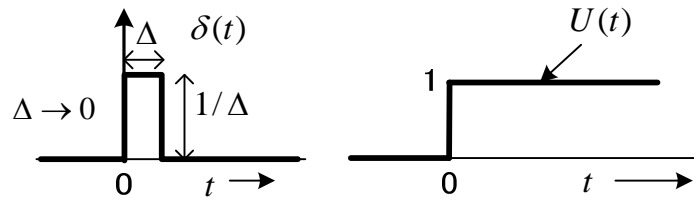


図 2-1 単位インパルス関数  $\delta(t)$  と単位ステップ関数  $U(t)$

表 2-1 ラプラス変換表 (table of Laplace transforms)

(厳密には,  $f(t)$  は  $t < 0$  で 0 でなくてはならないから,  $f(t)U(t)$  と書くべきである。)

時間関数 $f(t)$	ラプラス変換 $F(s)$
単位インパルス関数 $\delta(t)$	1
単位ステップ関数 $U(t)$ または 1	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$ , $t e^{-at}$ ( $a$ は複素数でもよい)	$\frac{1}{s+a}$ , $\frac{1}{(s+a)^2}$
$t$ , $t^2$ , $t^n$	$\frac{1}{s^2}$ , $\frac{2}{s^3}$ , $\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} [c \cos \beta t + (d + \alpha c) \frac{1}{\beta} \sin \beta t]$ $\alpha = -\frac{a}{2}$ , $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 < 4b$ ) 極 $\alpha \pm j\beta$
$ce^{\alpha t} + (d + \alpha c)te^{\alpha t}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 = 4b$ ) 極 $\alpha$ (重根)
$(\frac{c}{2} + \frac{d + \alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha + \gamma)t} + (\frac{c}{2} - \frac{d + \alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha - \gamma)t}$ $\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 > 4b$ ) 極 $\alpha \pm \gamma$

(例題 2-3)  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$  としたとき,  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  を求めよ。

(解) 部分分数展開して

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+3}$$

とおける。

$a$  は,  $F(s)$  の両辺に, その項の分母である  $s$  を掛けることで求まる。

$$\frac{s+2}{\cancel{s}(s+1)(s+3)} \cancel{s} = \frac{a}{\cancel{s}} \cancel{s} + \frac{b}{s+1} s + \frac{c}{s+3} s$$

両辺で  $s=0$  とおいて,  $\frac{2}{1 \times 3} = a \quad \therefore a = \frac{2}{3}$

$b$  は,  $F(s)$  の両辺に, その項の分母である  $s+1$  を掛けることで求まる。

$$\frac{s+2}{s(\cancel{s+1})(s+3)} (\cancel{s+1}) = \frac{a}{s} (\cancel{s+1}) + \frac{b}{\cancel{s+1}} (\cancel{s+1}) + \frac{c}{s+3} (\cancel{s+1})$$

両辺で  $s=-1$  とおいて,  $\frac{1}{(-1) \times 2} = b \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$

同様に,  $c$  は  $F(s)$  の両辺に, その項の分母である  $s+3$  を掛け, 極  $s=-3$  を代入して

$$c = \frac{-1}{(-3) \times (-2)} = -\frac{1}{6}$$

以上により,

$$F(s) = \frac{2}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{6(s+3)}$$

逆ラプラス変換して,

$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

\* 部分分数展開の係数は恒等式で求めることもできるが,  $s$  以外に数字しかない場合には上記の方法が簡単である。要するに, 係数はその極 (分母を 0 にする値) を左辺に代入するだけで求まる。その際, 0 となる項は省く。

(例題 2-4)  $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$  のとき, ラプラス逆変換して  $f(t)$  を求める。

部分分数展開して,

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{s+2} \quad \text{①}$$

$a$  は, (2-6)の公式を利用して

$$a = \frac{d}{ds} \left\{ s^2 F(s) \right\} \Big|_{s=0} = \frac{-(s+1)-(s+2)}{(s+1)^2(s+2)^2} \Big|_{s=0} = -\frac{3}{4}$$

$b$  は、両辺に  $s^2$  を掛けて、 $s=0$  を代入することで

$$b=1/2$$

$c$  は、両辺に  $s+1$  を掛けて、 $s=-1$  とおいて  $c = \frac{1}{(-1)^2 \times 1} = 1$

$d$  は、両辺に  $s+2$  を掛けて、 $s=-2$  とおいて  $d = -\frac{1}{4}$

逆変換して  $f(t)$  が、以下のように求まる。

$$f(t) = -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

(例題 2-5)  $F(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b}$  としたとき、 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  を求めよ。

(解) (i)  $a^2 - 4b < 0$  のとき

分母を 0 とした根は、 $s = \frac{-a \pm j\sqrt{4b-a^2}}{2} \equiv \alpha \pm j\beta$  とすると、部分分数展開して

$$F(s) = \frac{A}{s-\alpha-j\beta} + \frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

$$\text{ここで、} A = (s-\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha+j\beta} = \frac{cs+d}{s-\alpha+j\beta}\Big|_{s=\alpha+j\beta} = \frac{c(\alpha+j\beta)+d}{2j\beta}$$

$$B = (s-\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha-j\beta} = \frac{cs+d}{s-\alpha-j\beta}\Big|_{s=\alpha-j\beta} = \frac{c(\alpha-j\beta)+d}{-2j\beta}$$

逆変換して、 $f(t) = Ae^{(\alpha+j\beta)t} + Be^{(\alpha-j\beta)t}$

$$= e^{\alpha t} (A \cos \beta t + jA \sin \beta t + B \cos \beta t - jB \sin \beta t)$$

$$= e^{\alpha t} \{ (A+B) \cos \beta t + j(A-B) \sin \beta t \}$$

$$= e^{\alpha t} \left\{ c \cos \beta t + \frac{d+\alpha c}{\beta} \sin \beta t \right\}$$

(ii)  $a^2 - 4b = 0$  のとき

分母を 0 とした根は、 $s = -a/2 \equiv \alpha$  (重根) であり、部分分数展開して

$$F(s) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{(s-\alpha)^2}$$

とおける。恒等式を利用して、 $cs+d = A(s-\alpha) + B$

$$\therefore A = c, B = \alpha c + d$$

$$\text{逆変換して, } f(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} = ce^{\alpha t} + (d + \alpha c)te^{\alpha t}$$

(問題 2-3) (例題 2-5)で,  $a^2 - 4b > 0$  のとき  $f(t)$  を求めよ。

(解) 表 2-1 を参照のこと。

## 2.2 ラプラス変換の性質

ラプラス変換の演算に関しては以下のような性質がある。ただし,

$$L[f(t)] = F(s), L[g(t)] = G(s)$$

とする。

(i) ラプラス変換および逆変換は**重ね合わせ**(superposition)が成り立ち線形変換である。定数は前に出せる。加算減算のラプラス変換は分けてよい。 $a, b$  を定数とすれば,

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)] \quad (2-12)$$

また,

$$L^{-1}[aF(s) + bG(s)] = aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[G(s)] \quad (2-13)$$

(ii) 時間推移(time delay)

$$L[f(t-T)] = e^{-sT} F(s) \quad (2-14)$$

ただし,  $T$ : 定数

(iii) 相似定理 (time scaling)

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2-15)$$

ただし,  $a$ : 定数

(iv) 導関数 (differentiation)

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (2-16)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2-17)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2-18)$$

ただし,  $f^{(k)}(0)$  は,  $f(t)$  を  $k$  回微分した導関数の  $t=0$  での値である。

(v) 積分関数 (integration)

$$L\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \quad (2-19)$$

ただし,  $f^{(-1)}(0) \equiv \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau$  とおく。  $f(\tau)$  が電流なら  $f^{(-1)}(0)$  は電荷の初期値。

(vi) 相乗定理 (convolution)

$$L\left[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau\right] = L\left[\int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau\right] = G(s)U(s) \quad (2-20)$$

(vii) 最終値の定理 (final-value theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (2-21)$$

$t \rightarrow \infty$  のとき  $f(t)$  の極限值が存在するとき, すなわち  $sF(s)$  の極の実部が全て負のとき。

(viii) 初期値の定理 (initial-value theorem)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (2-22)$$

(例題 2-6)  $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$  を証明せよ。

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

(例題 2-7)  $L\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$  を証明せよ。

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad L\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= L\left[\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} e^{-st} dt \\ &= \frac{f^{(-1)}(0)}{s} + \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \end{aligned}$$

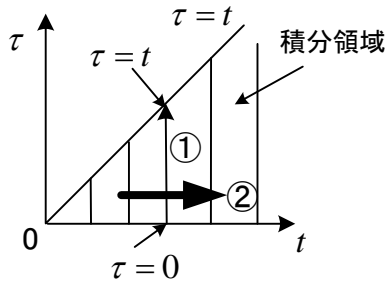
(例題 2-8) 次式の相乗定理を証明せよ。

$$L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

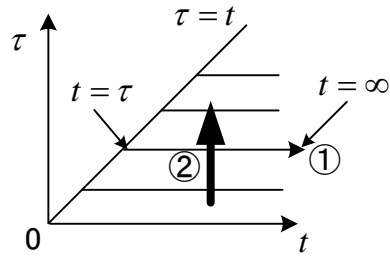
$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\} e^{-st} dt \quad \text{定義より} \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st} d\tau \right\} dt \quad e^{-st} \text{は} \tau \text{に関係ないので中に} \end{aligned}$$

これは、図(a)に示すようにまず①の向きに $\tau$ で積分し、それを②の方向に $t$ を変えて集める(積分する)。そこで、図(b)のように順番を変えて、まず①の向きに $t$ で積分し、それを②の向きに $\tau$ で集めてもよい。すると

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^\infty \left\{ \int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st} dt \right\} d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right\} e^{-s\tau} d\tau \quad t \text{に関係ない項を外へ} \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty g(t')e^{-st'} dt' \right\} e^{-s\tau} d\tau \quad t-\tau=t' \text{とおく} \\ &= \int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau} d\tau = G(s) \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = G(s)F(s) \end{aligned}$$



(a)



(b)

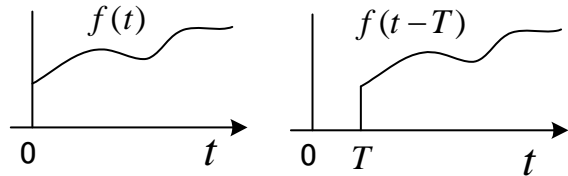
(例題 2-9)  $L[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$  を証明せよ。

(解)

$$L[f(t-T)] = \int_0^\infty f(t-T)e^{-st} dt$$

ここで、 $t-T = \tau$  とおくと

$$L[f(t-T)] = \int_{-T}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+T)} d\tau$$



$$= e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad t < 0: f(t) = 0 \text{ と考える。}$$

$$= e^{-sT} F(s)$$

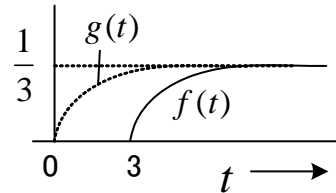
(例題 2-10)  $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s+3)}$  をラプラス逆変換して,  $f(t)$  を求めよ。

(解)  $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$  のラプラス逆変換を  $g(t)$  とすると,  $f(t) = g(t-3)$  である。

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3(s+3)}$$

であるから,

$$g(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t}$$



$$\text{よって, } f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 3 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3(t-3)} & 3 \leq t \end{cases}$$

(問題 2-4) 次の微分方程式をラプラス変換して解け。

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 3 \frac{df}{dt} + 2f = 1$$

初期条件は,  $f(0) = 1, f'(0) = 2$  とする。

(解) 両辺をラプラス変換して, 初期値を代入する。

$$s^2 F - sf(0) - f'(0) + 3sF - 3f(0) + 2F = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

## 2.3 ラプラス変換とフーリエ変換の関係

一般にフーリエ変換 (Fourier transform) は, 次式で定義される。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-23)$$

このとき,  $F(\omega)$  が存在するための十分条件(sufficient condition)は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2-24)$$

である。また、フーリエ逆変換は次式で与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-25)$$

$s = \sigma + j\omega$  の  $\sigma \leq 0$  でラプラス変換が収束するとき、 $s = j\omega$  と選ぶことで

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (t < 0 \text{ のとき } f(t) = 0 \text{ の場合}) \end{aligned} \quad (2-26)$$

が得られる。この式より、上記の条件を満たす関数  $f(t)$  については、ラプラス変換  $F(s)$  の変数  $s$  を  $j\omega$  とおくことによってフーリエ変換が得られることが判る。

例えば、 $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  ただし、 $a > 0$  ( $\sigma = 0$  でラプラス変換は収束)

のフーリエ変換は  $1/(j\omega + a)$ 、ラプラス変換は  $1/(s + a)$  である。

ラプラス変換は

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} (f(t) e^{-\sigma t}) e^{-j\omega t} dt$$

と考えると、 $t < 0$  のとき  $f(t) = 0$  を満たす関数  $f(t)$  について、 $f(t) e^{-\sigma t}$  のフーリエ変換と解釈できる。このようにラプラス変換は変換できる関数の範囲を広げているとみることができ。

ラプラス変換とフーリエ変換は、それぞれに広く応用されている。特にフーリエ変換では、(2-24)を満足しない直流や交流についても超関数である  $\delta(t)$  関数を導入することによって理論の拡張がなされている。これらの場合、(2-24)を満足しないので、例えば直流や  $\sin$  関数のラプラス変換を  $s = j\omega$  と置くことでフーリエ変換を求めることはできない。また、フーリエ変換では  $-\infty < t < +\infty$  の範囲で積分されるが、ラプラス変換では  $0 \leq t < +\infty$  の範囲で積分される点も異なる。ちなみに、 $1$  ( $-\infty < t < +\infty$  で) のフーリエ変換は  $2\pi\delta(\omega)$  であり、単位ステップ関数  $U(t)$  のフーリエ変換は  $\pi\delta(\omega) + (1/j\omega)$  である。意味としては、全範囲で  $1$  なら  $\omega = 0$  の直流分だけが存在するが、 $U(t)$  の場合には周波数の低い成分が多く含まれる ( $\omega$  が小さいときフーリエ変換の絶対値が大きい) ということである。 $U(t)$  のラプラス変換  $1/s$  で  $s = j\omega$  とした  $1/j\omega$  は、フーリエ変換の結果と異なる。

ラプラス変換は、過渡現象の解析や安定解析が容易なことから電気回路や自動制御などで用いられる。フーリエ変換は、主に周波数解析 (定常応答解析) が中心で、通信分野、光工学、熱伝導などの分野に広く用いられている。



## 第3章 システムの表現 -伝達関数とブロック線図-

システムの入力と出力の関係は伝達関数で表され、この結果、システムはブロック線図で表現できる。ブロック線図の作り方と簡単化の方法を理解して欲しい。

### 3.1 線形システムの伝達関数

制御対象の物理現象を数学的に表現すると、一般に線形常微分方程式となる。例えば、電気回路の式、運動方程式はその代表である。

入力を  $u(t)$ 、出力を  $y(t)$  とする図 3-1 のシステムで、本書では次式の線形定係数常微分方程式で表せる**線形時不変システム**(linear time-invariant system: **LTI システム**)を対象とする。

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d y}{dt} + a_n y \\ = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで、すべての係数は定数である。線形とは重ね合わせが成り立つことで、2種類の入力を同時に入れたときの出力がそれぞれを単独に入れたときの出力の和になるという性質である。時不変とは、同じ波形の入力を時間 0 からと  $\tau$  から加える場合、後者の出力は  $\tau$  だけ遅れた同じ波形が出るという性質である。係数が時間の関数なら時不変とは言えない。

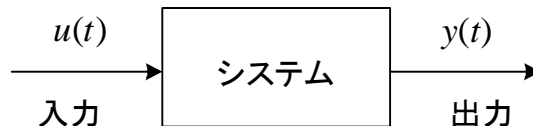


図 3-1 システムの入力と出力

線形時不変システムの解析・設計に極めて重要な**伝達関数**(transfer function)  $G(s)$  の求め方(定義)を述べる。

- ① システムに関する微分方程式をたてる。(3-1)の様に变形する必要はない。
- ② ラプラス変換して、全ての初期値を0とおく。
- ③ 入力  $u(t)$  と出力  $y(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $U(s)$ 、 $Y(s)$  とすると、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3-2)$$

ただし、 $L[u(t)] = U(s)$ 、 $L[y(t)] = Y(s)$

- ②より、 $\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow s^n$ 、 $\int_{-\infty}^t dt$  or  $\int_0^t dt \rightarrow \frac{1}{s}$  と置き換え、時間関数(小文字で  $t$  の関数)

をラプラス変換した変数（大文字で  $s$  の関数）に置き換えると良い。これは、交流理論のフェーザで  $j\omega$  を  $s$  とおいた形であるから覚えやすい。伝達関数=出力/入力で求める。

図 3-1 のシステムの伝達関数を求める。(3-1)をラプラス変換して、初期値を 0 と置くと、

$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) \\ = b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \cdots + b_{m-1} s U(s) + b_m U(s) \end{aligned}$$

よって、伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3-3)$$

(3-3)の形は**有理関数**(rational function)と呼ばれる。 $n \geq m$  のとき**プロパー**(proper),  $n > m$  のとき**真にプロパー**または**厳密にプロパー**(strictly proper)と呼ばれる。分母、分子は多項式と呼ばれる。 $G(s)$  の分母を 0 と置いたときの根  $s$  を**極**(pole), 分子を 0 と置いたときの根  $s$  を**零点**(zero)という。

極は次式から求まる。

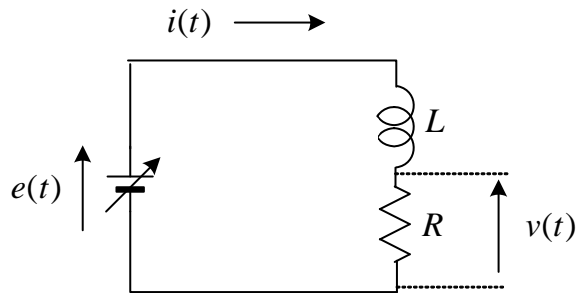
$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

極や零点は一般に複素数であるが、それらの実部が全て負であるとき (**安定多項式**(stable polynomial)または**フルビッツ多項式**)、伝達関数は**最小位相**(minimum phase)と言われる。

(例題 3-1) 電源電圧を入力、抵抗の両端の電圧を出力とする制御対象の伝達関数を求めよ。

(解) 回路の微分方程式をたてると

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t), \quad v(t) = Ri(t)$$



である。これをラプラス変換して初期値を 0 と置くと、

$$LsI(s) + RI(s) = E(s), \quad V(s) = RI(s)$$

ただし、 $L[i(t)] = I(s)$ ,  $L[e(t)] = E(s)$ ,  $L[v(t)] = V(s)$

よって、伝達関数は次のように求まる。

$$G(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R}{Ls + R}$$

交流回路のフェーザの公式（分圧または分流）を用いると、簡単に答えが求まる。もし、

電源が交流ならば,

$$\frac{\dot{V}}{\dot{E}} = \frac{R}{R + j\omega L} \quad (\text{この式を思っって } \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R}{R + sL} \text{ と書け)}$$

であり, フェーザ  $\dot{V}, \dot{E}$  をラプラス変換した  $V(s), E(s)$  に代えて,  $j\omega = s$  と置くと良い。しかし, フェーザとラプラス変換は同じではないので, 両者を混在させてはいけない。伝達関数を求める場合の回路素子の式を図 3-2 に示す。この式は初期値を 0 とし得られている。矢印の向きは, 電圧  $V(s)$ , 電流  $I(s)$  の測定の向きを表わし, 自分の好きに決めてよいが, 同じ向きするときマイナスがつく。フェーザの計算と同様に分圧や分流の公式も利用できる。

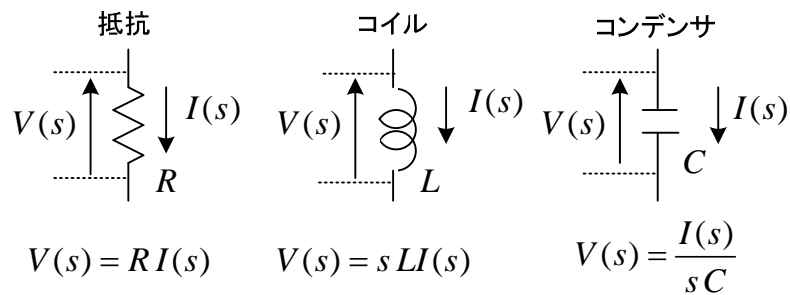
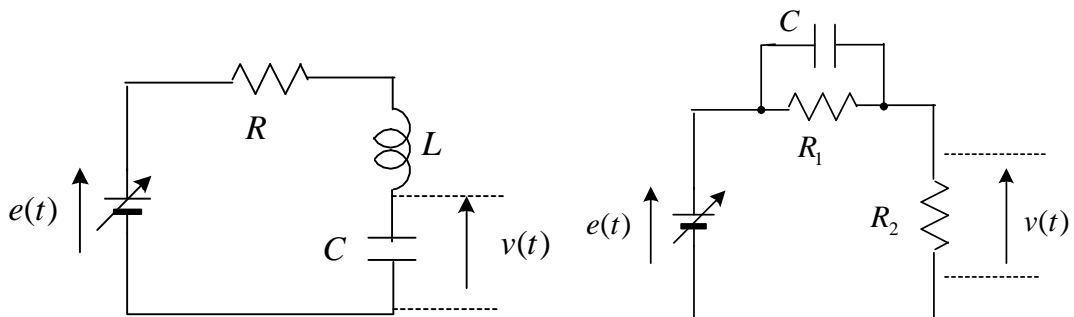


図 3-2 伝達関数を求める場合に利用する回路素子の式

(問題 3-1) 図の回路で, 電源電圧  $e(t)$  を入力,  $v(t)$  を出力とするとき, 伝達関数を求め, ブロック線図を書け。

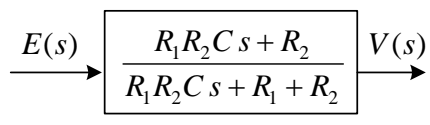
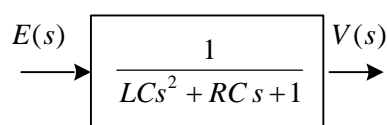


(a)

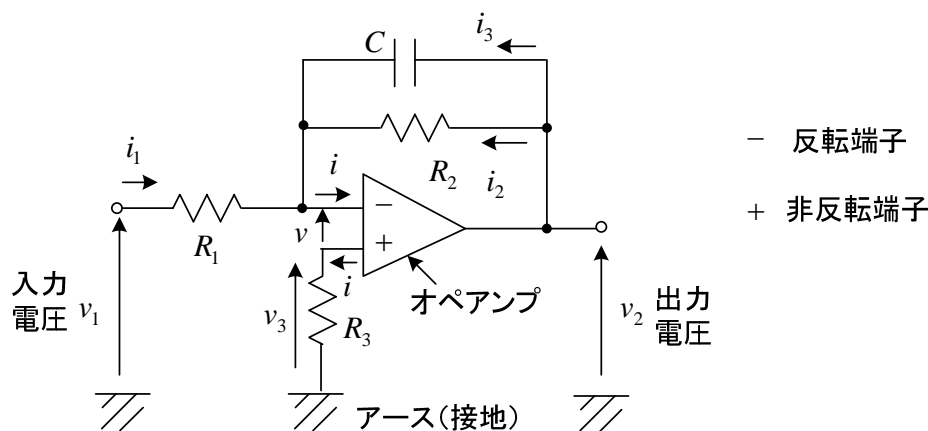
(b)

(解) (a) 
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

(b) 
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R_1 R_2 C s + R_2}{R_1 R_2 C s + R_1 + R_2}$$



(例題 3-2) 図のオペアンプの回路で、 $v_1$  を入力、 $v_2$  を出力としたときの伝達関数を求めよ。



一般にオペアンプ(演算増幅器) (operational amplifier) が理想的とすると、次式が成立する。

- (1)  $v = 0$  : オペアンプだけの増幅度が無限大で、出力端から反転端子への負帰還がある場合 ( $C, R_2$  がつながっている) に成立する。しかし、 $v$  を短絡してはいけない。
- (2)  $i = 0$  : オペアンプの入力インピーダンスが無限大だから入力端子に電流は流れない。この結果、オームの法則より  $v_3 = 0$  である。

(注意) オペアンプは差動増幅回路などを構成する幾つかのトランジスタを用いて作られたアナログ IC である。オペアンプの出力電圧は、出力端 ( $v_2$  のところ) に何をつないでも変わらない。 $R_3$  は実際のオペアンプのオフセット電圧を小さくするのに役立つ。

(解)  $v, v_3$  が 0 であるから、 $C, R_2$  に加わる電圧は共に  $v_2$  である。

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}, i_2 = \frac{v_2}{R_2}, i_3 = C \frac{dv_2}{dt}$$

$i = 0$  であるから、

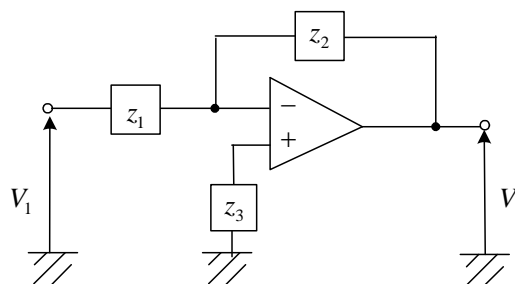
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \therefore 0 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + C \frac{dv_2}{dt}$$

ラプラス変換して、初期値を 0 と置くことにより、次式を得る。

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2 s}$$

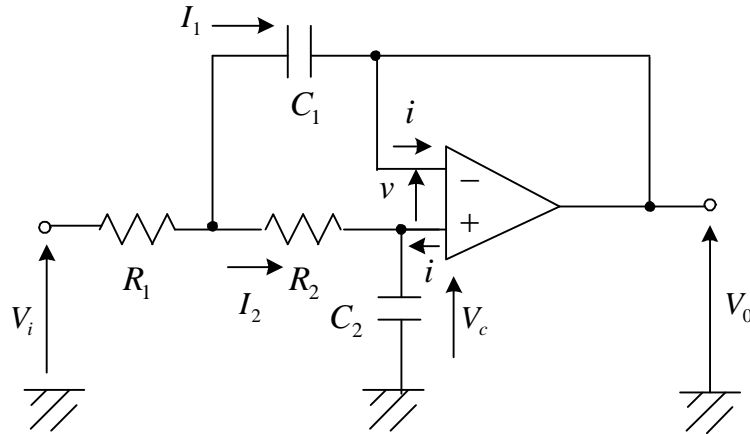
(別解) 次の公式を使うともっと簡単に求まる。一般に、

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{z_2}{z_1}$$



ただし、 $z_1, z_2$  はインピーダンスの  $j\omega$  を  $s$  に置き換えた式。

(例題 3-3) 図のオペアンプの回路で、 $V_i(s)$  を入力、 $V_0(s)$  を出力としたときの伝達関数を求めよ。



(解) オペアンプが理想的とすると、 $i = v = 0$  である。

図の様にラプラス変換した電圧，電流を大文字で定義する。

コンデンサ  $C_2$  の電圧  $V_c$  は，出力  $V_0$  と等しい。

$$\text{図より, } V_0 = \frac{I_2}{sC_2} \quad \text{①}$$

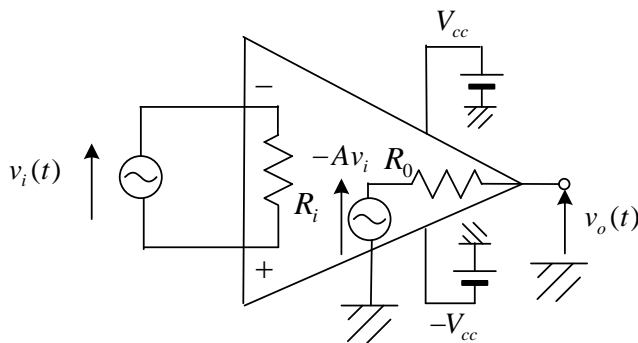
$$R_2 I_2 = \frac{I_1}{sC_1} \quad \text{②}$$

$$V_i = R_1(I_1 + I_2) + R_2 I_2 + V_0 \quad \text{③}$$

①,②より， $I_1, I_2$  を求めて，③に代入し

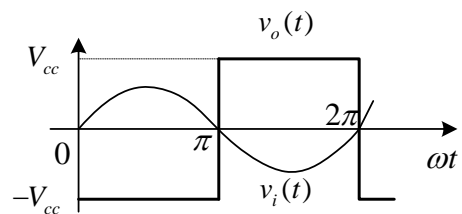
$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 + R_2) C_2 s + 1}$$

#### オペアンプの等価回路と負帰還がないときの動作



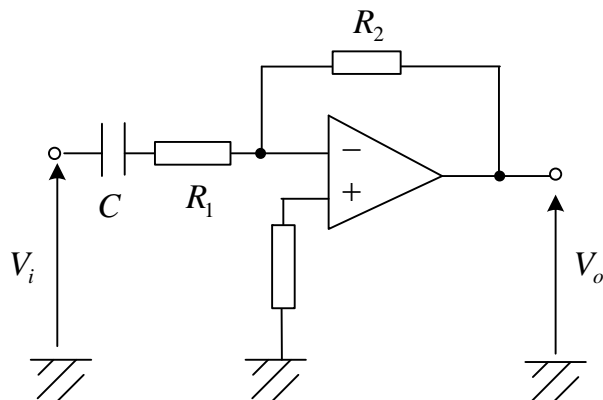
$\mu A 741$ 形演算増幅器

$$A = 2 \times 10^5, R_i = 2 \text{M}\Omega, R_o = 75 \Omega$$



$R_i$  が大きいので入力電流は流れない。増幅度  $A$  は十分大きいので，負帰還がないと出力電圧は無限大になるところであるが，電源電圧以上にはならず飽和した電圧が出る。

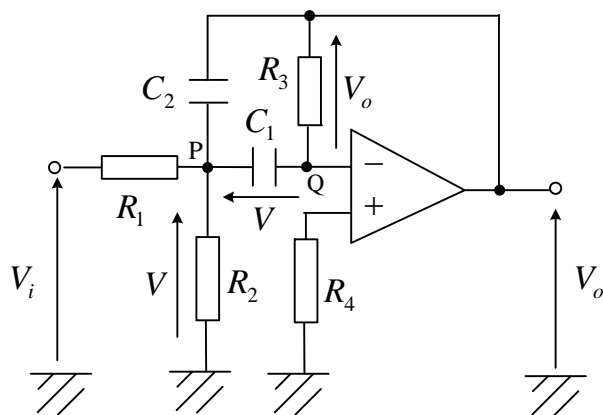
(問題 3-2) 図のオペアンプの回路で、 $V_i(s)$  を入力、 $V_o(s)$  を出力としたときの伝達関数を求めよ。



(答) 
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{sCR_2}{sCR_1 + 1}$$

$R_1 = 0$  のとき純粋な微分回路となるが、ノイズの影響が大きく実用的(practical)でない。 $R_1$  を入れることで高周波ノイズが除去でき実用的な微分回路となる。

(問題 3-3) 図のオペアンプの回路で、 $V_i(s)$  を入力、 $V_o(s)$  を出力としたときの伝達関数を求めよ。これは帯域通過フィルタ (band-pass filter) の一つである。



(答) Q 点の電位が 0 だから、図のように電圧が定義できる。

P 点にキルヒホッフの電流則を適用して

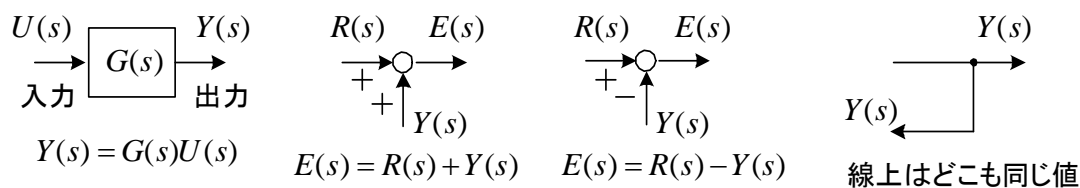
$$\frac{V_i - V}{R_1} = \frac{V}{R_2} + sC_1V + sC_2(V - V_o) \quad ①$$

$$R_3 \text{ について, } V_o = -sC_1R_3V \quad ②$$

$$\text{①, ②より } \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{1}{R_1C_2}s}{s^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2R_3}s + \frac{1}{C_1C_2R_3}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

### 3.2 ブロック線図

システムの入出力は伝達関数によって表されるので、これを利用して**ブロック線図**(block diagram)を描くことが良く行われる。図 3-3 にブロック線図の基本記号を示す。図中の矢印は入力と出力を区別し信号の流れを示す。



(a)ブロック (b)加え合わせ点(summing point) (c)引き出し点(takeoff point)

図 3-3 ブロック線図の基本記号

一般のシステムは、要素が集まって作られる。この場合ブロック線図は非常に便利である。これは、もともと伝達関数により代数方程式(algebraic equation)に直して計算していることが役立っている。図 3-4 にブロックの直列結合(series coupling)からなるシステムを示す。全体のシステムの伝達関数は、

$$Y(s) = G_3(s)X_2(s) = G_3(s)G_2(s)X_1(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)U(s) \quad (3-4)$$

となる。単純に掛け合わせるだけでよく覚えやすい。

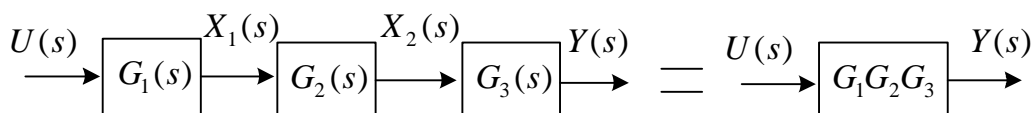


図 3-4 ブロックの直列結合からなるシステム

表 3-1 にブロック線図の簡略化や変形の際に役立つ等価な変換を示す。どれも、図 3-3 のブロック線図の定義より明らかであろう。入力と出力の関係が同じになれば両者は等価と考えてよい。ここでは、フィードバック結合だけ説明しよう。図より、

$$a - c = d, \quad b = Gd, \quad c = Hb$$

であり、 $c, d$  を消去して、

$$a - Hb = \frac{b}{G} \quad \therefore \frac{b}{a} = \frac{G}{1 + GH} \quad (3-5)$$

を得る。正帰還は  $H \rightarrow -H$  として負帰還に変形。 $H$  がないなら、 $H = 1$  とする。

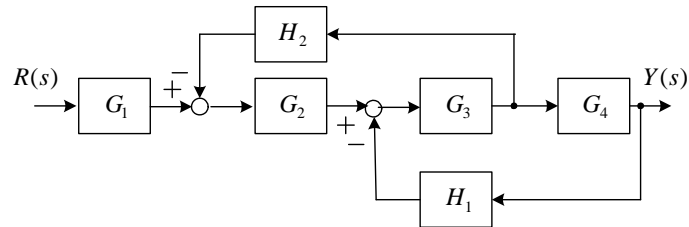
表 3-1 ブロック線図の等価変換

引出し点の交換		
加合せ点の交換		
引出し点と要素間の移動 I		
引出し点と要素間の移動 II		
加合せ点と要素間の移動 I		
加合せ点と要素間の移動 II		
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合 (負帰還)		
フィードバック結合 (正帰還)		

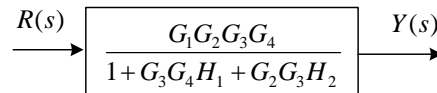
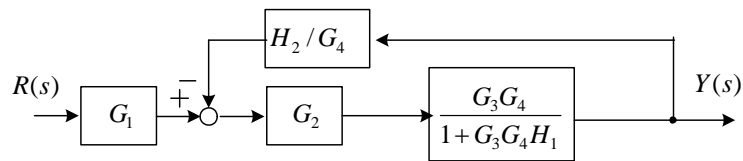
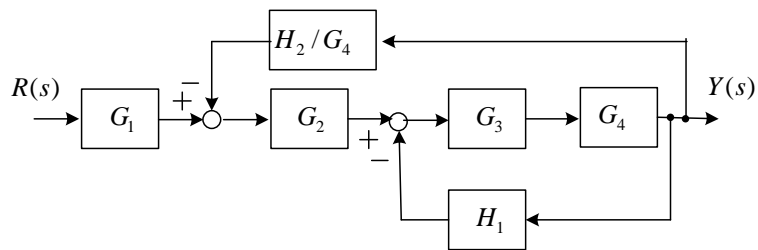
是非覚えておこう！



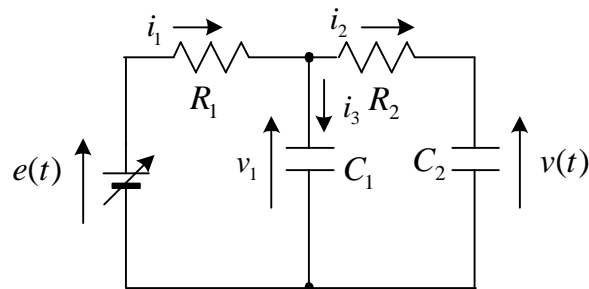
(例題 3-4) 図のブロック線図で，変換公式を利用して， $R(s)$  と  $Y(s)$  の間の 1 つのブロックに変換せよ。



(解) 以下の様に変換できる。



(例題 3-5) 図の制御対象で，電源電圧  $e(t)$  を入力，コンデンサ電圧  $v(t)$  を出力とするとき，各変数を全て含んだブロック線図を書け。また，そのブロック線図を簡略化して，1 つのブロックにせよ。



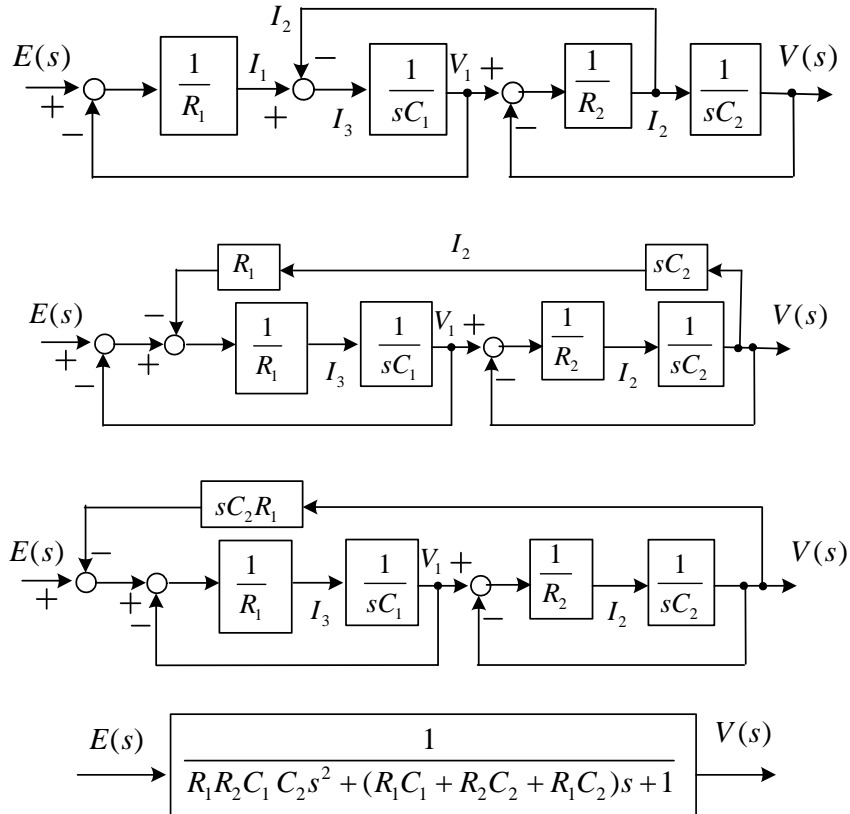
(解) ラプラス変換した変数を大文字で表すと、図より以下の関係式が得られる。

$$I_1 = \frac{1}{R_1}(E - V_1), \quad I_2 = \frac{1}{R_2}(V_1 - V)$$

$$V_1 = \frac{1}{sC_1}I_3, \quad V = \frac{1}{sC_2}I_2$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

これらの関係式から次のブロック線図が得られる。



(例題 3-6) DC モータは、図に示す等価回路で表される。回路の式は、

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\Phi\omega_m \quad \text{①}$$

ここで、 $v$  : 電源電圧[V],  $i_a$  : 電機子電流[A],  $e_a = K\Phi\omega_m$  : 誘導起電力[V]

$K$  : 定数,  $\Phi$  : 界磁磁束[Wb] (一定)

$R_a$  : 電機子巻線の抵抗[Ω],  $L_a$  : 電機子巻線のインダクタンス[H]

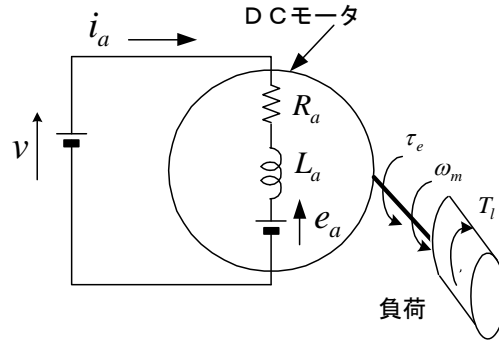
$\omega_m = 2\pi \frac{N}{60}$  : 回転角速度[rad/s],  $N$  : 1 分間の回転数[r/m]

モータの負荷としてはいろいろあるが、モータと負荷が一体となって回転すると考えることが多い。この場合、運動方程式が以下の様に表される。

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = K\Phi i_a - R_m \omega_m - T_l \quad \textcircled{2}$$

ここで、 $\tau_e = K\Phi i_a$  : 発生トルク [Nm],  $J$  : 慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>] (DC モータ + 負荷)

$R_m$  : 制動係数 [Nms],  $T_l$  : 負荷トルク [Nm]



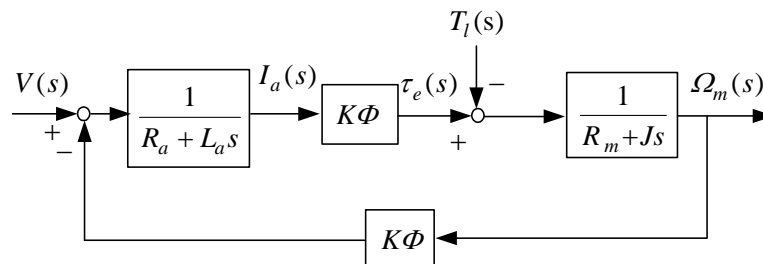
この制御対象のブロック図を描き、電源電圧に対する回転角速度の伝達関数を求めよ。

(解) ①, ②式をラプラス変換して初期値を零と置くことにより、以下の式が得られる。

$$V(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + K\Phi \Omega_m(s)$$

$$J s \Omega_m(s) = K\Phi I_a(s) - R_m \Omega_m(s) - T_l(s)$$

これより、DCモータのブロック図は次のようになる。

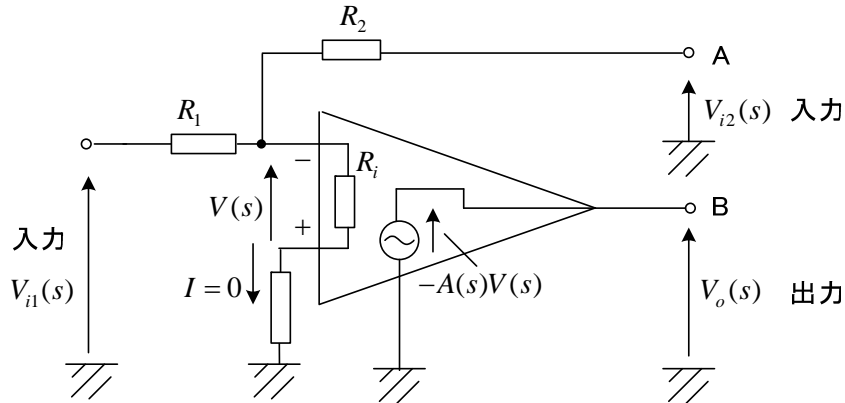


ここで、負荷トルク  $T_l$  は外乱と考えられ、これを 0 と置いて伝達関数を求める。

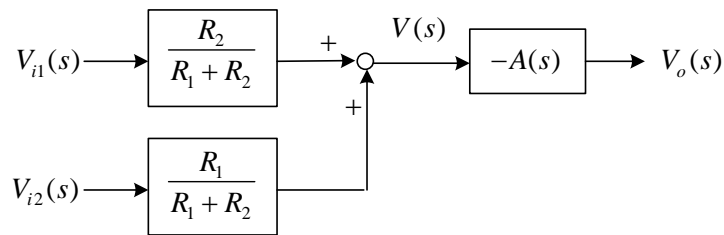
$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = \frac{\frac{KF}{R_a + L_a s} \cdot \frac{1}{R_m + Js}}{1 + \frac{KF}{R_a + L_a s} \cdot \frac{KF}{R_m + Js}} = \frac{K\Phi}{L_a J s^2 + (R_a J + R_m L_a) s + R_a R_m + (K\Phi)^2}$$

DCモータ自体にフィードバックループがあり、端子電圧に見合った速度に落ち着くことになる。磁束  $\Phi$  (界磁電流) を小さくすると速度は非常に大きくなるので危険である。

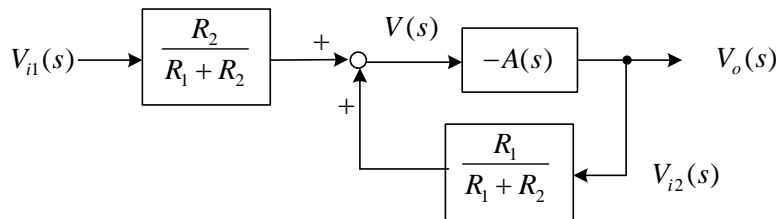
(例題 3-7) (理想オペアンプでない場合) 図はオペアンプの等価回路である。入力抵抗  $R_i$  は十分大きく、そこに流れる電流  $I$  は 0 とする ( $V(s)$  は 0 でないとする)。  $A(s)$  はオペアンプ内部の伝達関数で、  $V_o(s) = -A(s)V(s)$  の関係がある。図のように 2 つの入力電圧  $V_{i1}(s)$ ,  $V_{i2}(s)$  と出力電圧  $V_o(s)$  を考えるとき、ブロック線図を書け。また、A 点を B 点に接続するとき (負帰還), ブロック線図を示して、  $V_{i1}(s)$  と  $V_o(s)$  間の伝達関数を求めよ。



(解) 
$$\frac{V_{i1}(s) - V(s)}{R_1} + \frac{V_{i2}(s) - V(s)}{R_2} = 0, \quad V_o(s) = -A(s)V(s) \quad \text{より}$$



(a) 2 つの入力電圧  $V_{i1}(s)$ ,  $V_{i2}(s)$  と出力電圧  $V_o(s)$  のブロック線図



(b) 回路の A 点と B 点を接続した場合のブロック線図

$$\frac{V_o(s)}{V_{i1}(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{-A(s)}{1 + \frac{R_1 A(s)}{R_1 + R_2}} = -\frac{R_2 A(s)}{R_1 + R_2 + R_1 A(s)} \rightarrow -\frac{R_2}{R_1} \quad (A(s) = \infty)$$

(注) 加え合わせ点では+であるが、  $A(s)$  の前に-があり、実質的に負帰還である。

$A(s) \rightarrow \infty$  とすれば、  $V(s) = -V_o(s)/A(s) = 0$  だから、理想オペアンプとなる。

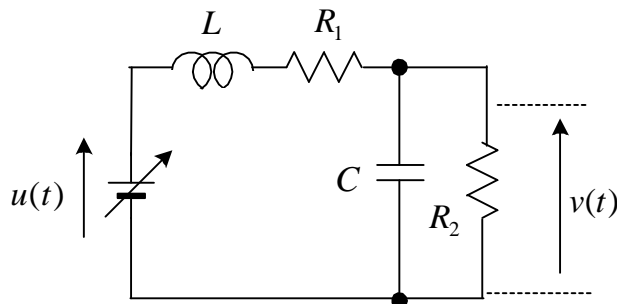
(例題 3-8) 図の制御対象で、電圧  $v(t)$  を検出して、電源電圧  $u(t)$  を次式で制御する。

$$u(t) = K_p(v^*(t) - v(t)) + K_i \int_0^t (v^*(t) - v(t)) dt$$

ここで、 $K_p, K_i$  は定数、 $v^*(t)$  は

電圧指令値である。

- (1) 制御対象の伝達関数を求めよ。
- (2) 制御系全体のブロック線図を書け。
- (3) 閉ループ伝達関数を求めよ。



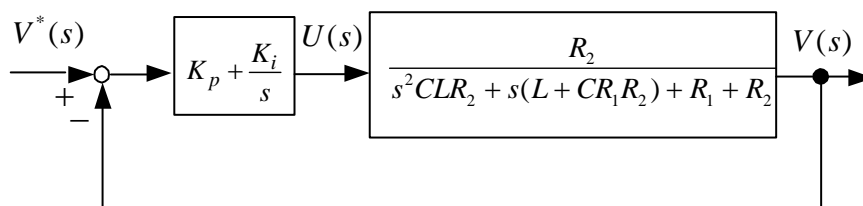
(解) (1) 回路の分圧の考え方を利用して

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R_2/(sC)}{1/(sC) + R_2}}{sL + R_1 + \frac{R_2/(sC)}{1/(sC) + R_2}} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{sL + R_1 + \frac{R_2}{1 + sCR_2}} = \frac{R_2}{s^2 CLR_2 + s(L + CR_1 R_2) + R_1 + R_2}$$

(2) 制御の式をラプラス変換して

$$\begin{aligned} U(s) &= K_p(V^*(s) - V(s)) + \frac{K_i}{s}(V^*(s) - V(s)) \\ &= \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)(V^*(s) - V(s)) \end{aligned}$$

よって、制御系全体のブロック線図は図のようになる。



$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{V(s)}{V^*(s)} &= \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \frac{R_2}{s^2 CLR_2 + s(L + CR_1 R_2) + R_1 + R_2}}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \frac{R_2}{s^2 CLR_2 + s(L + CR_1 R_2) + R_1 + R_2}} \\ &= \frac{(sK_p + K_i)R_2}{s^3 CLR_2 + s^2(L + CR_1 R_2) + s(R_1 + R_2 + K_p R_2) + K_i R_2} \end{aligned}$$

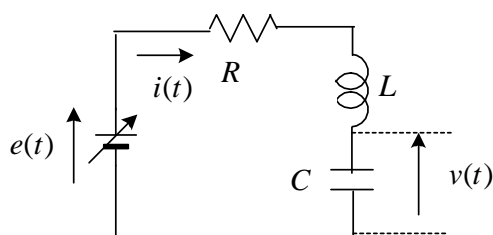
### 3.3 状態方程式

制御対象やフィードバック制御システムを連立微分方程式で記述してシステムの解析や設計を行うことがある。これは応答の計算や現代制御理論などで用いられる。

図の制御対象で説明しよう。入力は電源電圧  $e(t)$  であるが、出力をコンデンサの電圧  $v$  としよう。微分方程式は、

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + v \quad (3-6)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (3-7)$$



となる。**状態方程式**(state equation)は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \quad (3-8)$$

連立微分方程式で、微分を左辺におき、右辺は左辺の変数と入力だけを使って表す。

入力は自由に変えることができる量で、電気回路では電源である。一方、出力は、目的で異なるが、通常センサで検出する量である。電圧  $v$  を出力とする場合、**出力方程式**(output equation)は次式で与えられる。

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

出力方程式は状態方程式の変数を使って表すもので、それ以外の変数を使ってはいけない。この様に、システムは、状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3-10)$$

$$\text{成分表示: } \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

出力方程式

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (3-11)$$

$$\text{成分表示: } y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

により記述できる。 $\mathbf{x}$  は状態変数ベクトル(state variable vector)と呼ばれ、この成分を**状態変数**という。状態変数は(3-10)の様に整理できるなら、何を選んでも良い。電気回路のシステムでは、コイルの電流とコンデンサの電圧（または電荷）を選ぶと良い。状態変数の選び方やその順序は決らないので、状態方程式の書き方は人により異なる。入力 $u$ は、我々が直接自由に変えることができる量であるが、状態変数は入力を変えることで間接的に変化する量であり全く異なる。

例題 3-6 の状態方程式を求めると、以下の様になる。

状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K\Phi/L_a \\ K\Phi/J & -R_m/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J \end{bmatrix} T_l \quad (3-12)$$

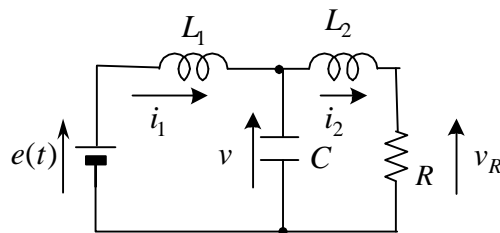
ここで、負荷トルク  $T_L$  の項は、一種の入力であるが、制御には利用できないので、外乱と考えればよい。

出力方程式：

$$\omega_m = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

となる。

(例題 3-9) 図の制御対象の状態方程式，出力方程式を求めよ。ただし，出力は， $v_R$  とする。



(解) 状態方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

出力方程式

$$v_R = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

次に、伝達関数の求め方につき述べる。

$$\text{状態方程式：} \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\text{出力方程式：} \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

につき考える。 $\mathbf{A}$  は**システム行列**と呼ばれる。上式をラプラス変換して（ベクトルのラプラス変換は各成分のラプラス変換である），

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (3-14)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \quad (3-15)$$

を得る。初期値 $\mathbf{x}(0)$ を0とおいて、(3-14)より。

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad \therefore \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s)$$

伝達関数 $G(s)$ は、 $Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s)$  より

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

$$= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

: 単位行列

(3-16)

となる。ここで、 $\mathbf{I}$  は単位行列、 $\operatorname{adj}$  は、**余因子行列**(adjoint matrix)を示す。



◎ **行列式**(determinant), **逆行列**(inverse matrix)の公式

$A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を省いてできた  $(n-1) \times (n-1)$  次元の行列の行列式に  $(-1)^{i+j}$  を掛けたものを  $M_{ij}$  とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき, 例えば, } M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \text{行列式: } |A| &= \sum_{j=1}^n a_{ij} M_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} M_{ij} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{adj}(A) \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ |A| \end{matrix}$$

$$\text{逆行列: } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

$$\text{余因子行列: } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$T$  は, **転置行列**(transposed matrix)を意味する。

(3-8), (3-9)の状態方程式については,

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

$$C \text{ adj}(sI - A) B = [1 \ 0] \text{adj} \begin{bmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{LC}$$

$$\text{よって, } \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{C \text{ adj}(sI - A) B}{|sI - A|} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3-17)$$

## 第4章 時間応答

微分方程式を解いて、入力や指令値の変化に対する時間応答を求める。ブロック線図で表されたシステムは、伝達関数を用いているので、ラプラス変換で初期値が0と仮定されている。

### 4.1 1次遅れ要素の時間応答

**1次遅れ要素**(first order lag element)の微分方程式は次式のように書くことができる。

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t) \quad (4-1)$$

この伝達関数は、

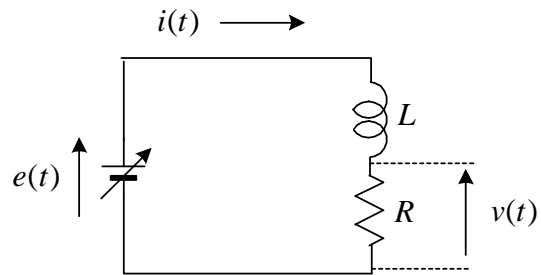
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Ts} \quad (4-2)$$

である。 $K$ を**ゲイン定数**(gain constant)、 $T$ を**時定数**(time constant)と呼ぶ。

この例としては、図の回路を考えるとよい。入力 $u(t)$ は電源電圧 $e(t)$ であり、出力 $y(t)$ には図の電圧 $v(t)$ が相当する。

$T = L/R$ である。

時間応答として重要なものは、入力の単位ステップ変化に対する**ステップ応答**(step response) (**インディシャル応答**とも言われる)である。この求め方には2つの方法がある。



#### (1) 定常項+過渡項として求める方法

(4-1)より、入力 $u(t) = 1$ として次式を得る。

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \quad (1)$$

特性方程式は、

$$Ts + 1 = 0 \quad (2)$$

であり、特性根は

$$s = -1/T \quad (3)$$

よって過渡項は $e^{st}$ である。定常項は $d/dt = 0$ において、 $y = K$ である。よって一般解は

$$y(t) = K + k e^{-t/T} \quad (4)$$

となる。初期値  $y(0)$  を 0 とすると、 $k = -K$  である。よって、ステップ応答は

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad \text{⑤}$$

で計算できる。

## (2) ラプラス変換による方法

(4-2)より、

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts} U(s) \quad \text{①}$$

である。入力  $u(t) = 1$  であるから、ラプラス変換して

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \text{②}$$

よって、①に代入して部分分数展開すると次式となる。

$$Y(s) = \frac{K}{s(1+sT)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1+sT} \quad \text{③}$$

$$a = sY(s)|_{s=0} = K, \quad b = (1+sT)Y(s)|_{s=-1/T} = -KT$$

$$\therefore Y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}\right) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1/T+s}\right)$$

逆変換して (表 2-1),

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad \text{④}$$

これは先の結果と一致する。初期値については、伝達関数を求める段階で全て 0 としていることに注意すること。④の計算値を図 4-1 に示す。**時定数<sup>じていすう</sup> $T$**  が大きい程応答が遅くなる。

$RL$ 回路の例では  $T = L/R$  である。 $t = T$  で、約 63% ( $=1-1/e$ ) に増加する。

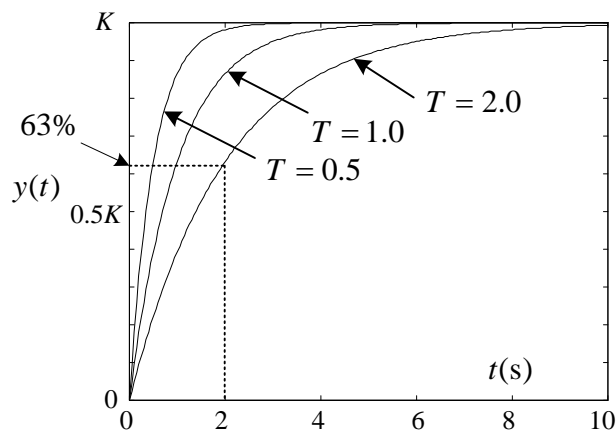
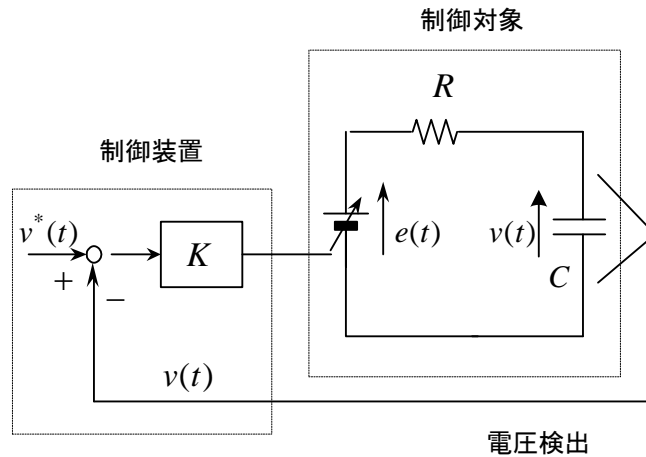


図 4-1 1次遅れ要素のステップ応答

(問題 4-1) 図の制御系は、コンデンサ電圧  $v(t)$  を検出して、それを目標値  $v^*(t)$  に追従させることを目的としている。このとき、電源電圧  $e(t)$  を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$



(1) 制御対象の微分方程式を立てて、それをラプラス変換することにより、制御系の全体のブロック線図を書け。ただし、

$$V^*(s) = L[v^*(t)], \quad V(s) = L[v(t)], \quad E(s) = L[e(t)]$$

(2) 閉ループ伝達関数  $\frac{V(s)}{V^*(s)}$  を求めよ。

(3)  $v^*(t) = 1$  に対する  $v(t)$  の応答を求めよ。コンデンサ電圧  $v(t)$  の初期値は 0 とする。

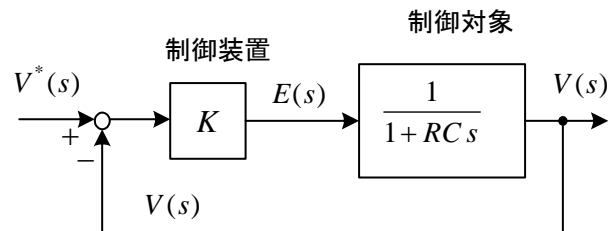
(解) (1) 成立する式は、 $e(t) = Ri(t) + v(t) = RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t)$  である。

ラプラス変換して初期値を 0 とおくと、 $\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$

制御装置についてラプラス変換すると、

$$E(s) = K(V^*(s) - V(s))$$

よって、ブロック図は次のように書ける。



(2) 閉ループ伝達関数は、 $G_{cl}(s) = \frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{\frac{K}{1 + RCs}}{1 + \frac{K}{1 + RCs}} = \frac{K}{1 + K + RCs}$

(3)  $v^*(t)=1$  をラプラス変換して、 $V^*(s)=1/s$

$$(2) \text{ より, } V(s) = \frac{K}{RCs + K + 1} V^*(s) = \frac{K}{K + 1} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{K + 1}{RC}} \right)$$

$$\text{ラプラス逆変換して, } v(t) = \frac{K}{K + 1} \left( 1 - e^{-\frac{K + 1}{RC}t} \right)$$

## 4.2 2次遅れ要素の時間応答

2次の微分方程式は次式のように書くことができる。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t) \quad (4-3)$$

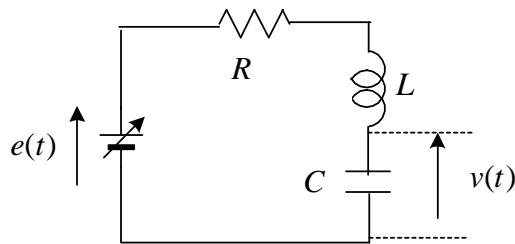
この伝達関数は、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b} \quad (4-4)$$

である。

この例としては、図の回路を考えるとよい。

入力  $u(t)$  は電源電圧  $e(t)$  に相当し、出力  $y(t)$  には図の電圧  $v(t)$  が相当する。



微分方程式は

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{LC} e(t) \quad (4-5)$$

である。

入力の単位ステップ変化に対するステップ応答を2つの方法で求めてみよう。

### (1) 定常項+過渡項として求める方法

(4-3)より、入力  $u(t)=1$  として次式を得る。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = c \quad (1)$$

定常項は、微分を0とおいて（直流の定常に相当）、

$$y_s = \frac{c}{b} \quad (2)$$

特性方程式は、

$$s^2 + as + b = 0 \quad \text{②}$$

であり, 特性根は

$$s = \begin{cases} \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \equiv \alpha \pm \gamma & : a^2 > 4b \\ -\frac{a}{2} \equiv \alpha & : a^2 = 4b \\ \frac{-a \pm j\sqrt{4b - a^2}}{2} \equiv \alpha \pm j\beta & : a^2 < 4b \end{cases} \quad \text{③}$$

とおける。一般解は定常項と過渡項の和で与えられるから

$$y(t) = \begin{cases} c/b + k_1 e^{(\alpha+\gamma)t} + k_2 e^{(\alpha-\gamma)t} & : a^2 > 4b \\ c/b + k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} & : a^2 = 4b \\ c/b + k_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + k_2 e^{\alpha t} \sin \beta t & : a^2 < 4b \end{cases} \quad \text{④}$$

となる。\$k\_1, k\_2\$ は初期条件から求まる。\$y(0) = 0, y'(0) = 0\$ とすると, 次式となる。

$$\begin{cases} k_1 = c(\alpha - \gamma)/(2b\gamma), k_2 = -c(\alpha + \gamma)/(2b\gamma) & : a^2 > 4b \\ k_1 = -c/b, k_2 = \alpha c/b & : a^2 = 4b \\ k_1 = -c/b, k_2 = \alpha c/(b\beta) & : a^2 < 4b \end{cases} \quad \text{⑤}$$

## (2) ラプラス変換による方法

(4.4)より,

$$Y(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} U(s) \quad \text{①}$$

である。ステップ応答では, 入力 \$u(t) = 1\$ であるから, ラプラス変換して

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \text{②}$$

よって, ①に代入して部分分数展開すると次式となる。

$$Y(s) = \frac{c}{s(s^2 + as + b)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + as + b} \quad \text{③}$$

恒等式 \$k\_1(s^2 + as + b) + k\_2 s^2 + k\_3 s = c\$ を解いて, \$k\_1 = \frac{c}{b}, k\_2 = -\frac{c}{b}, k\_3 = -\frac{ca}{b}\$

$$\therefore Y(s) = \frac{c}{b} \left( \frac{1}{s} - \frac{s+a}{s^2 + as + b} \right)$$

ラプラス変換表を利用して逆変換すると,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{c}{b} \left\{ 1 + \frac{\alpha - \gamma}{2\gamma} e^{(\alpha + \gamma)t} - \frac{\alpha + \gamma}{2\gamma} e^{(\alpha - \gamma)t} \right\} & : a^2 > 4b \\ \frac{c}{b} \{ 1 - e^{\alpha t} (1 - \alpha t) \} & : a^2 = 4b \\ \frac{c}{b} \left\{ 1 - e^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right\} & : a^2 < 4b \end{cases} \quad (4)$$

これは先の結果と一致する。初期値については、伝達関数を求める段階で全て0としていることに注意すること。

**2次遅れ要素**(second-order lag element)の**標準形**として、**減衰係数** $\zeta$  (ゼータ, Zeta) (damping coefficient)と**固有角周波数** $\omega_n$  (natural angular frequency)を用いた次式が良く用いられる。 $K$ は**定常ゲイン**である。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4-6)$$

$K=1$ のとき、ステップ応答は、④より以下のように計算できる。

(a)  $\zeta > 1$ のとき (異なる2実根) **過減衰**(over damping)または**過制動**と呼ばれる。この場合、1次系が乗算の形で結合されているとみなせる。

$$G(s) \text{ の極 } s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = \alpha \pm \gamma$$

$$y(t) = 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

(b)  $\zeta = 1$ のとき (重根) **臨界減衰**(critical damping)または**臨界制動**と呼ばれる。

$$G(s) \text{ の極 } s = -\omega_n$$

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

(c)  $0 < \zeta < 1$  (共役複素根) **減衰振動**(damped oscillation)あるいは**不足制動**(under damping)と言われる。

$$G(s) \text{ の極 } s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \alpha \pm j\beta$$

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (4-7)$$

(d)  $\zeta = 0$  (共役複素根) **持続振動**と言われる。(c)の場合に $\zeta = 0$ と置いてよい。

$$G(s) \text{ の極 } s = \pm j\omega_n$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

以上の結果をグラフにすると、図 4-2 が得られる。 $G(s)$ の極に虚部があれば振動する。

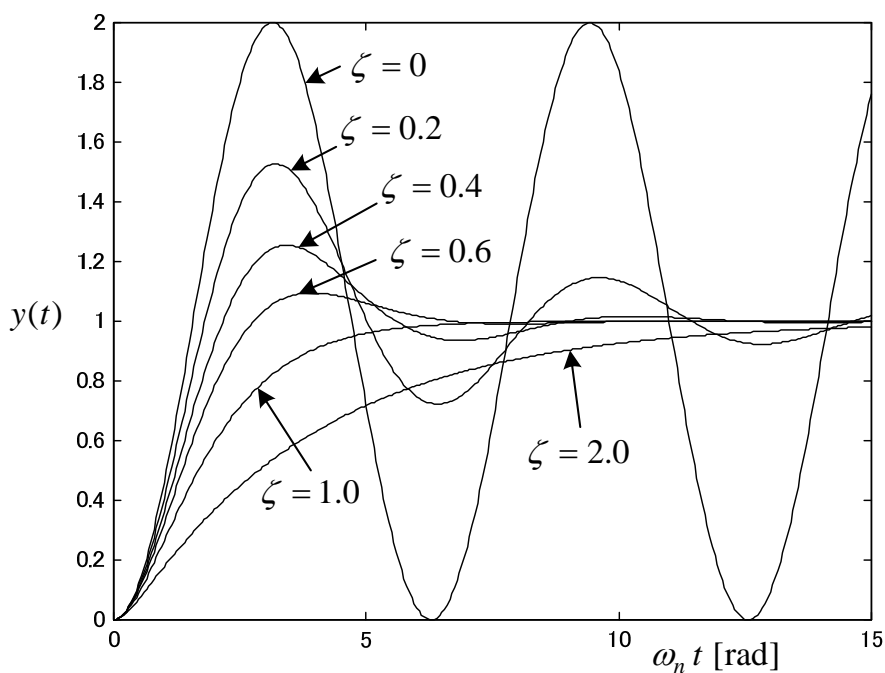


図 4-2 入力  $u(t) = 1$  に対する 2 次系要素((4-6)式,  $K=1$ )のステップ応答

(c), (d)の場合の伝達関数の極を図 4-3 に示す。図より、

$$\zeta = \cos \theta \quad (4-8)$$

であることが判る。 $\theta$  が大きいほど応答の減衰が遅く、 $\theta = \pi/2$  であれば持続振動状態になる。

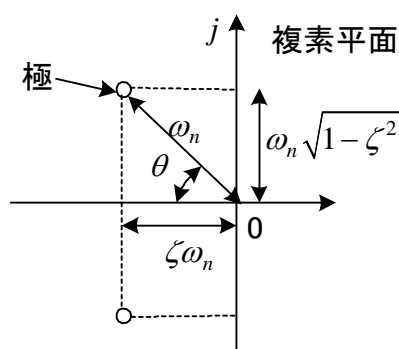
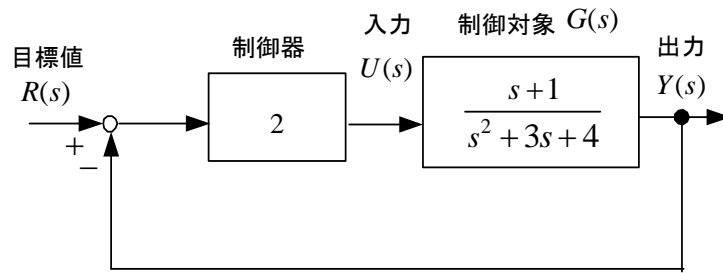


図4-3 伝達関数の極

(例題 4-1) 図のブロック線図で示される制御系で、目標値が 0 から 1 に変化したときの出力のステップ応答を求めよ。





(解) 目標値  $r(t) = 1$  をラプラス変換して、 $R(s) = 1/s$  である。図より、

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2s+2}{s^2+3s+4}}{1 + \frac{2s+2}{s^2+3s+4}} = \frac{2s+2}{s^2+5s+6}$$

出力は

$$Y(s) = \frac{2s+2}{(s+2)(s+3)} R(s) = \frac{2s+2}{s(s+2)(s+3)}$$

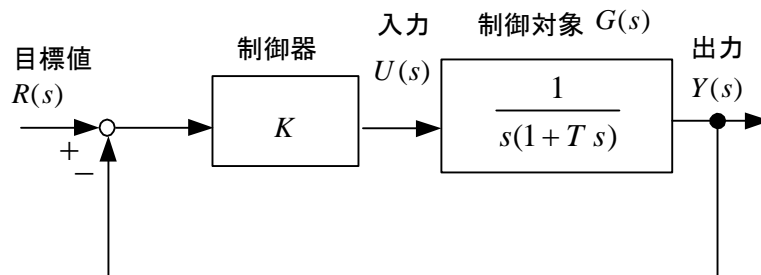
$$= \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+3}$$

$$a = sY(s)|_{s=0} = \frac{1}{3}, \quad b = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = 1, \quad c = (s+3)Y(s)|_{s=-3} = -\frac{4}{3}$$

$Y(s)$  を逆変換して、

$$y(t) = 1/3 + e^{-2t} - (4/3)e^{-3t}$$

(例題 4-2) 図のブロック線図で表される制御系で、目標値に対する出力の伝達関数を求めよ。また、 $K = 25$ ,  $T = 0.25$  のとき、減衰係数と固有角周波数の値を求めよ。



(解) 閉ループ伝達関数は、

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{s(1+Ts)}}{1 + \frac{K}{s(1+Ts)}} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

$$= \frac{K/T}{s^2 + (1/T)s + K/T}$$

題意より,  $\frac{K}{T} = \omega_n^2 = 100 \therefore \omega_n = 10 \text{ rad/s}$  ,  $\frac{1}{T} = 2\zeta\omega_n = 4 \therefore \zeta = 0.2$

### 4.3 零点の影響

ステップ応答がある値に収束するかどうかは, 伝達関数の極で決る (第 6 章で詳しく述べる)。ここでは, 伝達関数の分子を 0 と置いたときの根である ぜろてん。れいてん **零点** (zero) が応答に及ぼす影響を考える。

伝達関数が

$$G(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)} \quad : A$$

で与えられるとき, ステップ応答は次式で計算される。

$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{0.1}{s(s+1)(s+0.1)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{9(s+1)} - \frac{10}{9(s+0.1)}$$

$$\therefore y_A(t) = 1 + \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{10}{9}e^{-0.1t}$$

この結果を図の A に示している。極  $-0.1$  の影響が大きく, 応答はこの極に支配されて立ち上がっている。

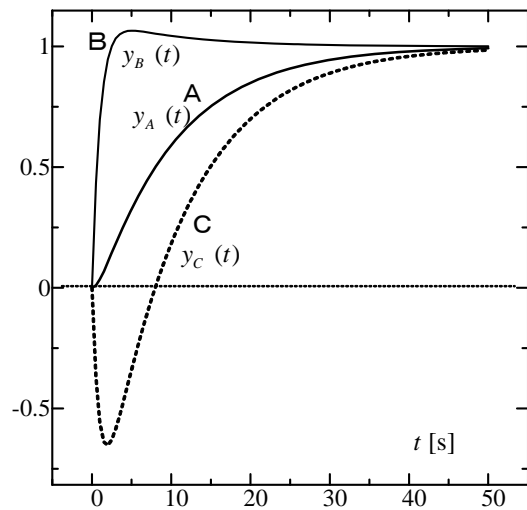
次に, 極  $-0.1$  に近い零点  $-0.09$  を追加した次の伝達関数を考える。

$$G(s) = \frac{0.1(s+0.09)}{0.09(s+1)(s+0.1)} \quad : B$$

このときのステップ応答は

$$Y(s) = \frac{0.1(s+0.09)}{0.09s(s+1)(s+0.1)} = \frac{1}{s} - \frac{1.12}{s+1} + \frac{0.12}{s+0.1}$$

$$\therefore y_B(t) = 1 - 1.12e^{-t} + 0.12e^{-0.1t}$$



ステップ応答

この結果を図のBに示している。極 $-0.1$ の影響が小さくなって応答が速く立ち上がっている。これは $y(t)$ の第3項の係数が小さくなっていることから理解できる。このように近接した位置にある極と零点の組を**ダイポール(dipole)**という。極と零点がダイポールをなしていると、その極による過渡応答の項は一般に非常に小さくなる。完全に一致する場合を**極-零点相殺(pole-zero cancellation)**という。

次に、零点の実部が正の次の場合を考える。

$$G(s) = \frac{-s+0.1}{(s+1)(s+0.1)} \quad : C$$

このときのステップ応答は

$$Y(s) = \frac{-s+0.1}{s(s+1)(s+0.1)} = \frac{1}{s} + \frac{1.22}{s+1} - \frac{2.22}{s+0.1}$$

$$\therefore y_c(t) = 1 + 1.22e^{-t} - 2.22e^{-0.1t}$$

この結果を図のCに示している。図のように**逆応答(inverse response)**が現れていることが判る。このように逆応答する制御対象はフィードバック制御が難しいと言われている。極と零点の実部が全て負である**最小位相**であれば逆応答は生じない(十分条件となる)。

A, B, Cいずれの場合も極は同じである。従って、不安定になることはなく応答は収束するが、零点によって項の係数が変わり大きな応答の違いを引き起こすことがある。

#### 4.4 むだ時間要素の時間応答

入力に加わってから $L$ 秒して、入力と全く同じ信号が出力に現れる制御要素は**むだ時間要素**と呼ばれる。むだ時間要素への入力を $f(t)$ とすると、出力 $y(t)$ は次式で与えられる。

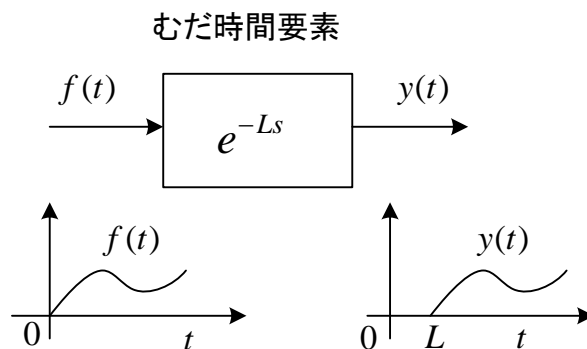


図 4-4 むだ時間要素の入出力

$$y(t) = f(t-L) \quad (4-9)$$

これをラプラス変換して,

$$Y(s) = \int_0^{\infty} f(t-L)e^{-st} dt \quad (4-10)$$

いま,  $t-L = \tau$  とおくと,

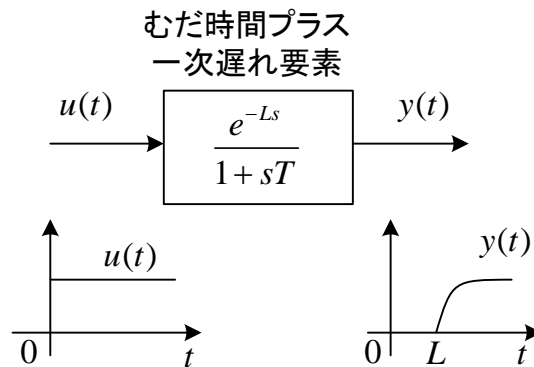
$$Y(s) = \int_{-L}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+L)} d\tau = e^{-sL} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-sL} F(s) \quad (4-11)$$

従って, **むだ時間要素**(time-delay element)の伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = e^{-sL} \quad (4-12)$$

むだ時間要素は, 化学プラントなど温度, 圧力, 流量などを制御するプロセス制御系やデジタル制御系でよく現れる。

(例題 4-3) 図のブロック線図で, むだ時間プラス一次遅れ要素のステップ応答を求めよ。



(解) 入力  $u(t) = 1$  のラプラス変換は,  $U(s) = 1/s$  である。よって,

$$Y(s) = \frac{e^{-sL}}{1+sT} U(s) = \frac{e^{-sL}}{1+sT} \frac{1}{s}$$

$e^{-sL}$  を除いて, 逆ラプラス変換して,

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+sT)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}\right\} = (1 - e^{-t/T})U(t)$$

となる。ここで,  $U(t)$  は単位ステップ関数。  $t < 0$  で関数が 0 であることを明確に示すためこの例題では  $U(t)$  を掛けた (普通は簡単のため省く)。よって, (4-9),(4-11)の関係から

$$y(t) = f(t-L) = (1 - e^{-(t-L)/T})U(t-L)$$

となり、 $f(t)$  を右に  $L$  だけシフトした波形である。 $U(t-L)$  は、 $t \geq L$  で 1 でそれ以外 0 である。 $0 \leq t < L$  で図のように 0 とするため  $U(t-L)$  を掛ける必要がある。

#### 4.5 インパルス応答

図 4-5 のシステムで、入力インパルス関数とすると

$$u(t) = \delta(t) \tag{4-13}$$

である。これをラプラス変換すると、

$$U(s) = 1 \tag{4-14}$$

である。よって、このときの出力は

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \tag{4-15}$$

である。これを、逆ラプラス変換して、次式を得る。

$$y(t) = L^{-1}[G(s)] \equiv g(t) \tag{4-16}$$

すなわち、伝達関数を逆ラプラス変換したものは、インパルス入力に対する応答（**インパルス応答**(impulse response)という)に他ならない。スイカを指ではじいて音によって甘さを判断するのは一種のインパルス応答を利用したものと言えよう。

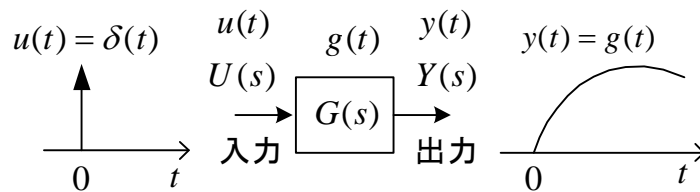


図 4-5 基本ブロック

このインパルス応答  $g(t)$  を用いて、一般の入力  $u(t)$  に対する出力はどう表せるだろうか？

$\delta(t)$  に対する出力が  $g(t)$  だから、 $t = \tau$  におけるインパルス  $\delta(t - \tau)$  ( $\tau > 0$ ) に対する出力は  $t \geq \tau$  である任意の時刻  $t$  で  $g(t - \tau)$  である。よって、 $\delta(t - \tau)u(\tau)d\tau$  の入力があれば、 $g(t - \tau)u(\tau)d\tau$  の出力が出る。線形システムでは、重ね合わせの理が成り立つから、 $0 \leq \tau \leq t$  の範囲で  $\tau$  を変化させてこれらの応答を集めるとその間の入力に対する  $t$  時点(現在)での出力  $y(t)$  が得られる。すなわち、一般の入力  $u(t)$  に対する出力は、

$$y(t) = L^{-1}[G(s)U(s)] = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \tag{4-17}$$

これを、**畳込み積分**(convolution integral)という。

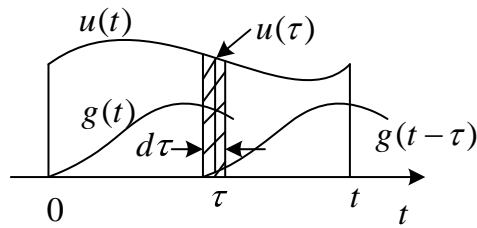


図 4-6 時刻  $t$  までの入力の分割

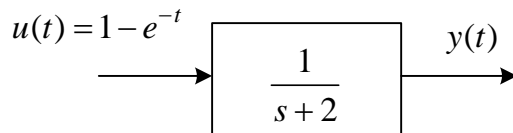
(4-17)で、 $t - \tau = \tau'$ とおき、変形した後改めて、 $\tau' = \tau$ とおくと、次式を得る。

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (4-18)$$

東北工業大学の中川先生は、人間の現在の心境は畳み込み積分と言っています。人生いろいろな出来事  $u(\tau)$  が次から次に起こります。出来事の衝撃度 1 (面積) に対する心境は人によって決まっており  $g(t - \tau)$  で表します (すぐ忘れる人の場合は時間が経つにつれ急に小さくなる関数でしょう)。 $t - \tau$  としているのは、その出来事があってから ( $t \geq \tau$ ) 心境が起きるからです。よって、それぞれの出来事の衝撃度  $u(\tau)d\tau$  に対する心境は  $g(t - \tau)u(\tau)d\tau$  となる。それらを現時刻  $t$  まで加え合わせる (積分する) と現在の心境  $y(t)$  というわけです。昔の衝撃は少し残っているが現在の衝撃が気持ちの中では大きい。

(問題 4-2) 図のブロック線図で、次の 2 つの方法で、出力  $y(t)$  を求めよ。

- (1) 入力をラプラス変換して求める方法
- (2) 畳み込み積分による方法



(解) (1)  $U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$   $Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$   $y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

(2)  $\frac{1}{s+2}$  のインパルス応答は  $g(t) = e^{-2t}$

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(1 - e^{-\tau})d\tau = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$g(t)$  のラプラス変換を伝達関数  $G(s)$  と定義し、一般の入力  $u(t)$  に対する応答を畳み込み積分で表わし、それをラプラス変換することで  $Y(s) = G(s)U(s)$  が導ける。本書では、判り易くするため、 $Y(s) = G(s)U(s)$  で  $G(s)$  を定義しました。

## 4.6 状態方程式による応答の計算

状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4-19)$$

を解いて応答を求める方法を述べよう。これは、初期値に対し応答を求めることを意味する。(4-19) をラプラス変換して、

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (4-20)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (4-21)$$

逆ラプラス変換し、第2項には畳み込み積分を適用して、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (4-22)$$

ここで、 $e^{\mathbf{A}t}$  は、**状態推移行列**(state transition matrix)と呼ばれる。これは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \end{aligned} \quad (4-23)$$

但し、 $\mathbf{I}$ : 単位行列

$e^{\mathbf{A}t}$  には、以下の性質がある。

$$(1) \quad \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \quad (4-24)$$

$$(2) \quad e^0 = \mathbf{I} \quad (4-25)$$

$$(3) \quad e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} \quad (4-26)$$

$$(4) \quad (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (4-27)$$

$$(5) \quad L[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (4-28)$$

$$L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = e^{\mathbf{A}t} \quad (4-29)$$

(5) の証明 まず、 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots$  ① を証明する。

左辺に  $sI - A$  を掛けると、単位行列になる。右辺について、

$$\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots\right)(sI - A) = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \cdots - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s^2} - \cdots = I$$

であるから、①が成立する。①を逆ラプラス変換すると、(5)となる。

$e^{At}$  の計算法について述べる。

(1) ラプラス逆変換による方法

(4-29) を用いる方法。手計算向き。逆行列を計算する必要があるから、

$A$  が  $3 \times 3$  (3行3列) 位までしかできないだろう。

(2) 級数展開による方法

(4-23) を用いる方法で、項は段々小さくなり、 $k=10$  程度でもかなり

良い近似が得られるだろう。コンピュータによる数値計算向き。

(3) 行列の対角化による方法

以下に、**行列の対角化**による方法を述べる。

$A$  を  $n$  行  $n$  列の行列として、述べよう。 $A$  の**固有値**  $s_1, s_2, \dots, s_n$  (一般に複素数) が全て異なるとき、 $A$  は次式で表される。

$$A = P Q P^{-1} \tag{4-30}$$

ここで、 $Q = \begin{bmatrix} s_1 & & & \mathbf{0} \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix}$ ,  $P = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$  (4-31)

$P, Q$  はいずれも、 $n \times n$  行列である。固有値  $s_i$  に対する一つの**固有ベクトル**を  $u_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix}$

(4-30)は、固有値の定義

$$A u_i = s_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4-32}$$

より導ける。すなわち、以下の式より出る。行列と成分の掛け算はサイズが合えば可能。

$$A P = A [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] = [A u_1 \ A u_2 \ \cdots \ A u_n] = [s_1 u_1 \ s_2 u_2 \ \cdots \ s_n u_n] = P Q$$

$P Q$  になる部分を  $n=3$  のときの証明する。



$$PQ = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 u_1^1 & s_2 u_2^1 & s_3 u_3^1 \\ s_1 u_1^2 & s_2 u_2^2 & s_3 u_3^2 \\ s_1 u_1^3 & s_2 u_2^3 & s_3 u_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{bmatrix} & s_2 \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{bmatrix} & s_3 \begin{bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

行列の対角化を用いることで、次式により  $A^k$  が計算できる。対角化のすごいところである。

$$A^k = PQP^{-1}PQP^{-1}PQP^{-1}\dots PQP^{-1} \\ = PQ^kP^{-1}$$

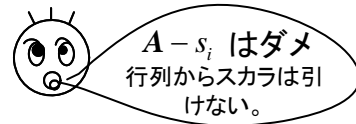
$$= P \begin{bmatrix} s_1^k & & \mathbf{0} \\ & s_2^k & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & s_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad (4-33)$$

$A$  の固有値は、(4-32)より、

$$(A - s_i I)u_i = \mathbf{0}$$

$A - s_i I$  の逆行列が存在すると、 $u_i = \mathbf{0}$  となり、  
つまらない。固有値は、この逆行列が存在しない条件、

$$|A - sI| = 0 \quad \text{または、} \quad |sI - A| = 0 \quad (4-34)$$



$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{単位行列} \\ n \times n \end{array}$$

より計算できる。[ ] 行列, | | 行列式をしっかりと区別すること。行列式はスカラーである。

(4-33)を用いると、

$$e^{At} = I + At + (A^2 t^2)/2! + (A^3 t^3)/3! + \dots \\ = P(I + Qt + (Q^2 t^2)/2! + (Q^3 t^3)/3! + \dots)P^{-1} \\ = P \begin{bmatrix} 1 + s_1 t + \frac{s_1^2 t^2}{2} + \dots & & & \mathbf{0} \\ & 1 + s_2 t + \frac{s_2^2 t^2}{2} + \dots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 + s_n t + \frac{s_n^2 t^2}{2} + \dots \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (4-35)$$

これは、安定性を検討する場合に制御理論で用いられる。

応答を計算するには、(4-22)を用いることもできるが、コンピュータにより状態方程式(4-19)をルンゲ・クッタ法などで直接数値積分することが簡単であろう。ルンゲ・クッタ法を用いると、入力のいろいろの変化や非線形の状態方程式に対しても適用できる。この他に、制御用の市販ソフトウェアであるマトラブ(Matlab)も良く用いられている。

(例題 4-4) 次の状態方程式の解を求めよ。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

(ラプラス逆変換による方法)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

とおく。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= L^{-1} \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4} & \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+4} \\ \frac{2}{s+3} - \frac{2}{s+4} & \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故に、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

(行列の対角化による方法)

$\mathbf{A}$  の固有値を求め、固有ベクトルによる対角化を行う。

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4) = 0$$

よって、 $\mathbf{A}$  の固有値は  $s = -3, -4$  である。

$s_1 = -3$  のとき、

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に、 $x_1 = x_2$  よって、 $s_1$  に対する固有ベクトルは、

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 1]^T \quad (1 \text{ つに決まらないので適当に選ぶ。})$$

$s_2 = -4$  のとき、

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に、 $2x_1 = x_2$  よって、 $s_2$  に対する固有ベクトルは、次のように選ぶ。

$$\mathbf{u}_2 = [1 \ 2]^T$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{とすると、} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{と確かになるので、}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \exp(-3t) & 0 \\ 0 & \exp(-4t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) + 2\exp(-4t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。以下、同様に計算できる。

(問題 4-3)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  のとき、 $e^{\mathbf{A}t}$  を

(1) ラプラス変換、(2) 行列の対角化により求めよ。

$$\text{(解)} \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-3t})/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

## 第5章 周波数応答

伝達関数で、 $s = j\omega$  において計算する周波数応答は大変重要で、その物理的意味も十分に理解して欲しい。これは、電気回路の交流理論や増幅器の周波数特性とも関係が深い。

### 5.1 周波数応答とは？

図 5-1 の  $RL$  回路に正弦波交流電圧  $e(t) = E_m \sin \omega t$  を加え、抵抗の両端の電圧  $v(t)$  を出力とするシステムを考える。定常状態では、 $v(t)$  は  $e(t)$  と同じ周波数の正弦波で、その振幅と位相だけが異なる。フェーザを使って、出力電圧を求めてみよう。

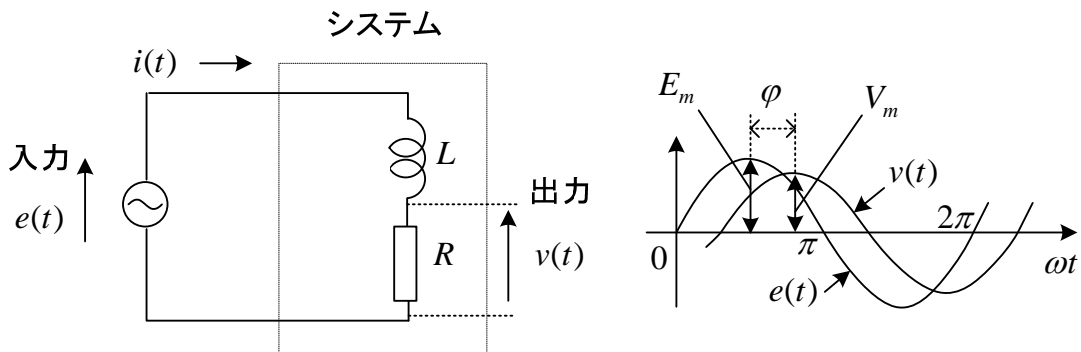


図 5-1  $RL$  回路に正弦波交流電圧を加えたときの出力電圧

成り立つ微分方程式は次式となる。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t), \quad v = Ri \quad (5-1)$$

$e(t) = E_m \sin \omega t$  の場合、交流理論を用いてフェーザ表示すると、次式となる。

$$j\omega L \dot{I} + R\dot{I} = \dot{E}, \quad \dot{V} = R\dot{I} \quad (5-2)$$

ここで、フェーザの定義より、 $\dot{E} = E_m / \sqrt{2}$  である。

(フェーザの定義:  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$ ,  $\phi$ : 初期位相 (一定))

$$\text{よって, } \dot{V} = \frac{R\dot{E}}{R + j\omega L} \quad \text{または} \quad \frac{\dot{V}}{\dot{E}} = \frac{R}{R + j\omega L} \quad (5-3)$$

となる。 $\dot{V}$  を大きさ と位相に分けて表示すると、

$$\dot{V} = \frac{RE_m}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\varphi} \quad \text{ただし、} \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (5-4)$$

よって、フェーザの定義を逆に用いて瞬時値  $v(t)$  が得られる。

$$v(t) = \frac{RE_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (5-5)$$

$v(t)$  の振幅と位相については、(5-3)で、

$$\frac{\dot{V}}{\dot{E}} = \frac{R}{R + j\omega L} \equiv X(j\omega) \quad (5-6)$$

と置き、 $X(j\omega)$  の絶対値や偏角を計算することで求まる。すなわち、(5-5)は

$$v(t) = |X(j\omega)| E_m \sin(\omega t + \angle X(j\omega)) \quad (5-7)$$

である。 $|X(j\omega)|$  は、入出力の振幅比  $V_m / E_m$ 、 $\angle X(j\omega)$  は入出力の位相差 ( $-\varphi$ ) である。

ところで、(5-1)をラプラス変換し、初期値を 0 として伝達関数を求めると、

$$G(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R}{R + sL} \quad (5-8)$$

ただし、 $E(s) = L[e(t)]$ ,  $V(s) = L[v(t)]$

(5-6), (5-8)より、 $X(j\omega) = G(j\omega)$  であることが判る。従って、(5-7)より、次式が成立し、 $|G(j\omega)|$  は、入出力の振幅比  $V_m / E_m$ 、 $\angle G(j\omega)$  は入出力の位相差 ( $-\varphi$ ) である。

$$v(t) = |G(j\omega)| E_m \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (5-9)$$

以上のことは、フェーザでは、 $d/dt \rightarrow j\omega$  と対応するのに対し、伝達関数を求めるときのラプラス変換では、 $d/dt \rightarrow s$  と対応することからも理解できる。しかし、フェーザ  $\dot{V}$ ,  $\dot{E}$  とラプラス変換  $V(s)$ ,  $E(s)$  は全く異なることに気をつけよう。ちなみに、表 2-1 より、 $e(t) = E_m \sin \omega t$  のラプラス変換は  $E(s) = E_m \omega / (s^2 + \omega^2)$  で、 $s = j\omega$  とすると  $E(j\omega)$  は分母が 0 となってしまう。 $\dot{E} \neq E(j\omega)$  である。伝達関数  $G(s)$  についてだけ、 $s = j\omega$  としてよいのである。

以上の議論は、一般の線形システムについても成立する。このことを以下に述べよう。一般に、有理関数で表された伝達関数は因数分解して、次式のように表すことができる。

$$G(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

簡単のため、零点  $z_1, z_2, \dots, z_m$  と極  $p_1, p_2, \dots, p_n$  は全て異なる（複素数でもよい）とし、全ての極の実部を負とする。一般に、 $m \leq n$  である。

入力を、 $u(t) = U_m \sin \omega t$  とすると、このラプラス変換は、次式で与えられる。

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_m$$

従って、出力は次式のように部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) &= \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_m \\ &= \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} U_m \\ &= \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} + \frac{a}{s+j\omega} + \frac{b}{s-j\omega} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} k_i &= \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_m \\ a &= \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s+j\omega)G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_m = G(-j\omega) \frac{1}{-2j} U_m \\ b &= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s-j\omega)G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_m = G(j\omega) \frac{1}{2j} U_m \end{aligned}$$

従って、出力は  $Y(s)$  を逆変換して次式で求められる。

$$y(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} + a e^{-j\omega t} + b e^{j\omega t}$$

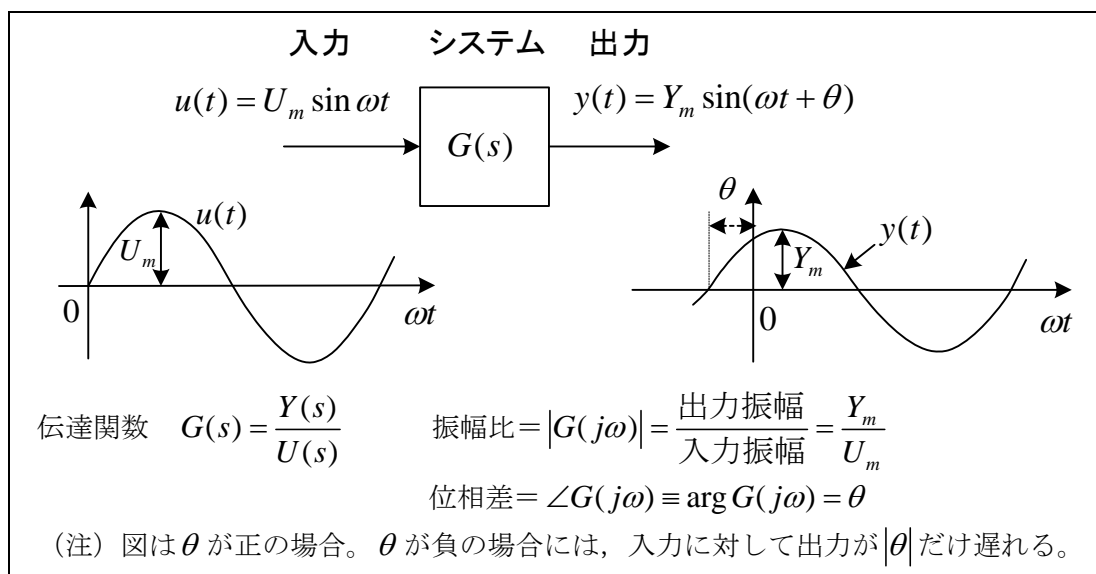
極の実部は負であるから、定常状態では次式で与えられる。

$$\begin{aligned} y(t) &= a e^{-j\omega t} + b e^{j\omega t} \\ &= G(-j\omega) \frac{1}{-2j} U_m e^{-j\omega t} + G(j\omega) \frac{1}{2j} U_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

いま、 $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\theta}$  とおくと、 $G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\theta}$ （共役複素数）より

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{U_m |G(j\omega)|}{2j} (e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}) \\ &= U_m |G(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) \quad \text{ただし、} \theta = \arg G(j\omega) = \angle G(j\omega) \end{aligned}$$

となり、証明できた。まとめると、以下の図のようになる。



$G(j\omega)$  を**周波数伝達関数**(frequency transfer function)と呼び、 $\omega$  を0から $\infty$ まで変化させたときの  $G(j\omega)$  の変化を**周波数応答**(frequency response)と呼ぶ。 $G(j\omega)$  は複素数であり、その実部、虚部をそれぞれ横軸、縦軸にとって表したものを**ベクトル軌跡**(vector locus)または**ナイキスト線図**(Nyquist diagram)、 $G(j\omega)$  の大きさと位相を縦軸、 $\omega$  を横軸にとって描いたものを**ボード線図**(Bode diagram)という。 $\omega$  を変化させるということは、入力としていろんな周波数の正弦波を別々に加えてみて、出力の振幅や位相のずれを一回一回調べることを意味する。これらは、定常状態での特性の集まりであるが、面白いことに過渡的な振舞を予測することが可能となる。安定なシステムでなければ、周波数応答の実験はできないが、不安定なシステムでも  $G(j\omega)$  のベクトル軌跡やボード線図は計算でき利用される。

## 5.2 1次遅れ要素の周波数応答

1次遅れ要素の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \tag{5-10}$$

で与えられる。周波数応答は  $s = j\omega$  とおいて、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} \\ &= \frac{1}{1+(\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \equiv x + jy \end{aligned} \tag{5-11}$$

これから、 $\omega$  を消去して、 $x, y$  の関係を求める。

$$y/x = -\omega T \quad (5-12)$$

$$\therefore x = \frac{1}{1+(\omega T)^2} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \quad (5-13)$$

が得られる。整理して、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad (5-14)$$

従って、ベクトル軌跡は図 5-2 に示すように円となる。 $\omega: 0 \rightarrow \infty$  に対し、(5-11)より  $y < 0$  で半円上を動く。 $\omega$  が小さい場合には、大きさ  $|G(j\omega)|$  はほぼ 1 で、位相  $\angle G(j\omega)$  はほぼ 0 である。これは、出力が入力とほとんど同じ波形であることを意味する。 $\omega = 1/T$  の点では、 $\angle G(j\omega) = \pi/4$  で出力の位相が入力より  $\pi/4$  遅れることを意味する。 $\omega$  が大きい場合には、大きさが 0 に近づき（信号が伝わらず）、位相はほぼ  $\pi/2$  遅れることが判る。

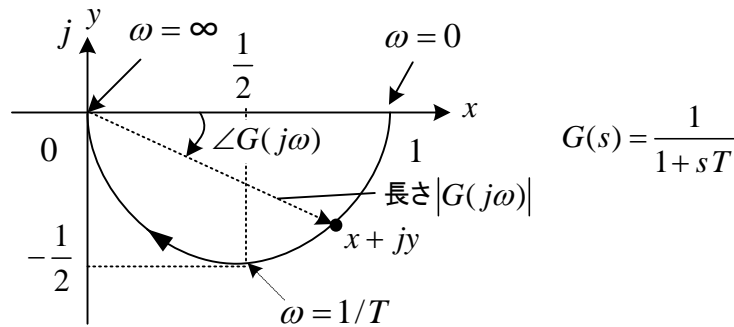


図 5-2 1 次遅れ要素のベクトル軌跡（ナイキスト線図）（円になるので覚えて！）

一般にベクトル軌跡（ナイキスト線図）を描くには、まず (5-11) のように実部と虚部に分け、次に  $\omega$  を適当に変化させて電卓などで実部と虚部を計算し、複素平面上に点をプロットして滑らかに結ぶとよい。

次に、 $G(j\omega)$  のボード線図を描く方法を述べる。

(5-10)より、利得（ゲイン gain） $g(\text{dB})$  と位相  $\angle G(j\omega)$  は、次式で与えられる。

$$g \equiv 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad (5-15)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{-\omega T}{1} \quad (5-16)$$

位相  $\tan^{-1}(y/x)$  の計算は、電卓を除き  $y/x$  を計算してはいけない。関数の  $\text{atan2}(y, x)$  (C 言語)、 $\text{atan2}(x, y)$  (Excel) を用いる。電卓では、 $-\pi/2 \sim \pi/2$  の範囲で答えが出るので、どの象限の角度かを考え、 $\pm\pi$  することもある。計算によらず、略図が書けるようになることも大切である。近似的に書く場合には、以下の様に考える。



$$g \begin{cases} \approx 20 \log_{10} 1 = 0 & (\omega < \omega_0) \\ \approx 20 \log_{10} \frac{1}{\omega T} & (\omega_0 < \omega) \end{cases} \Leftrightarrow G(j\omega) \approx \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{j\omega T} \end{cases} \quad (5-17)$$

ただし、 $\omega_0 \equiv 1/T$  である。 $\omega_0$ は折点角周波数(break point frequency)と呼ばれる。分母の実部と虚部が等しいときの角周波数である。

厳密には $\omega = \omega_0$ で $g = 20 \log_{10} |1/(1+j)| = 20 \log_{10}(1/\sqrt{2}) \approx -3[\text{dB}]$ となる。また、位相については次式で近似する。

$$\angle G(j\omega) \begin{cases} \approx \angle 1 = 0 & (\omega < 0.1\omega_0) \\ \approx \angle 1/(1+j) = -45^\circ & (\omega = 1/T \equiv \omega_0) \\ \approx \angle 1/(j\omega T) = -90^\circ & (10\omega_0 < \omega) \end{cases} \quad (5-18)$$

$T=0.5$ と $T=10$ のとき、ボード線図を図5-3に示す。ボード線図は片対数グラフ上に書く。 $\omega_0 < \omega$ のとき、 $\omega$ を10倍すると、ゲインは20dB減少し(1-20参照)、これを-20dB/decと書く。decはdecade(デカード)の略である。 $\omega < \omega_0$ では、ゲインが0dBで、入力に対する出力の振幅は変化せず、 $\omega_0 < \omega$ では、ゲインが低く出力の振幅は小さくなる。1次遅れ要素は低域通過フィルタ(LPF: low pass filter)の一種である。位相は折点角周波数で-45度(出力は入力より45度遅れ)、その0.1倍と10倍でそれぞれ0度と-90度となる直線で近似する(0.2倍と5倍で近似する文献が多いが本テキストではこのように近似する)。

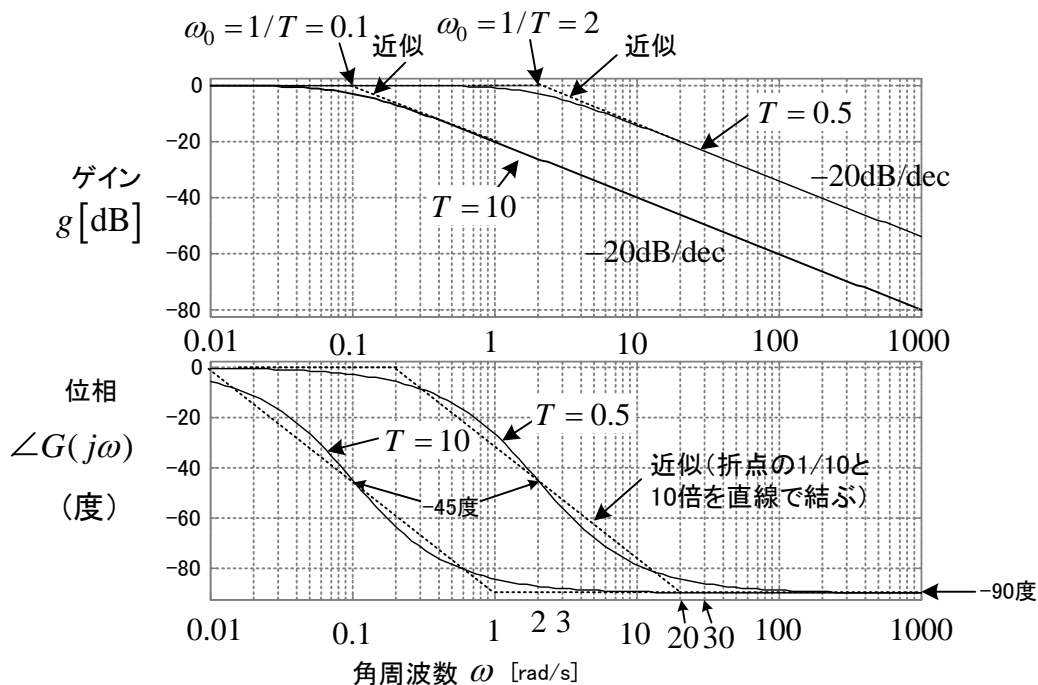
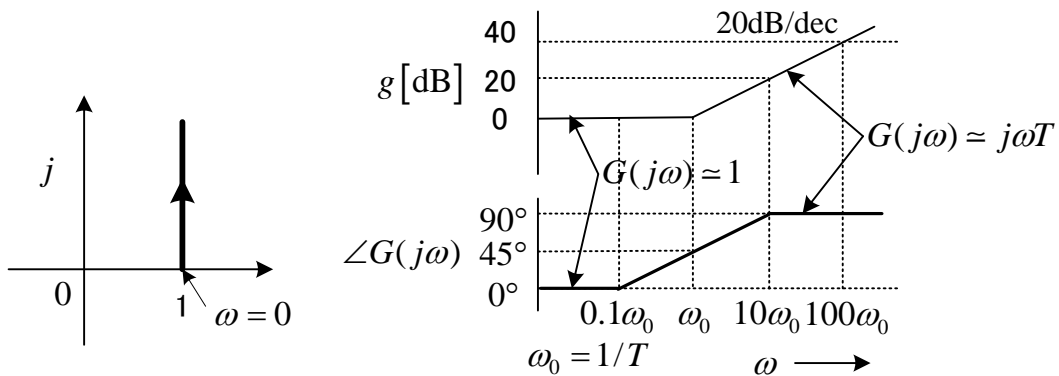


図5-3 1次遅れ要素 $G(s) = \frac{1}{1+sT}$ のボード線図(実線はMatlabで描いた厳密解)

1次遅れ要素の逆数である PD 要素  $G(s) = 1 + sT \Rightarrow G(j\omega) = 1 + j\omega T$  のベクトル軌跡とボード線は図のようになる。P は**比例**(proportional), D は**微分**(derivative)を意味する。**実部と虚部が等しいときの角周波数である折点角周波数**は  $\omega_0 = 1/T$  であり,  $G(j\omega_0) = 1 + j$  となる。 $\omega < \omega_0$  では,  $G(j\omega) \approx 1$  と近似して, ゲインが 0 dB となる。 $\omega_0 < \omega$  では,  $G(j\omega) \approx j\omega T$  と近似して,  $g \approx 20 \log_{10} \omega T$  である。 $\omega$  を 10 倍すると, ゲインは 20dB 増加し, これを 20dB/dec と書く。PD 要素は**高域通過フィルタ** (HPF : high pass filter) の一種である。位相は折点角周波数で 45 度 (出力は入力より 45 度進む), その 0.1 倍と 10 倍でそれぞれ 0 度と 90 度となる直線で近似して書く。



(a) ベクトル軌跡

(b) ボード線図(近似)

図 5-4 PD 要素  $G(s) = 1 + sT$

### 5.3 積分要素と微分要素の周波数応答

#### ○ 積分要素の周波数応答

入力  $u(t)$  の積分により出力  $y(t)$  が得られる場合,

$$y(t) = \int_0^t u(t) dt \tag{5-19}$$

と書ける。ラプラス変換して初期値を 0 と置き, 積分要素の伝達関数が次式で求まる。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \tag{5-20}$$

ブロック線図を図 5-5 に示す。よって, 積分要素の周波数伝達関数は次式で与えられる。

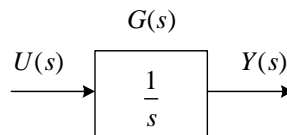


図 5-5 積分要素のブロック線図

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega} \quad (5-21)$$

ベクトル軌跡は負の虚軸上にある。 $\omega = 0$ で $-j\infty$ となる。

ボード線図は、

$$\text{ゲイン: } g [\text{dB}] = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega} = -20 \log_{10} \omega \quad (5-22)$$

$$\text{位相: } \angle G(j\omega) = -90^\circ \quad (5-23)$$

より描ける。ボード線図のゲインは、片対数グラフ上なので直線となる。横軸は $\omega$ として  
いるが、長さは $x = \log_{10} \omega$ であり、 $g = -20x$ の直線になる。 $\omega$ の値を0.1, 1, 10と入れ  
てみよ。横軸に0はないことに注意せよ。負の虚軸上はどの点でも偏角は-90度である。

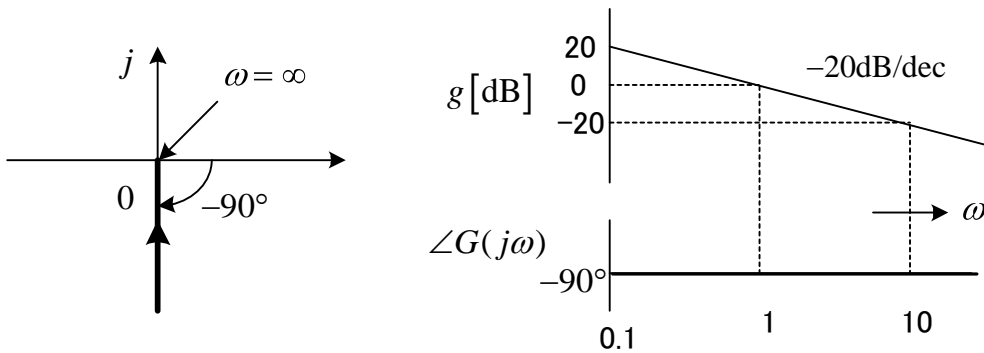


図 5-6 積分要素  $G(s) = \frac{1}{s}$  のベクトル軌跡とボード線図

## ○ 微分要素の周波数応答

入力  $u(t)$  の微分により出力  $y(t)$  が得られる場合、

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (5-24)$$

と書ける。ラプラス変換して初期値を0と置き、微分要素の伝達関数が次式で求まる。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s \quad (5-25)$$

ブロック線図を図 5-7 に示す。

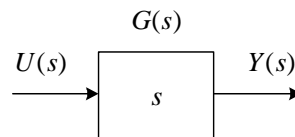


図 5-7 微分要素のブロック線図

よって、微分要素の周波数伝達関数は次式で与えられる。

$$G(j\omega) = j\omega \quad (5-26)$$

ベクトル軌跡は正の虚軸上にある。

ボード線図は、

$$\text{ゲイン: } g [\text{dB}] = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega \quad (5-27)$$

$$\text{位相: } \angle G(j\omega) = 90^\circ \quad (5-28)$$

より描ける。

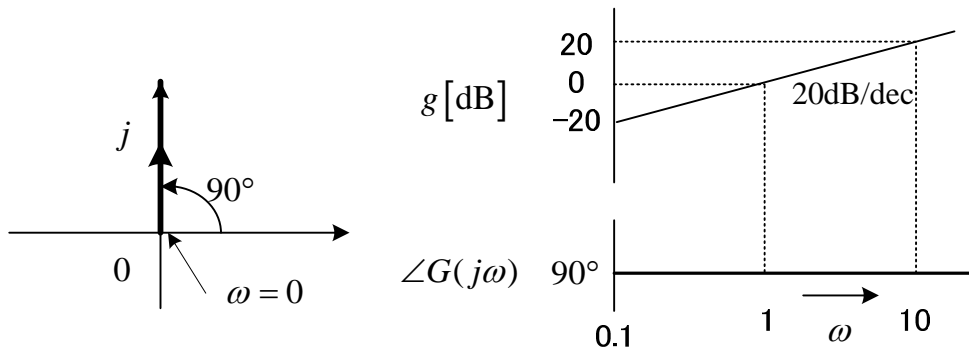


図 5-8 微分要素  $G(s) = s$  のベクトル軌跡とボード線図

## 5.4 2次要素の周波数応答

2次要素の伝達関数は、げんすいけいすう減衰係数  $\zeta$  と固有角周波数  $\omega_n$  を用いた次式で表現される。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-29)$$

従って、周波数伝達関数は  $s = j\omega$  とおいて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1} \\ &= \frac{1}{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\} + j2\zeta(\omega/\omega_n)} \end{aligned} \quad (5-30)$$

簡単のため、

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (5-31)$$

と置く。このとき、ベクトル軌跡は次式の実部と虚部より書ける。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \hat{\omega}^2 + j2\zeta\hat{\omega}} = \frac{1 - \hat{\omega}^2}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + (2\zeta\hat{\omega})^2} - j \frac{2\zeta\hat{\omega}}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + (2\zeta\hat{\omega})^2} \quad (5-32)$$

ボード線図については、次式でゲインと位相を求める。

$$\begin{aligned} \text{ゲイン: } g &= 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + (2\zeta\hat{\omega})^2}} \\ &= -10\log_{10} \left\{ (1 - \hat{\omega}^2)^2 + (2\zeta\hat{\omega})^2 \right\} \\ &= \begin{cases} 0 & : \hat{\omega} \ll 1 \\ -40\log_{10} \hat{\omega} & : \hat{\omega} \gg 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\begin{aligned} \text{位相: } \angle G(j\omega) &= \tan^{-1} \frac{-2\zeta\hat{\omega}}{1 - \hat{\omega}^2} \\ &= \begin{cases} 0^\circ & : \hat{\omega} \ll 1 \\ -90^\circ & : \hat{\omega} = 1 \\ -180^\circ & : \hat{\omega} \gg 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-34)$$

正確に計算したベクトル軌跡とボード線図をそれぞれ図 5-9, 図 5-10 に示す。2つの1次遅れ要素の積に分解できる場合は近似的に書けるが、複素極を持つ場合近似は難しい。

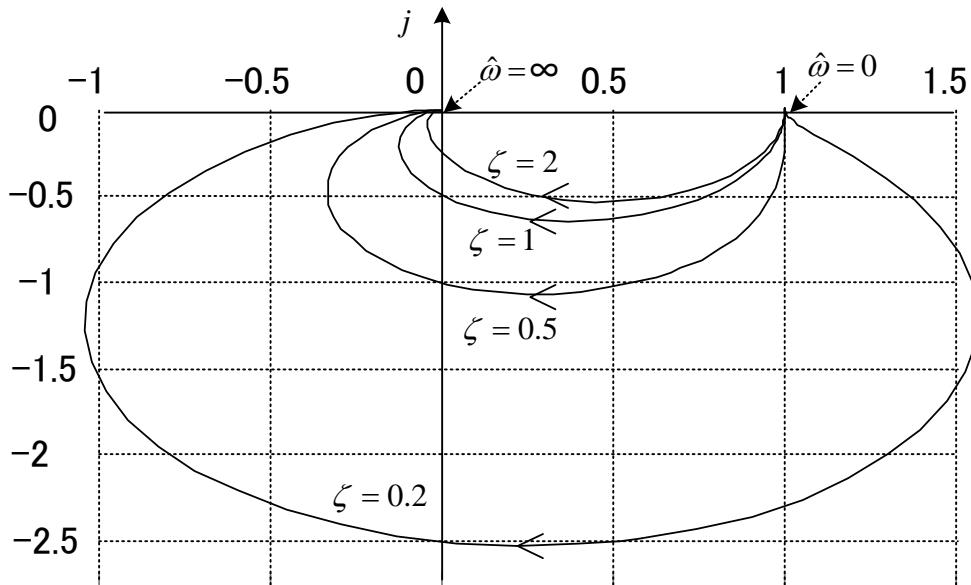


図 5-9 2次要素のベクトル軌跡

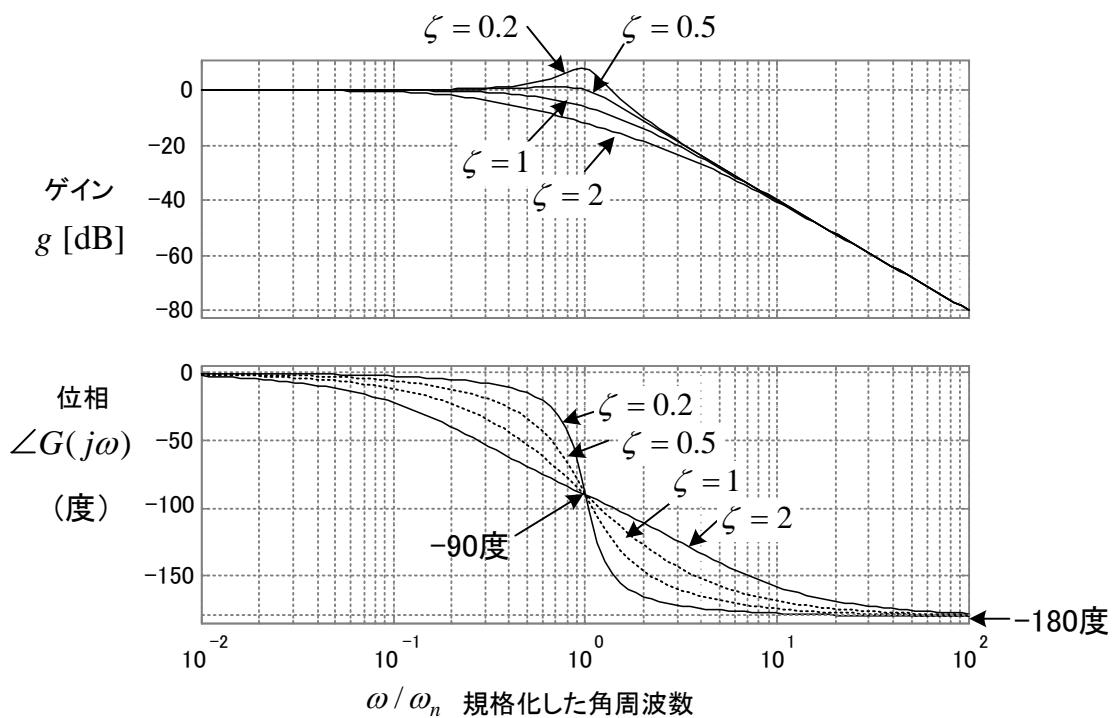


図 5-10 2次要素のボード線図

ボード線図で、ゲインが極大値をもつ場合がある。このときの値を求める。

$$Q = (1 - \hat{\omega}^2)^2 + (2\zeta\hat{\omega})^2 \quad (5-35)$$

とおき、 $\hat{\omega}$  で微分する。

$$\frac{dQ}{d\hat{\omega}} = 4\hat{\omega}(2\zeta^2 - 1 + \hat{\omega}^2) = 0 \quad (5-36)$$

$$\therefore \hat{\omega} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore Q = 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \quad (5-37)$$

このとき、ゲインの最大値は次式で与えられる。

$$g_{\max} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left\{1/(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})\right\} \quad (5-38)$$

ここで、注意したいのは、ボード線図上で最大値をもつのは、 $\hat{\omega}$  が存在する  $\zeta < 1/\sqrt{2} = 0.707$  で、ステップ応答にオーバーシュートが生じる  $\zeta < 1$  と異なる点である。

## 5.5 むだ時間要素の周波数応答

むだ時間要素は、入力  $u(t)$  に対し出力  $y(t)$  が次式で表される。

$$y(t) = u(t - L) \quad (5-39)$$

と書ける。ラプラス変換して、むだ時間要素の伝達関数が次式で求まる。例題 2-9 参照。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-Ls} \quad (5-40)$$

よって、むだ時間要素の周波数伝達関数も  $s = j\omega$  とおいて次式で求められる（証明は本節の最後で述べる）。

$$G(j\omega) = e^{-j\omega L} \quad (5-41)$$

ベクトル軌跡は大きさ 1 の円になる。

ボード線図は、次式により描ける。

$$\text{ゲイン: } g [\text{dB}] = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} 1 = 0 \quad (5-42)$$

$$\text{位相: } \angle G(j\omega) = -\omega L \quad (5-43)$$

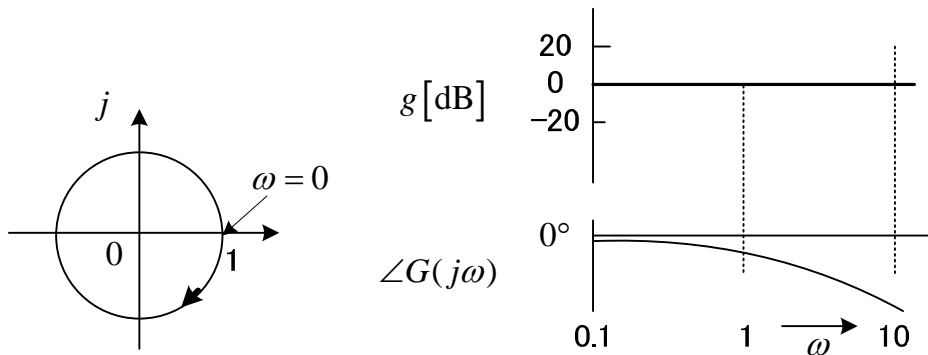


図 5-11 むだ時間要素  $G(s) = e^{-sL}$  のベクトル軌跡とボード線図

むだ時間要素があると位相が遅れるので不安定になり易い。

これまで周波数応答は有理関数  $G_0(s)$ （多項式の分数）で表された伝達関数について考えた。むだ時間を直列に含む図のシステムに正弦波を加えた場合を考えてみよう。推移の定理から、出力は図の  $y(t)$  になる。図は出力の位相が入力より進む場合を示しているが、現実にはむだ時間もあるので出力の位相は遅れる場合が多い。

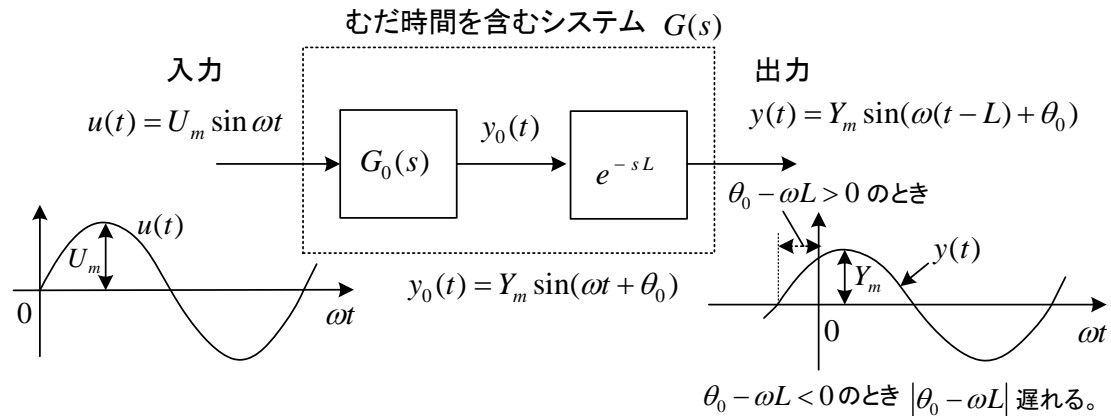


図 5-12 むだ時間を含むシステムの正弦波入力に対する応答

$$|G(j\omega)| = |G_0(j\omega)e^{-j\omega L}| = |G_0(j\omega)| |e^{-j\omega L}| = |G_0(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_0(j\omega)e^{-j\omega L} = \angle G_0(j\omega) + \angle e^{-j\omega L} = \theta_0 - \omega L$$

であるから、伝達関数が有理関数で表せるシステムとむだ時間要素とが直列に結合された場合でも、周波数応答は有理関数の場合と同様に  $s = j\omega$  として計算できることが判る。

## 5.6 一般の伝達関数の周波数応答の描き方

一般の伝達関数については、特にボード線図を用いて近似的にグラフを書くことができる。これは、伝達関数の積が、 $\log$  や偏角の性質により、和として計算できることによる。

伝達関数が次式で表わされるものとする。

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s) \quad (5-44)$$

このとき、ゲイン  $g$  [dB] と位相は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \text{ゲイン: } g &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| \cdots |G_n(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| + \cdots + 20 \log_{10} |G_n(j\omega)| \end{aligned} \quad (5-45)$$

$$\begin{aligned} \text{位相: } \angle G(j\omega) &= \angle G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega) \\ &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \cdots + \angle G_n(j\omega) \end{aligned} \quad (5-46)$$

よって、基本要素の伝達関数のボード線図をグラフ上で加減算することで全体のボード線図が得られる。



(例題 5-1) 次の伝達関数について、ボード線図の略図を描け。

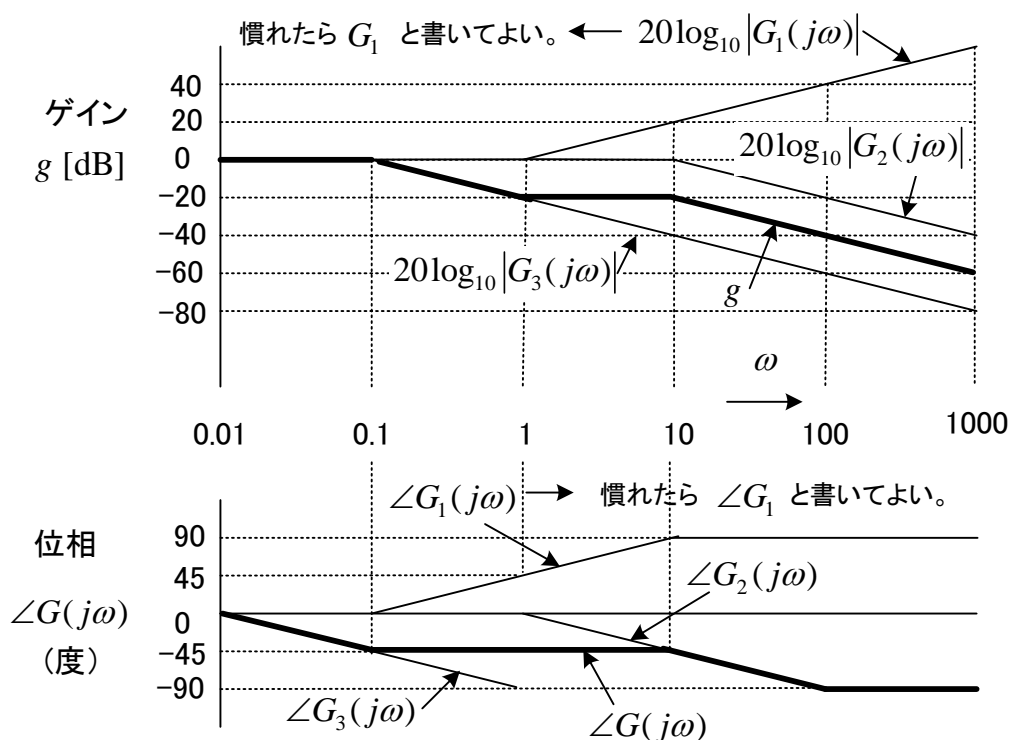
$$G(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

(解)  $G_1(s) = 1+s$ ,  $G_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$ ,  $G_3(s) = \frac{1}{1+10s}$  とおくと,

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)$$

と書ける。よって、 $G_1(j\omega), G_2(j\omega), G_3(j\omega)$  のボード線図を描いてそれらを加える。

$G_1(j\omega)$  のゲインは、実部と虚部が等しくなる  $\omega = 1$  で折れ曲がる。それ以下は  $\omega$  を無視し 1 なので 0dB, それ以上は 1 を無視し 20dB/dec で増加する。位相は、 $\omega = 1$  で  $45^\circ$ , その 1/10 で  $0^\circ$ , その 10 倍では  $90^\circ$  と近似する。 $G_2(j\omega)$  は、分母の実部と虚部が等しくなる  $\omega = 10$  でゲインが折れ曲がる。それ以下は  $\omega$  を無視し 1 なので 0dB, それ以上は 1 を無視し  $1/(j0.1\omega)$  であるから、-20dB/dec で減少する。位相は、 $\omega = 10$  で  $-45^\circ$ , その 1/10 で  $0^\circ$ , その 10 倍では  $-90^\circ$  と近似する。 $G_3(j\omega)$  のゲインは、 $\omega = 0.1$  で折れ曲がり、それ以上では -20dB/dec で減少する。慣れて意味が判るなら  $j\omega$  は  $s$  のまま図中に書いてもよい。



(ポイント) 一次遅れ要素や PD 要素のゲインは、実部と虚部が等しくなる周波数 (折点周波数) を見つけ、そこから折り曲げる。位相はそこが -45 度または 45 度になり、その周波数の 1/10 で 0 度、10 倍で -90 度または 90 度になると近似してグラフを書く。

(例題 5-2) 次の伝達関数について、ボード線図の略図を描け。

$$G(s) = \frac{1000(1+s)}{(10+s)(1+10s)}$$

(解)  $G(s) = \frac{100(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)}$  と変形する。

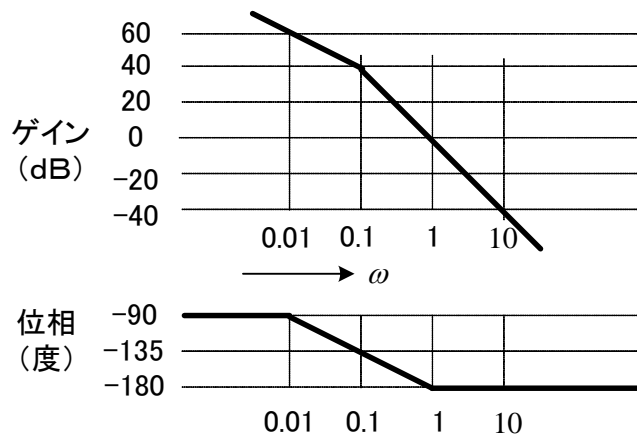
例題 5-1 の伝達関数が 100 倍されただけなので、 $20\log_{10}100 = 40\text{dB}$  だけゲインを上側に平行移動する。100 の位相は 0 だから、位相は例題 5-1 と同じである。

仮に、分母が 100 倍された場合だと、ゲインを 40dB だけ下側に平行移動する。

(ポイント) このように、分母分子を  $1+As$  のように変形すると、低周波領域で 0dB になるから、加えるとき便利である。

(問題 5-1) 伝達関数が、 $G(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$  であるとき、ボード線図の略図を書け。

(解)

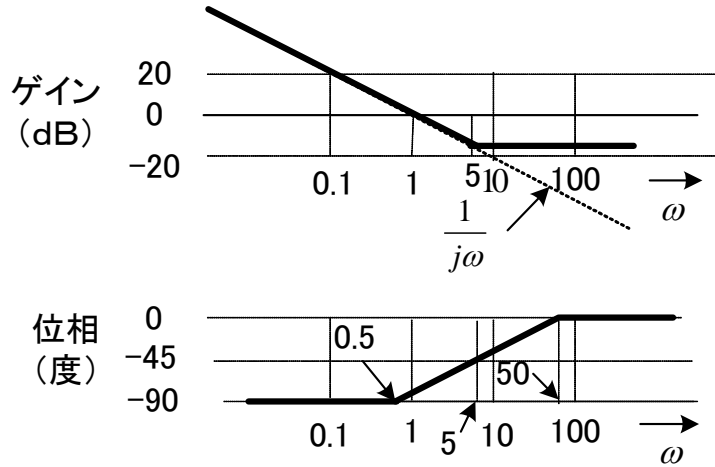


(ヒント)  $G(s)$  を  $G_1(s) = \frac{10}{s}$  と  $G_2(s) = \frac{1}{10s+1}$  に分けてボード線図を書き加え合わせる。

$G_1(s)$  は積分要素で、 $\omega=1$  で 20dB である。 $G_2(s)$  は折点角周波数 0.1 の 1 次遅れ要素である。試験では、最終的な結果だけでなく  $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$  のゲインと位相を書いて説明すること。

(問題 5-2) 伝達関数が、 $G(s) = \frac{s+5}{5s}$  であるとき、ボード線図の略図を書け。

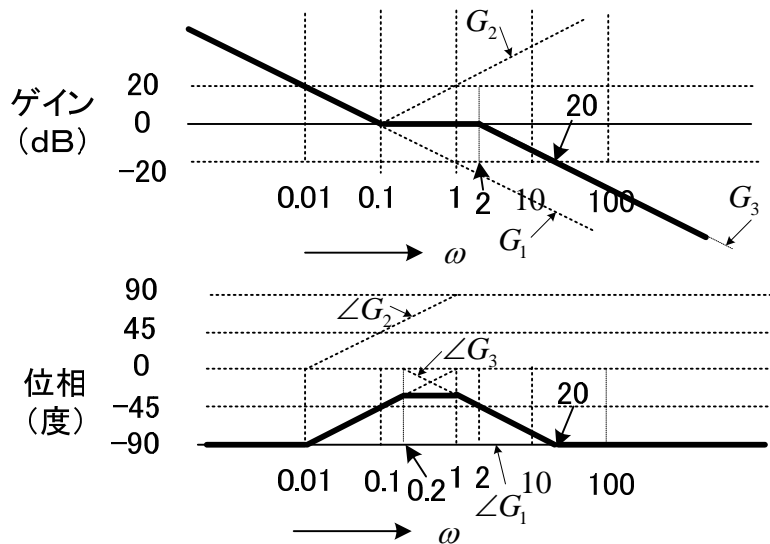
(解)



(ヒント)  $G(s)$  を  $G_1(s)=1/s$  と  $G_2(s)=1+0.2s$  に分けてボード線図を書き加え合わせる。  
 $G_1(s)$  は積分要素で、 $\omega=1$  で 0dB である。 $G_2(s)$  は折点角周波数 5 の PD 要素である。折点角周波数の 10 倍あるいは 1/10 でゲインが 20dB 変化したり、位相が 0 度や -90 度になる点注意。また、 $\omega=5$  は片対数グラフ上なので、その位置に注意せよ (図 5-3 を見よ)。

(問題 5-3) 伝達関数が、 $G(s)=\frac{s+0.1}{s(0.5s+1)}$  であるとき、ボード線図の略図を書け。

(解)



(ヒント)  $G(s)$  を  $G_1(s)=\frac{1}{10s}$ ,  $G_2(s)=1+10s$ ,  $G_3(s)=\frac{1}{0.5s+1}$  に分けてボード線図を書き、加え合わせる。 $G_1(s)$  は積分要素で、 $\omega=1$  で -20dB である。 $G_2(s)$  は折点角周波数 0.1 の PD 要素、 $G_3(s)$  は折点角周波数 2 の 1 次遅れ要素である。同じ割合で増える量と減る量を加えたら変化はない。

## 第6章 フィードバック制御系の安定判別 I

閉ループ伝達関数の分母を 0 とおいた特性方程式の根で、フィードバック制御系の安定性が決る。ラウスの方法は根を求めなくても安定判別が可能で良く用いられる。

### 6.1 伝達関数と安定条件

制御対象や制御器は一般に伝達関数として表される。良く利用されるフィードバック制御系は図 6-1 の構成となる。ただし、 $R(s) = L[r(t)]$ ,  $U(s) = L[u(t)]$ ,  $Y(s) = L[y(t)]$  である。

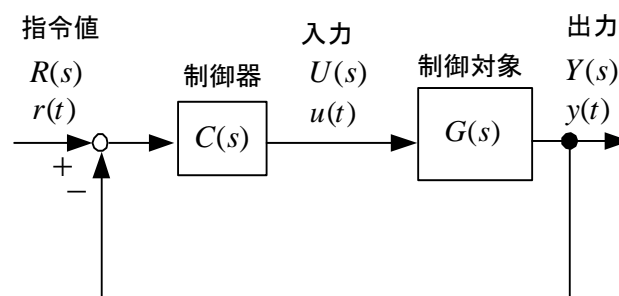


図 6-1 フィードバック制御系の構成

フィードバック制御系では、指令値を変更したときなどに出力がどんどん大きくなって（不安定という）装置が壊れる危険性がある。制御器を設計するとき、システムが安定であることが最も重要である。そこで、本章では安定かどうかを判定する方法を学ぶ。

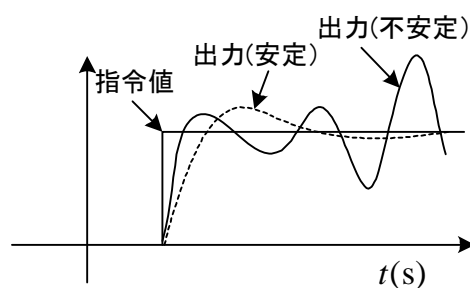


図 6-2 指令値のステップ変化に対する出力の応答(ステップ応答)

安定にはいくつかの定義がある。任意の有界な入力を加えたとき、出力も有界になるときその線形定係数システムは、**有界入力・有界出力安定**(bounded input bounded output stability, **BIBO 安定**)あるいは**入出力安定**という。本書では BIBO 安定を単に**安定**(stable)と呼んでいる。

図 6-1 のシステムで、指令値に対する出力の閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  (closed loop transfer function) は次のように計算できる。

$$G_{cl}(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (6-1)$$

ここで、一巡伝達関数 (loop transfer function)  $G_o(s) = C(s)G(s)$  を多項式の比として  $G_o(s) = N(s)/D(s)$  と表すと (分母 : denominator, 分子 : numerator), 次式が得られる。

$$G_{cl}(s) = \frac{D(s)}{D(s) + N(s)}$$

$G_{cl}(s)$  が次式のプロパー ( $n \geq m$ ) な有理関数で表現できる場合を考える。

$$G_{cl}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6-2)$$

ステップ応答を求め、それがある値に収束すれば安定と考える。このとき、 $R(s) = 1/s$  であるから、

$$Y(s) = G_{cl}(s)R(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \frac{1}{s} \quad (6-3)$$

$G_{cl}(s)$  の分母が以下のように因数分解できるものとしよう (重根なしと仮定する)。

$$\begin{aligned} & a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\ &= a_0 (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_k)(s - \alpha_1 - j\beta_1)(s - \alpha_1 + j\beta_1) \\ & \quad \times \cdots (s - \alpha_l - j\beta_l)(s - \alpha_l + j\beta_l) \end{aligned} \quad (6-4)$$

(ただし,  $n = k + 2l$ )

すなわち,  $k$  個の実根と  $2l$  個の複素根を持つとする。すると, 部分分数展開により,  $Y(s)$  は, 次式のように表せる。

$$\begin{aligned} Y(s) = & \frac{y_\infty}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \dots + \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{K_1}{s - \alpha_1 - j\beta_1} + \frac{K_1'}{s - \alpha_1 + j\beta_1} \\ & + \dots + \frac{K_l}{s - \alpha_l - j\beta_l} + \frac{K_l'}{s - \alpha_l + j\beta_l} \end{aligned}$$

ここで,  $y_\infty = sY(s)|_{s=0} = \frac{b_m}{a_n}$ ,  $A_k = (s - p_k)Y(s)|_{s=p_k}$ ,  $K_l = (s - \alpha_l - j\beta_l)Y(s)|_{s=\alpha_l + j\beta_l}$

などとして求められる。

これをラプラス逆変換して,

$$K_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} + K_i' e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} = e^{\alpha_i t} (B_i \cos \beta_i t + C_i \sin \beta_i t)$$

と変形し、 $y(t)$ は次式のようになる。

$$y(t) = y_\infty + \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^l e^{\alpha_i t} (B_i \cos \beta_i t + C_i \sin \beta_i t) \quad (6-5)$$

ただし、 $B_i = K_i + K_i'$ 、 $C_i = j(K_i - K_i')$ である。 $B_i$ 、 $C_i$ は実数となる。

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $y(t)$ が有限であるためには、全ての $i$ に対して、 $p_i \leq 0, \alpha_i \leq 0$ であればよいことが判る。安定条件としては、等号を除き、 $p_i < 0, \alpha_i < 0$ をいう。このとき、 $t \rightarrow \infty$ でexpの項は全て0となり、 $y(\infty) = y_\infty$ となる。 $y_\infty$ は $R(s) = 1/s$ の項に起因する。(6-4)では、重根を持つ場合は考えていないが、重根がある場合も含めて、一般に次の重要な定理が得られている。

(安定条件) 線形システムが安定である必要十分条件は、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の分母を0と置いた式(特性方程式(characteristic equation)と呼ばれる)

$$A(s) \equiv a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

の全ての根の実部が負(左半平面(left half plane)に根がある)であることである。

特性方程式の根は、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の極(pole)と言ってもよい。(伝達関数で、分母を0にする根を極、分子を0にする根を零点という。)図6-1とその特性方程式

$$1 + C(s)G(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad \text{すなわち、} \quad D(s) + N(s) = 0$$

は一例で、これと異なる場合には、実際に閉ループ伝達関数を計算し、その分母を0として特性方程式を求める必要がある。安定条件が満足されるとき、 $A(s)$ はフルビッツ多項式(Hurwitz polynomial)または安定多項式(stable polynomial)と呼ばれる。なお、図6-1の線形システムでは、指令値 $r(t)$ は安定判別に関係ない。また、制御対象だけの伝達関数 $G(s)$ についても上記の安定条件は成立し、その場合は入力 $u(t)$ が安定判別に関係しない。

図6-3に閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の極(特性方程式の根)とステップ応答の関係を示す。実軸上の極については、振動することなしに発散(右半平面)または収束(左半平面)する。虚部が大きい程振動周波数が高く、実部が正の場合にはその値が大きい程急激に発散し、実部が負の場合にはその絶対値が大きい程速く収束する。極が多く存在する場合には、実部が最も大きい代表根の影響を強く受けた応答となる。すなわち、不安定の度合いが大きい極ほど応答を左右する。閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の分子を0とする零点が安定か不安定かを左右することはない。ただし、零点により、 $A_i, B_i, C_i$ が異なり、応答に影響を及ぼす。特に、極の近くに零点が存在する場合、その極の影響は応答に現れにくい(極 - 零点

相殺)。しかし、時間が経つと極の影響が支配的となる。また、右半平面に零点がある場合、指令値が入力された直後に、応答が一度逆方向にふる場合がある。

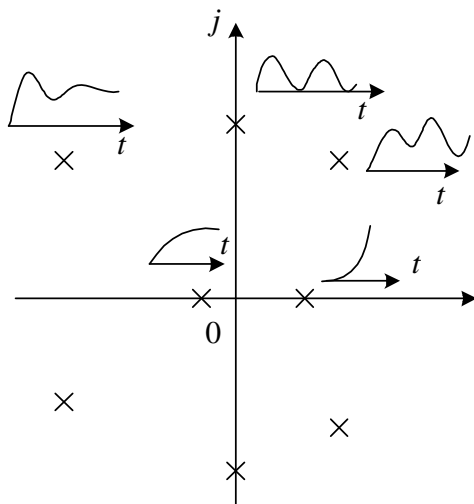
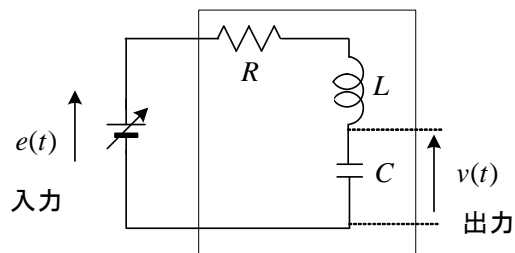


図 6-3 特性方程式の根とステップ応答

(例題 6-1) 図の制御対象で、コンデンサ電圧  $v(t)$  を検出して、入力電圧  $e(t)$  を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$

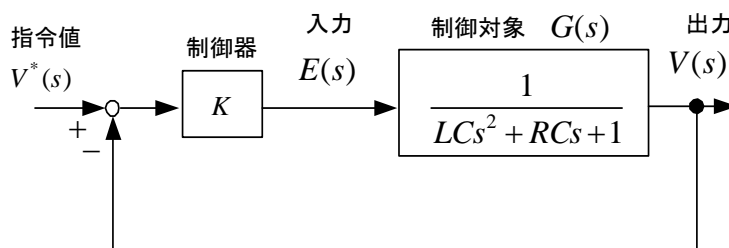
- (1) 制御系のブロック図を書け。
- (2) 閉ループ伝達関数を求めよ。
- (3) 制御系が安定である  $K$  の条件を求めよ。
- (4)  $R = 1(\Omega), L = 0.1(\text{H}), C = 0.001(\text{F}), K = 3$  のとき、 $v^*(t) = 1\text{V}$  に対するステップ応答を求めよ。



(解) (1)  $\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$  ただし、 $V(s) = L[v(t)], E(s) = L[e(t)]$

制御器についても同様にラプラス変換して、

$$E(s) = K(V^*(s) - V(s)) \quad \text{ただし、} V^*(s) = L[v^*(t)]$$



(2) 閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  は,

$$G_{cl}(s) = \frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{LCs^2 + RCs + K + 1}$$

(3) 特性方程式は,

$$LCs^2 + RCs + K + 1 = 0$$

極は, 次式となる。

$$s = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC(K+1)}}{2LC}$$

$R, L, C$  はいずれも正だから,  $s$  の実部が負となる安定条件は,

$$4LC(K+1) > 0 \quad \therefore K > -1$$

(4)  $V^*(s) = 1/s$  であるから, (2) で数値を代入し,

$$V(s) = \frac{K}{LCs^2 + RCs + K + 1} V^*(s) = \frac{3}{s(10^{-4}s^2 + 10^{-3}s + 4)}$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{10^{-4}s^2 + 10^{-3}s + 4}$$

と置くと, 恒等式により

$$a = \frac{3}{4}, b = -\frac{3}{4} \times 10^{-4}, c = -\frac{3}{4} \times 10^{-3}$$

$$\therefore V(s) = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{s} - \frac{s+10}{s^2 + 10s + 4 \times 10^4} \right)$$

表 2-1 を用いて逆変換して,

$$v(t) \approx \frac{3}{4} - \frac{3}{4} e^{-5t} \left( \cos 200t + \frac{1}{40} \sin 200t \right)$$

(注) (3)より, 極:  $s = \frac{-10^{-3} \pm \sqrt{10^{-6} - 4^2 \times 10^{-4}}}{2 \times 10^{-4}} \approx -5 \pm j200$  は, 過渡項の  $t$  の係数

となっている。これは,  $v(t)$  を定常項+過渡項として解くことでより明確に理解できる。その際, 初期値は一階微分も含め 0 とすると上式が得られる。

以上のように特性方程式の根を求めることで, 安定判別が可能となる。しかし, これが適用できるのは,  $s$  のべき乗が 2 すなわち 2 次の微分方程式で表現できるシステム (2 次系) までで, これ以上次数が高くなると根を求めることは容易ではない (もちろん, コンピュータで計算すれば別だが)。そこで, 考案されたのがラウスの安定判別法である。



## 6.2 ラウスの安定判別法

図 6-1 のシステムで、閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  は

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (6-6)$$

で与えられた。これから、分母を 0 とおいた、特性方程式は、次式で与えられる。

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (6-7)$$

( $1 + C(s)G(s) = 0$  を整理しても得られる。(6-6)で  $C(s)G(s) = N/D$  としてみよ。)

### ラウス (Routh) の安定判別法 :

(フルビッツ(Hurwitz)の安定判別法もあるが、実質的に同じものである。)

制御系が安定 (特性方程式(6-7)の根の実部が全て負) であるための条件として次の 2 つの定理が知られている。ただし、 $a_0 > 0$  とする (負なら両辺に-1 を掛ける)。

- (i) すべての係数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  が正であり、0 の項がないこと。これは安定であるための **必要条件** で、この条件を満足しても安定とは限らない。満足しないと不安定。
- (ii) 係数を演算して、以下の **ラウスの表** をつくる。(  $n = 6$  の場合を例にとる)

$s^6$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$s^5$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	0
$s^4$	$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{a_1} = a_6$	0
$s^3$	$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3 - a_1b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5 - a_1b_5}{b_1}$	0	
$s^2$	$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = b_5 = a_6$	0	
$s^1$	$e_1 = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{d_1} = \frac{d_1c_3 - c_1d_3}{d_1}$	0		
$s^0$	$a_6$			

このとき、左端の列の係数  $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_6$  がすべて正であることが安定であるための **必要十分条件** である。符号変化の回数だけ不安定根が存在する。

(ii) の条件が満足されると (i) の条件は自動的に満足されていることを示す。

(ii) の条件より

$$a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0, e_1 > 0, a_6 > 0 \quad (6-8)$$

$c_1 > 0, d_1 > 0, d_3 = a_6 > 0$  であり,  $e_1 > 0$  より

$$c_3 > 0 \quad (6-9)$$

従って,  $b_1 > 0, a_1 > 0, b_5 = a_6 > 0$  であり,  $c_3 > 0$  より

$$a_5 > 0 \quad (6-10)$$

同様に,  $d_1 > 0$  より

$$a_4 > 0$$

が得られる。以下同様にして  $a_3 > 0, a_2 > 0$  が得られる。

従って, 安定判別では (ii) の条件だけでも可能である。ラウスの表を作るとき, 左端の列が 0 になれば不安定と考えてよい。

これまで, 図 6-1 のブロック線図で示される制御系の安定判別を考えてきたが, 図 6-4 の場合にはどうしたらよいだろうか?

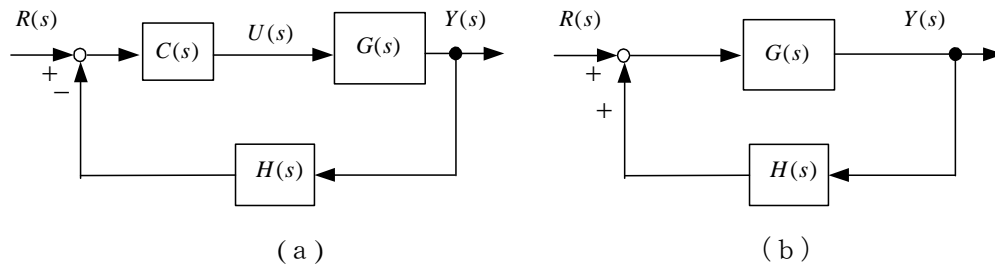


図 6-4 センサの伝達関数を考慮した制御系

(a) の場合には, 閉ループ伝達関数は,

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad (6-11)$$

であるから, 次式より得られる特性方程式に適用すればよい。

$$1 + C(s)G(s)H(s) = 0 \quad (6-12)$$

$C(s)G(s) = N_1 / D_1, H(s) = N_2 / D_2$  とおいて特性方程式が(6-12)より得られることを確認せよ。

一方, (b) の場合には,

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \quad (6-13)$$

であるから、特性方程式は次式より得られる。

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad (6-14)$$

従って、(6-14)にラウスの方法を適用すればよい。なお、線形システムでは指令値  $R(s)$  は自由に（出力に影響されずに）与える限り安定性に関係である。従って、 $R(s) = 0$  でも安定条件は変わらない。(b)の場合より、図 6-5 の安定条件は、(6-14)で判定できる。

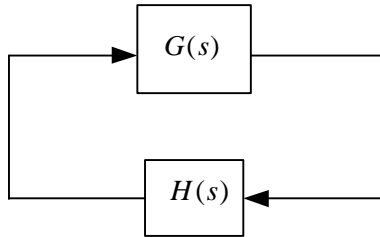
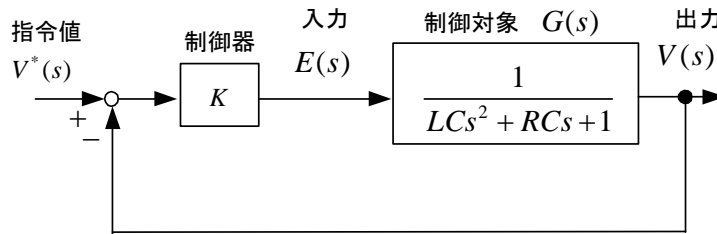


図 6-5 指令値 0 のシステム

(例題 6-2) 図のブロック線図で示される制御系の安定判別をラウスの方法で行え。



但し、 $L, C, R$  は全て正とする。

(解) 特性方程式は、次式で与えられる。

$$1 + \frac{K}{LCs^2 + RCs + 1} = 0$$

$$\therefore LCs^2 + RCs + K + 1 = 0$$

ラウスの安定判別法を適用する。

ラウスの表を作る。

$$\begin{array}{r} s^2 \quad LC \quad K+1 \\ s \quad RC \\ s^0 \quad K+1 \end{array}$$

1 列目が全て正でないといけない。よって、安定条件は、 $K > -1$

(注)  $R = 0, K + 1 > 0$  であれば、根は  $s = \pm j\sqrt{\frac{K+1}{LC}}$  となり、虚軸上に存在する。

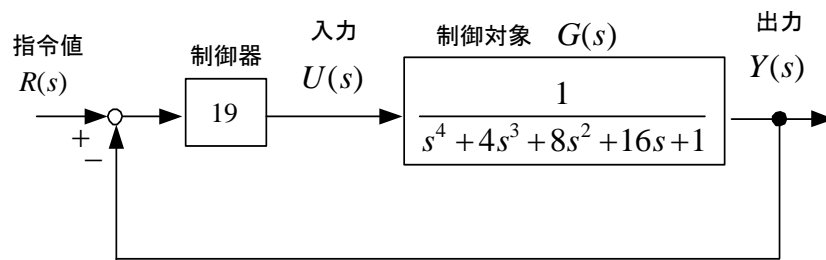
\* 一般に、2次系の特性方程式、 $as^2 + bs + c = 0$  の安定条件は、ラウスの安定判別法より、ラウスの表を作ることにより

$a > 0, b > 0, c > 0$  または  $a < 0, b < 0, c < 0$  となる (覚えておこう)。

直接求めると  $s = \frac{1}{2} \left( -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} \right)$  より、実部が負の条件は  $\frac{c}{a} > 0$  及び  $\frac{b}{a} > 0$  となり

同じ結果を得る。ラウスの方法が簡単だ。

(例題 6-3) 図のブロック線図で示される制御系の安定判別を行え。



(解) 特性方程式は、

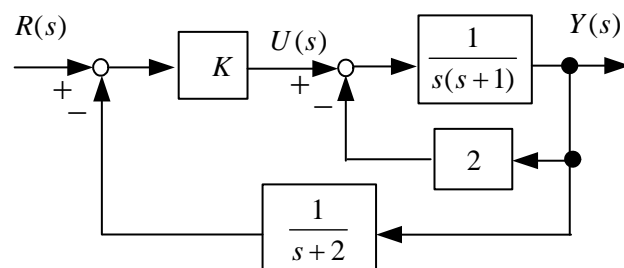
$$1 + \frac{19}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 1} = 0 \quad \therefore s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 20 = 0$$

ラウスの表をつくる。

$s^4$	1	8	20
$s^3$	4	16	0
$s^2$	$\frac{4 \times 8 - 1 \times 16}{4} = 4$	$\frac{4 \times 20 - 1 \times 0}{4} = 20$	0
$s^1$	$\frac{4 \times 16 - 4 \times 20}{4} = -4$	0	
$s^0$	20		

よって、1列が、1,4,4,-4,20 となり、符号が2回変化している。不安定根が2個存在する。

(例題 6-4) 図のブロック線図で示される制御系で安定となる  $K$  の条件を求めよ。



(解) まず、 $Y(s)/U(s)$  を求める。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{2}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

特性方程式は、閉ループ伝達関数  $Y(s)/R(s)$  の分母を 0 と置いた式だから、

$$1 + K \frac{1}{s^2 + s + 2} \frac{1}{s + 2} = 0$$

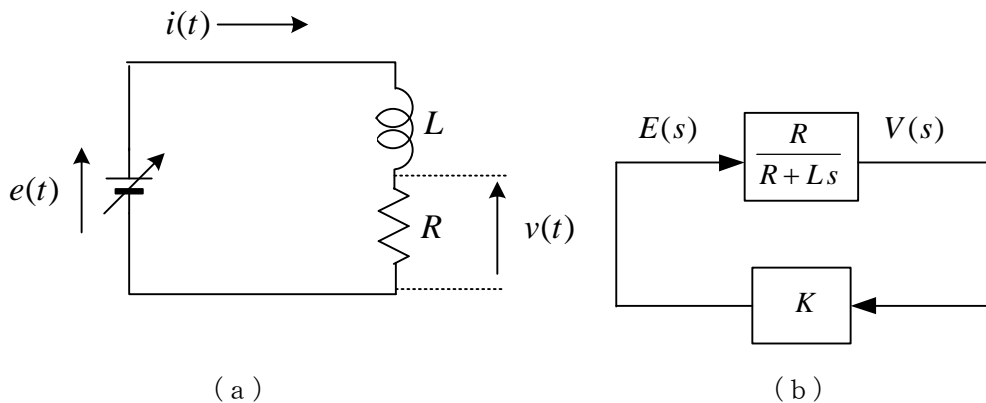
$$\therefore s^3 + 3s^2 + 4s + 4 + K = 0$$

ラウスの表は、

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \quad 4 \\ 3 \quad 4+K \\ \frac{12-(4+K)}{3} \\ 4+K \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \therefore 8 > K \\ \therefore K > -4 \end{array}$$

1 列目が全て正であることから、安定条件は  $8 > K > -4$

(例題 6-5) 図 (a) の回路で、 $e(t) = Kv(t)$  と制御するとき、安定であるための条件を求めよ。



(解) ラプラス変換して、図 (b) のブロック図が得られる。特性方程式は、

$$1 - \frac{KR}{R+Ls} = 0 \quad \therefore Ls + R(1-K) = 0$$

$$\therefore s = \frac{R(K-1)}{L} < 0 \quad \text{より} \quad K < 1$$

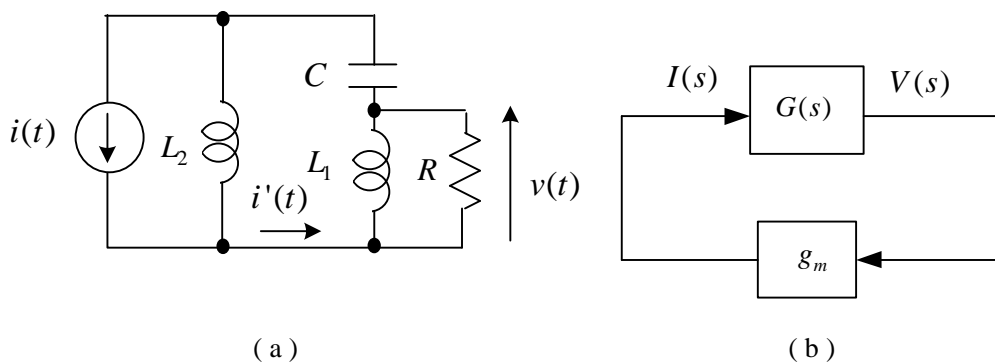
\* 安定のとき、電圧や電流は最終的に 0 となる。 $K$  が負の場合には負帰還であり、 $v(t)$  と逆極性の電源電圧となって変化を抑えることになり安定する。 $K$  が正で大きいときには、 $v(t)$  の変化を益々増大させることになり不安定となる。

(例題 6-6) 図 (a) の回路で、電流源  $i(t)$  を入力とし、 $v(t)$  が出力である。

(1) 伝達関数  $G(s) = V(s)/I(s)$  を求めよ。

(2)  $i(t) = g_m v(t)$  と制御するとき、不安定であるための条件を求めよ。

ただし、 $g_m > 0$  とする。



(解) (1) 分流の公式から

$$I'(s) = \frac{sL_2}{sL_2 + \frac{1}{sC} + \frac{sL_1 R}{sL_1 + R}} I(s), \quad I'(s) \frac{sL_1}{sL_1 + R} R = -V(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = -\frac{L_1 L_2 R C s^3}{L_1 L_2 C s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R}$$

(2) 特性方程式は、(b) 図より

$$1 - g_m G(s) = 1 + \frac{g_m L_1 L_2 R C s^3}{L_1 L_2 C s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R} = 0$$

$$L_1 L_2 C (1 + g_m R) s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R = 0 \quad \text{①}$$

ラウスの表

$$s^3 \quad L_1 L_2 C (1 + g_m R) \quad L_1$$

$$s^2 \quad (L_1 + L_2) R C \quad R$$

$$s^1 \quad \frac{L_1^2 R C - L_1 L_2 C g_m R^2}{(L_1 + L_2) R C}$$

$$s^0 \quad R$$

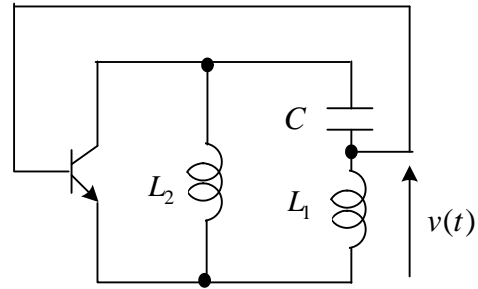
$$\text{よって不安定となる条件は、第 1 列目に負の項があればよく、} \quad L_1 < L_2 g_m R \quad \text{②}$$

この回路は、図のトランジスタにより実現でき、フット・キューン発振器として知られている (文献(17)参照)。 $R$  はトランジスタの抵抗である。なお、バイアス回路は省略している。

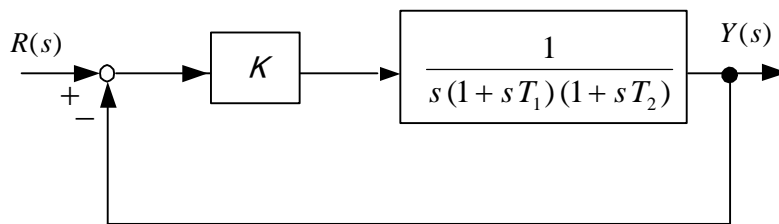
発振器として動作するには、①式が虚軸上に根を持つ必要があり、 $s = j\omega$ を代入したとき成り立つ必要がある。実際に計算すると実部と虚部より次式が得られる。

$$\omega = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C} \quad ③ \quad L_1 = L_2 g_m R \quad ④$$

よって、④の条件を満たすように回路を設計すれば、③の共振角周波数の発振器が得られる。実際には、経年変化などで回路のパラメータが変化し発振が止まることがあるから、②の条件を考慮して、少し不安定側に設計すべきであろう。不安定ならどんどん値が大きくなりそうであるが、非線形であるから持続振動する。



(問題 6-1) 図のフィードバック制御系が安定であるための、 $K, T_1, T_2$  の条件を求めよ。

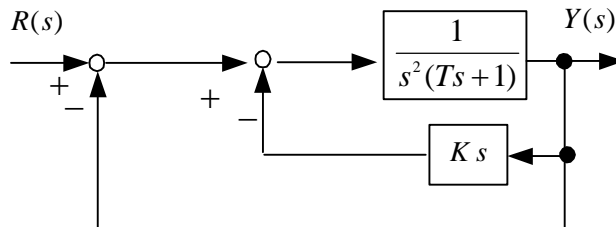


(解) 特性方程式  $s^3 T_1 T_2 + s^2 (T_1 + T_2) + s + K = 0$

安定条件  $T_1 + T_2 > K T_1 T_2, T_1 > 0, T_2 > 0, K > 0$

\*ラウスの表より導けるが、この場合には、(i)の係数同符号の条件を併用した方が簡単である。

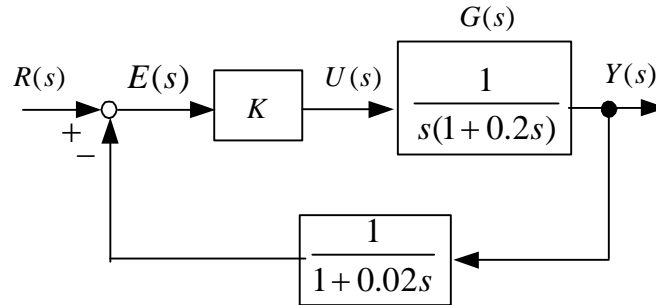
(問題 6-2) 図のフィードバック制御系が安定であるための、 $K, T$  の条件を求めよ。



(解) 特性方程式  $Ts^3 + s^2 + Ks + 1 = 0$

安定条件  $K > T > 0$

(問題 6-3) 図の制御系が安定であるための、 $K$  の条件をラウスの安定判別法により求めよ。



(解) 特性方程式は  $0.004s^3 + 0.22s^2 + s + K = 0$

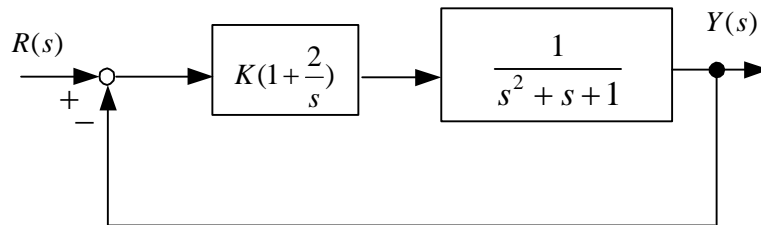
ラウスの表は,

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 0.004 \quad 1 \\ s^2 \quad 0.22 \quad K \\ s^1 \quad \frac{0.22 - 0.004K}{0.22} \\ s^0 \quad K \end{array}$$

ラウスの表 1 列目が全て同符号であることから安定条件は,  $55 > K > 0$

(問題 6-4) 図のフィードバック制御系につき、以下の問いに答えよ。

- (1) 閉ループ伝達関数を求めよ。
- (2) 制御系が安定であるための、 $K$  の条件を求めよ。



(解) (1)  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ks + 2K}{s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K}$

(2) 特性方程式  $s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K = 0$

ラウスの表は

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad K+1 \\ s^2 \quad 1 \quad 2K \\ s \quad K+1-2K \\ s^0 \quad 2K \end{array}$$

よって,  $1 - K > 0$  かつ  $K > 0$  より,  $1 > K > 0$



### 6.3 状態方程式の安定判別

制御対象は,

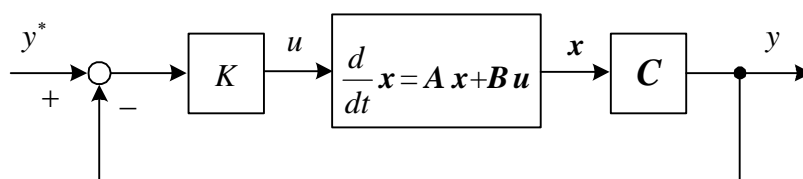
$$\text{状態方程式: } \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (6-15)$$

$$\text{出力方程式: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6-16)$$

により記述できることは既に述べた。フィードバック制御系では、これに制御器の記述が必要になる。簡単な比例制御を考えると、

$$u(t) = K(y^*(t) - y(t)) \quad (6-17)$$

ここで、 $K$  : 比例ゲイン,  $y^*(t)$  : 指令値



(6-16)を(6-17)に代入し、それを(6-15)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}K\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}K y^*(t) \\ &= \mathbf{A}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}' y^*(t) \end{aligned} \quad (6-18)$$

これは、フィードバック制御系全体の状態方程式である。制御対象の入力が消去されて、その代わりに指令値が自由に変えられる変数として登場している。

閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  は、

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= \frac{Y(s)}{Y^*(s)} \\ &= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}') \mathbf{B}'}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}'|} \end{aligned} \quad (6-19)$$

となる。伝達関数の分母を0とおいたものが特性方程式だから、特性方程式は、

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}'| = 0 \quad (6-20)$$

となる。特性方程式の根（特性根）は、**システム行列  $\mathbf{A}'$** の固有値等しいことが判る。従っ

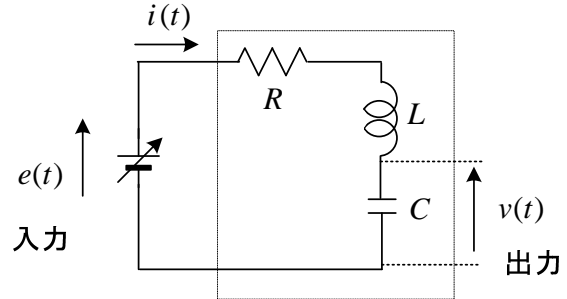
て、 $\mathbf{A}'$ の固有値が左半平面にあればシステムは安定であることが判る。指令値は安定性に影響を与えない。制御対象だけの場合は $\mathbf{A}$ の固有値が左半平面にあれば安定である。

(例題 6-7) 図の制御対象で、コンデンサ電圧  $v(t)$  を検出して、入力電圧  $e(t)$  を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t)) \quad \text{①}$$

(1) フィードバック制御系の状態方程式を求めよ。

(2) 制御系が安定である  $K$  の条件を求めよ。



(解) (1) 状態変数  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$  とすると、

制御対象の状態方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \quad \text{②}$$

一方、制御対象の出力方程式は次式で与えられる。

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad \text{③}$$

①, ②, ③より (この場合③は不要), 制御系全体の状態方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -(1+K)/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/L \end{bmatrix} v^* \quad \text{④}$$

(2) ④より、固有値の計算を行う特性方程式は、

$$\begin{aligned} \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -(1+K)/L & -R/L \end{bmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} s & -1/C \\ (1+K)/L & s + R/L \end{vmatrix} \\ &= s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1+K}{LC} = 0 \end{aligned}$$

ラウスの安定判別法により、安定条件は  $K > -1$

## 6.4 非線形システムの安定判別

本テキストでは、線形システムだけを対象としている。しかし、実際には非線形システムも多く存在する。ただ、非線形システムは線形システムのように簡単に安定判別することができない。そこで、ある平衡点 (定常点) 近傍<sup>きんぼう</sup>での変数の微小変動を考えて線形化することが多い。このようにして得られた数式モデルは**線形モデル**(linear model)と呼ばれている。

ここでは非線形の制御対象として図 6-6 の<sup>ちよくまき</sup>直流直巻電動機を考え、その線形モデルを導出する。直流直巻電動機は従来電車に利用されてきたが、現在でも自動車用スタータ（セルモータ）などに利用されている。低速で大きなトルクを発生する利点がある。

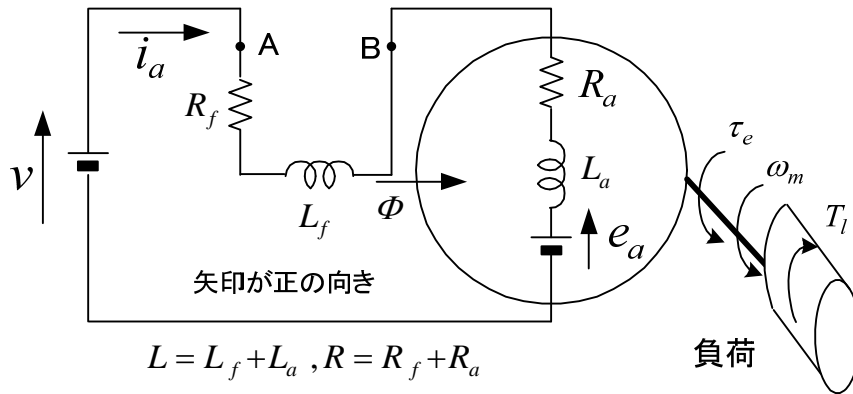


図 6-6 直流直巻電動機

直流直巻電動機は、磁束  $\Phi$  を作る界磁巻線が電機子回路に直列に接続されているので、

$$\Phi = k i_a \quad (6-21)$$

が成り立つ。ここで、 $i_a$  は電機子電流である。 $k$  は定数であるが、端子 AB をつなぎかえて磁束の向きを反対にできるので、正または負となる。(6-21)を用い、例題 3-6 より誘導起電力  $e_a$  と発生トルク  $\tau_e$  は次式で表される。ここで  $\omega_m$  は回転角速度である。

$$e_a = K \Phi \omega_m = k K i_a \omega_m \quad (6-22)$$

$$\tau_e = K \Phi i_a = k K i_a^2 \quad (6-23)$$

従って、図 6-6 は以下の非線形微分方程式で表すことができる。

$$v = R i_a + L \frac{d i_a}{d t} + k K i_a \omega_m \quad (6-24)$$

$$J \frac{d \omega_m}{d t} = k K i_a^2 - T_l \quad (6-25)$$

ここで、 $R$ : 電機子巻線および直巻界磁巻線の抵抗の和、 $L$ : 電機子巻線および直巻界磁巻線のインダクタンスの和、 $J$ : 慣性モーメント（モータ+負荷）、 $T_l$ : 負荷トルク

非線形というのは、状態変数の積  $i_a \omega_m$  や 2 乗  $i_a^2$  が含まれていることを言う。(6-15)の様に線形システムでないと安定判別は困難である。そこで、(6-24)、(6-25)を平衡点に関して線形化することで線形モデルを導く。

まず、**平衡点**であるが、図 6-6 で自由を選べる値は電源電圧  $v$  と負荷トルク  $T_l$  である。これらは入力であり、負荷トルクは制御には使えないので、外乱入力と呼ぶ。 $v$  と  $T_l$  が一定値であれば(この値を  $v_0$  と  $T_{l0}$  とする)、定常状態では状態変数の変化はないので(6-24)、(6-24)の微分を 0 とおいて (**定常解析**という)、平衡点で次式が成り立つ。

$$v_0 = R i_{a0} + k K i_{a0} \omega_{m0} \quad (\text{常に } v_0 > 0 \text{ とする}) \quad (6-26)$$

$$0 = k K i_{a0}^2 - T_{l0} \quad (6-27)$$

一般的な定常時の発生トルクと速度の関係は、(6-26)で添字 0 を付けず次式で与えられる。

$$\tau_e = k K i_a^2 = k K \left( \frac{v}{R + k K \omega_m} \right)^2 \quad (6-28)$$

これを図 6-7 に示す。発生トルクと負荷トルク(一定と仮定)との交点では(6-27)が成り立ち平衡点になる (添字 0 を付ける)。重負荷時には低速(A 点)であるが、軽負荷時には高速(C 点)になるので、無負荷運転は厳禁である。 $\omega_m > 0, \tau_e > 0$  の I 象限は正転, 力行(電動機)運転領域で,  $\omega_m < 0, \tau_e < 0$  の III 象限は逆転, 力行運転領域である。発生トルクを負にするには, AB をつなぎかえ  $k < 0$  とする。平衡点 B や E は, 何かの原因で速度が平衡点の値よりも上昇したとき, 負荷トルクが発生トルクより大きくなり速度の増加を抑えようし, 逆に何かの原因で速度が平衡点の値よりも減少したときは, 発生トルクが負荷トルクより大きくなり速度の減少を抑えようとするから安定に運転できると予測される (線形モデルで証明される)。平衡点 F と D は回生(発電機)運転であるが, 同様に考えると逆のトルク特性なので不安定になると予測される。この考え方は一般の電動機制御においても重要である。

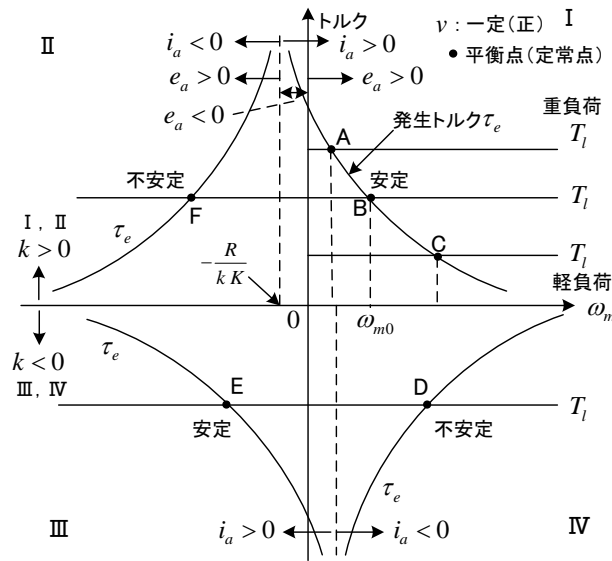


図 6-7 直流直巻電動機 の速度トルク特性

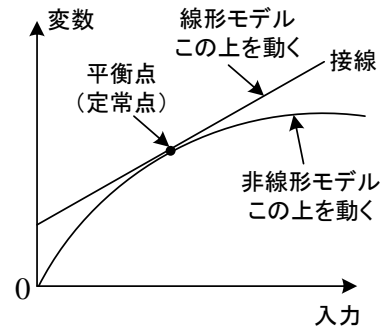


図 6-8 線形モデルのイメージ

線形化を行ってみよう。変数を平衡点の値 (添え字 0) とそれからの微小変動分 ( $\Delta$  を付ける) に分けて, 次式の様に表す。

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \Delta v, & i_a &= i_{a0} + \Delta i_a \\ \omega_m &= \omega_{m0} + \Delta \omega_m, & T_l &= T_{l0} + \Delta T_l \end{aligned} \quad (6-29)$$

(6-24), (6-25)に代入して

$$v_0 + \Delta v = R(i_{a0} + \Delta i_a) + L \frac{d(i_{a0} + \Delta i_a)}{dt} + k K (i_{a0} + \Delta i_a)(\omega_{m0} + \Delta \omega_m)$$

$$J \frac{d(\omega_{m0} + \Delta \omega_m)}{dt} = k K (i_{a0} + \Delta i_a)^2 - (T_{l0} + \Delta T_l)$$

平衡点の値（添え字 0）については、等しいので両辺から省くことができる（その微分は 0 で(6-26), (6-27)が成り立っている）。また、平衡点からの変数の微小変動を考えているので  $\Delta$  のついた項同士の積は小さいので無視できる。この結果、次式が得られる。

$$\Delta v = R \Delta i_a + L \frac{d \Delta i_a}{dt} + k K i_{a0} \Delta \omega_m + k K \omega_{m0} \Delta i_a \quad (6-30)$$

$$J \frac{d \Delta \omega_m}{dt} = 2k K i_{a0} \Delta i_a - \Delta T_l \quad (6-31)$$

ある変数の微小変動項の係数はその変数で偏微分することにより、(6-24), (6-25)から直接求めてもよい（普通はこちらを使う）。(6-30), (6-31)は次式の状態方程式で表せる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R + kK\omega_{m0})/L & -kK i_{a0}/L \\ 2kK i_{a0}/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta T_l \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

行列の成分に含まれる変数は定常値であるから定数で、**線形モデル**と呼ばれ、(6-15)に対応した線形の状態方程式である。制御対象の安定性は、入力に無関係に次式の特性方程式で判別できる。これはシステム行列の固有値を求める式である。

$$\left| sI - \begin{bmatrix} -(R + kK\omega_{m0})/L & -kK i_{a0}/L \\ 2kK i_{a0}/J & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (6-33)$$

$$\text{故に} \quad \left| \begin{array}{cc} s + (R + kK\omega_{m0})/L & kK i_{a0}/L \\ -2kK i_{a0}/J & s \end{array} \right| = 0$$

$$s^2 + \frac{R + kK\omega_{m0}}{L} s + \frac{2(kK i_{a0})^2}{JL} = 0 \quad (6-34)$$

ラウスの安定判別法により、安定条件は  $R + kK\omega_{m0} > 0$  である。I, III象限ではこの条件を満足し平衡点 A, B, C, E は安定、平衡点 F, D ではこの条件を満足しないので不安定となる。常に  $v_0 > 0$  なので、 $i_{a0} = v_0 / (R + kK\omega_{m0})$  だから、安定条件は電流が正と一致する。なお、 $v_0 < 0$  としても発生トルクの向きは変わらないので、 $v_0 > 0$  の場合だけ考えてよい。

一般に、平衡点が変わると線形モデルの固有値も変わるので、システムの安定判別は、たくさんの平衡点ごとに調べる必要がある。図 6-8 は線形モデルのイメージ図である。平衡点で変数の接線近似が線形モデルである。入力が考えている平衡点近傍で変化するときには、実際の非線形モデルと近似である線形モデルの誤差は小さい。

## 第7章 フィードバック制御系の安定判別Ⅱ

本章では、ナイキスト軌跡によるナイキストの安定判別法とそれをボード線図に適用した安定判別法について述べる。これらは、ラウスの方法に比べ安定性の度合いも評価できる特徴があり良く用いられる。一巡伝達関数に適用するので間違えないように。

### 7.1 ナイキストの安定判別法

図 7-1 のフィードバック制御系で、偏差からフィードバック信号までの伝達関数を**一巡伝達関数(loop transfer function)**または**開ループ伝達関数(open-loop transfer function)**または**還送比(return ratio)**と呼ぶ。これを  $G_o(s)$  で表す。

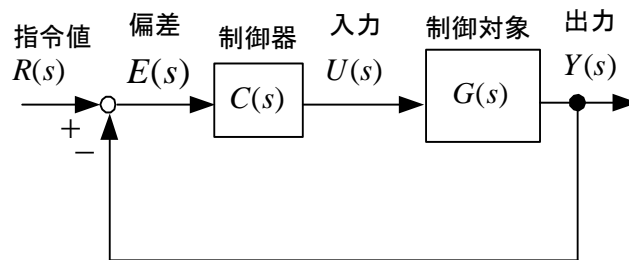


図 7-1 フィードバック制御系

図 7-1 の制御系では、**一巡伝達関数**は

$$G_o(s) = C(s)G(s) \quad (7-1)$$

である。このとき、**閉ループ伝達関数**は

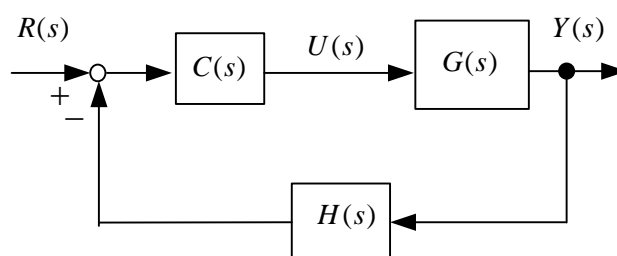
$$G_{cl}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (7-2)$$

と表せる。**特性方程式**は、

$$1 + G_o(s) = 0 \quad (7-3)$$

となる。

(例題 7-1) 図の制御系で、一巡伝達関数  $G_o(s)$ 、閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$ 、および特性方程式を求めよ。



(解) 一巡伝達関数 :  $G_o(s) = C(s)G(s)H(s)$

$$\text{閉ループ伝達関数 : } G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + G_o(s)}$$

$$\text{特性方程式 : } 1 + G_o(s) = 0$$

(注意) 一巡伝達関数+1=0が特性方程式になることに変わりはない。

閉ループ伝達関数  $G_o(s)$  は一般に分数 (正しくは有理関数) だから通分して

$$1 + G_o(s) = S(s) \tag{7-4}$$

とおく。  $s = j\omega$  として  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  と変化させ、  $S(j\omega)$  のナイキスト線図を考えよう。

まず、最も簡単な場合で考えてみる。  $A, K$  は定数とする。

$$G_o(s) = \frac{K}{s+A} \tag{7-5}$$

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega+A} = \frac{KA}{\omega^2+A^2} - \frac{jK\omega}{\omega^2+A^2} \equiv x + jy \quad \text{とおくと}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{KA}{\omega^2+A^2}\right)^2 + \left(\frac{K\omega}{\omega^2+A^2}\right)^2 = \frac{K^2}{\omega^2+A^2} = \frac{K}{A}x \quad (\omega \text{ 消去})$$

$$\therefore \left(x - \frac{K}{2A}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2A}\right)^2 \quad ((5-14) \text{ の様にしても導ける。})$$

よって  $G_o(j\omega)$  は、  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  のとき、円の軌跡となる。  $S(j\omega) = 1 + G_o(j\omega)$  だから、  $S(j\omega)$  の軌跡は、  $G_o(j\omega)$  の軌跡を右側に1移動させた円の軌跡となる。

$$S(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{s+A} = \frac{s+A+K}{s+A} \equiv \frac{s-z_1}{s-p_1} \tag{7-6}$$

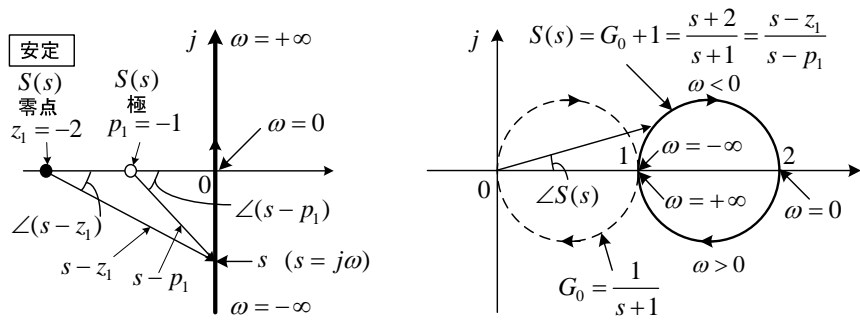
とおくと、  $z_1$  と  $p_1$  には以下の重要な意味がある。

$z_1$  :  $S(s)$  の零点 閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  の極 (特性方程式の根) で、これが右半平面にあると閉ループ系が不安定になる。つまり最終的にシステムが安定かどうかは  $z_1$  で決る。

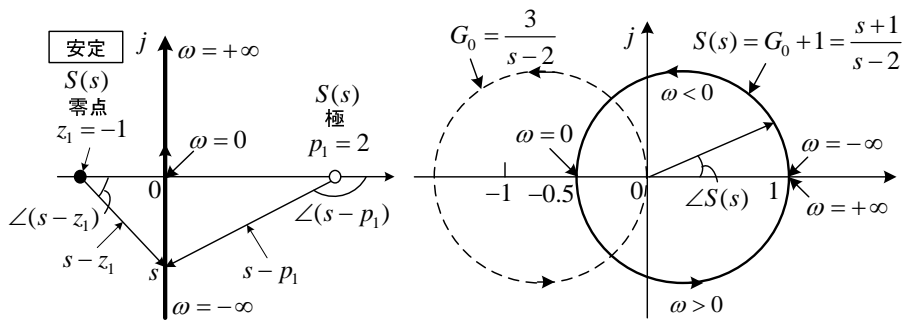
$p_1$  :  $S(s)$  の極 一巡伝達関数  $G_o(s)$  の極 でもある。これが右半平面にあることは、制御対象 (または制御器) が不安定であることを意味する。しかし、閉ループにして安定になるなら問題ない。

$z_1$  と  $p_1$  が右半平面か、左半平面かで4つの場合がある。具体的な軌跡の例を描くと図 7-2 のようになる。(7-6)より偏角については、次式が成り立つ。

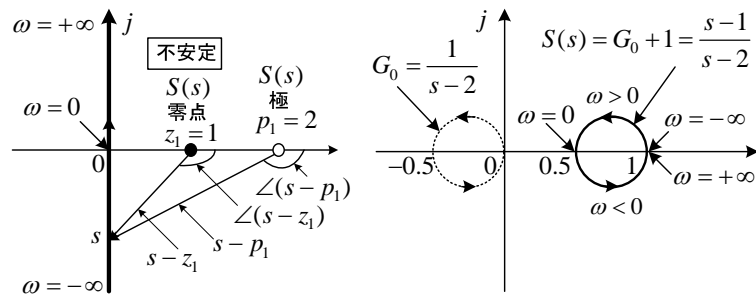
$$\angle S(s) = \angle(s-z_1) - \angle(s-p_1) \tag{7-7}$$



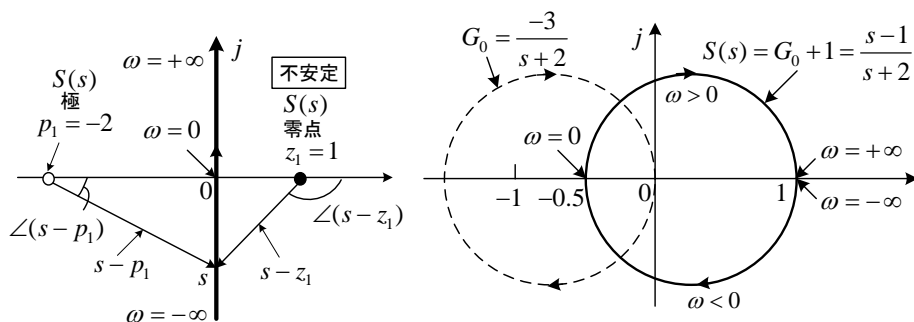
(a)  $S(s)$  の極と零点が左半平面にある場合の例



(b)  $S(s)$  の極が右半平面，零点が左半平面にある場合の例



(c)  $S(s)$  の極と零点が右半平面にある場合の例



(d)  $S(s)$  の極が左半平面，零点が右半平面にある場合の例

図 7-2  $s = j\omega$  ( $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ ) に対する  $S(s) = \frac{s-z_1}{s-p_1}$  と  $G_0(s) = \frac{K}{s+A}$  の軌跡



(a)の場合、虚軸上で  $s = j\omega$  を  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  の範囲で動かすと、偏角は以下のように単調に変化する。

$$\angle(s - z_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2, \quad \angle(s - p_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2$$

図より、 $\omega = -\infty \rightarrow 0$  の範囲では、 $\angle S(s) = \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) > 0$  が成り立つことが判る。よって、この範囲では、右側の  $S(s)$  の円の上半分が軌跡となる。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$  では、 $\angle S(s) = \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) < 0$  だから、右側の円の下半分が軌跡となる。

(b)の場合、虚軸上で  $s = j\omega$  を  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  の範囲で動かすと、偏角は以下のように単調に変化する。

$$\angle(s - z_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2, \quad \angle(s - p_1) : -\pi/2 \rightarrow -\pi \rightarrow -3\pi/2$$

従って、 $S(s)$  は偏角が  $0 \rightarrow \pi \rightarrow 2\pi$  の範囲で変化し、原点を反時計方向に1回転する。

(c),(d)の場合も同様に考えて、 $S(s)$  の軌跡と対応する  $\omega$  及び  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  に対する回転の向きが判る。図 7-2 から、

$N_p$  : 右半平面に存在する  $S(s)$  の極の数

$N_z$  : 右半平面に存在する  $S(s)$  の零点の数

とすると

(a)の場合  $N_p = 0, N_z = 0$  (安定)  $S(s)$  が原点を回らない。

(b)の場合  $N_p = 1, N_z = 0$  (安定)  $S(s)$  が反時計方向に原点を回る。

(c)の場合  $N_p = 1, N_z = 1$  (不安定)  $S(s)$  が原点を回らない。

(d)の場合  $N_p = 0, N_z = 1$  (不安定)  $S(s)$  が時計方向に原点を回る。

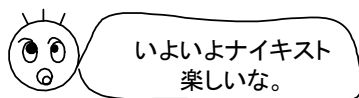
であり、以下のことが成立する。

$S(s)$  が反時計方向に原点を回る回数 =  $N_p - N_z$  (負なら時計方向)

$S(s)$  の零点が特性方程式の根だから、 $N_z = 0$  が安定条件で、(a), (b)の場合に安定である。

$G_o(s) = S(s) - 1$  であるから、 $G_o(s)$  は  $S(s)$  の軌跡を左に  $-1$  移動すればよく、よって  $S(s)$  が原点を回るということは、 $G_o(s)$  が  $-1 + j0$  の周りを回ることに対応する。

ナイキスト(Nyquist)は、一巡伝達関数  $G_o(s)$  のナイキスト線図を描いてフィードバック制御系(閉ループ)の安定判別を行う方法を導き出した。この定理を以下に示す。



**[定理 1]** (開ループの状態)で安定の場合  $G_o(s)$  の極の中で実数部が正であるものの数が 0 であるとき、 $G_o(j\omega)$  のベクトル軌跡が、 $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  のとき、 $-1 + j0$  の点を囲むと不安定で、囲まないと安定である。あるいは、 $\omega = 0 \rightarrow \infty$  に対する  $G_o(j\omega)$  のベクトル軌跡が、 $-1 + j0$  の点を左に見るとき安定、右に見るとき不安定である (図 7-3)。

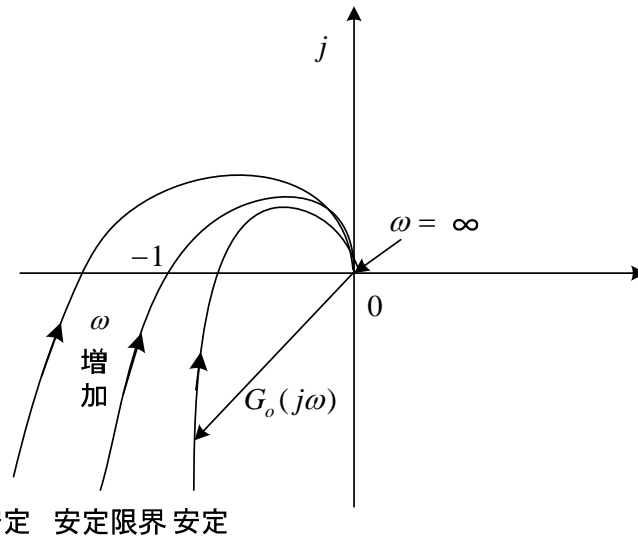


図 7-3  $G_o(j\omega)$  の軌跡とナイキストの安定判別 (定理 1 の場合)

**[定理 2]** (開ループの状態 で不安定の場合)  $G_o(j\omega)$  のナイキスト線図が,  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  のとき,  $-1 + j0$  を反時計方向に回る回数と  $G_o(s)$  の極の中で実数部が正であるものの数が等しいとき安定である。

(注 1) 図 7-2(a) の場合が定理 1, (b) の場合が定理 2 に相当する。いずれの場合でも  $G_o(s)$  が時計方向に  $-1 + j0$  を回ると不安定である。

(注 2) 航空機やロケットはもともと不安定な制御対象だから定理 2 によらざるを得ない。しかし, 一般に, それ自身では安定な制御対象, 安定な制御器を扱う (フィードバックすると不安定になることがある) ことが多いので, 定理 1 を使うことが多い。

(注 3) 原点や虚軸上に極がある場合には, それを囲むように小さな半円 (どちらで考えても良いが普通は右半平面側にとる) 上を動くものとする。図 7-4(b),(c) を参照せよ。

### ナイキストの定理の説明 (一般の場合)

開ループ伝達関数  $G_o(s)$  が次式のプロパー ( $n \geq m$ ) な有理関数で表現できる場合を考える。

$$G_o(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

このとき,

$$1 + G_o(s) = S(s) \tag{7-8}$$

と置くと,  $S(s)$  は次式で表せる。

$$S(s) = k \frac{(s-z'_1)(s-z'_2)\cdots(s-z'_{n-N_z})}{(s-p'_1)(s-p'_2)\cdots(s-p'_{n-N_p})} \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{N_z})}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{N_p})} \quad (7-9)$$

$G_o(s)$  と  $S(s)$  の分母は同じである。 $S(s)$  の零点や極は以下のように定義する。

右半平面の零点  $z_1, z_2, \dots, z_{N_z} : N_z$  個 (閉ループ  $G_{cl}$  の不安定極に一致)

右半平面の極  $p_1, p_2, \dots, p_{N_p} : N_p$  個 (開ループ  $G_o$  の不安定極に一致)

左半平面の零点  $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-N_z} : n-N_z$  個 (閉ループ  $G_{cl}$  の安定極に一致)

左半平面の極  $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-N_p} : n-N_p$  個 (開ループ  $G_o$  の安定極に一致)

$s = j\omega$  として  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  と変化させたとき、 $S(j\omega)$  や  $G_o(j\omega)$  はどのように動くかを考える。(7-9)より、

$$\begin{aligned} \angle S(s) &= \angle k + \angle(s-z'_1) + \angle(s-z'_2) + \cdots + \angle(s-z'_{n-N_z}) && \text{左半面零点} \\ &\quad -\angle(s-p'_1) - \angle(s-p'_2) - \cdots - \angle(s-p'_{n-N_p}) && \text{左半面極} \\ &\quad + \angle(s-z_1) + \angle(s-z_2) + \cdots + \angle(s-z_{N_z}) && \text{右半面零点} \\ &\quad -\angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \cdots - \angle(s-p_{N_p}) && \text{右半面極} \end{aligned} \quad (7-10)$$

である。ここで、虚軸上で  $s = j\omega$  を  $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  の範囲で動かすと、左半平面の零点や極に関する偏角は図 7-2(a) のように  $-\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2$  と単調に変化する。一方、右半平面の零点や極に関する偏角は図 7-2(c) のように  $-\pi/2 \rightarrow -\pi \rightarrow -3\pi/2$  と単調に変化する。

$\angle k$  は  $k$  の正負で  $0$  または  $\pi$  で偏角は変化しない。従って、 $N_p \geq N_z$  のとき、(7-10)より右半平面の零点と極のうち少ない方の  $N_z$  ずつは偏角が打ち消しあって原点を回ることには寄与せず、また左半平面の零点と極のうち少ない方の  $n-N_p$  ずつは偏角が打ち消しあって原点を回ることには寄与しない。残り  $N_p - N_z$  個の右半平面の極と  $n - N_z - (n - N_p) = N_p - N_z$  個の左半平面の零点だけが原点を回ることには寄与し、図 7-2 (b)より考えて

$$S(s) \text{ が反時計方向に原点を回る回数} = N_p - N_z \quad (7-11)$$

となる。 $N_p \leq N_z$  の場合も同様に考えると、 $N_z - N_p$  だけ原点を時計方向に回る。これは(7-11)で、 $N_p - N_z$  が負の場合には  $N_z - N_p$  だけ原点を時計方向に回ると考えればよいことを意味する。制御系全体が安定となる必要十分条件は、特性方程式の根 ( $S(s)$  の零点) が全て左半平面にあることだから、

$$\text{安定条件: } N_z = 0 \quad (7-12)$$

である。よって、(7-11)より

$$S(s) \text{ が反時計方向に原点を回る回数} = N_p \quad (7-13)$$

が安定条件となる。すなわち、 $G_o(s)$  の不安定極の数  $N_p$  と同じ数だけ、 $S(s)$  が原点の周りを反時計方向に回転すれば安定である。 $N_p$  は正または  $0$  だから**時計方向に原点を回転したら不安定である**。 $G_o(s) = S(s) - 1$  であるから、 $G_o(s)$  は  $S(s)$  の軌跡を左に  $-1$  移動す

ればよく、よって  $G_o(s)$  の不安定極の数  $N_p$  と同じ数だけ、 $G_o(s)$  が  $-1 + j0$  の周りを**反時計方向に回転すれば安定**である。これで定理2が説明できた。 $G_o(s)$  の不安定極の数  $N_p$  が0のとき、(7-13)より、 $G_o(s)$  が  $-1 + j0$  の点を時計方向にも反時計方向にも回転しないことが**安定条件**である。また、 $G_o(j\omega)$  の軌跡は実軸に対して対称\*であり、通常  $\omega = 0 \rightarrow \infty$  の軌跡を書くだけで安定判別できる。これで、定理1が説明できた。

\* 共役複素数を  $\overline{\alpha + j\beta} = \alpha - j\beta$  の記号で書く。このとき、 $\overline{s_1 s_2} = \overline{s_1} \overline{s_2}$ 、 $\overline{s_1 + s_2} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$  であるから、 $\overline{G_o(s)} = G_o(\overline{s})$  が成立するので、 $j\omega$  と  $-j\omega$  に対する軌跡は共役複素数になる。

ナイキストの定理に関して、多くの教科書で図7-4のような右半平面を囲むナイキスト経路を考え、この中に含まれる右半平面の極や零点だけが軌跡の回転に寄与するとして証明されている。ところが、 $|s| = \infty$  のとき、(7-9)の  $S(s)$  は一定値  $k$  となる（Ⅲの部分で軌跡は変化しない）。従って、図7-4(a)でⅢの部分で左半平面を通るように選んだとしても（時計方向に左半平面を一周する）、 $S(s)$  の軌跡に変化はない。図7-2の例では、 $s$  の虚軸上の変化だけで軌跡が描けており、このとき左半平面の極や零点も回転に寄与した。よって、本書のように図7-4(a)Ⅲを考えないで証明した方が  $S(s)$  の軌跡の回転と対応していて理解が容易と思われる。なお、原点や虚軸上に極がある場合は、図(b),(c)のように小さな半円上を動かすものとする。このような証明が文献(22)で行われていることを後で知った。

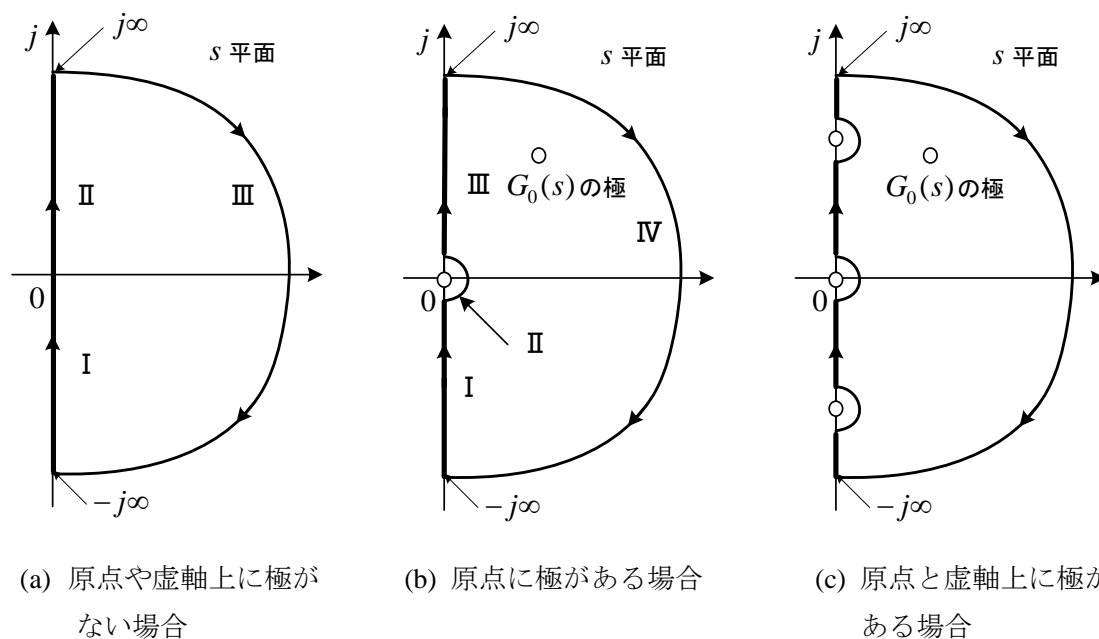


図7-4  $s$  の動かし方（一般のナイキスト経路）

(例題 7-2) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{K}{1+sT_1}$  のフィードバック制御系について、ベクトル軌跡 (ナイキスト線図) を数式で求め、安定判別を行え。  $T_1 > 0$  とする。

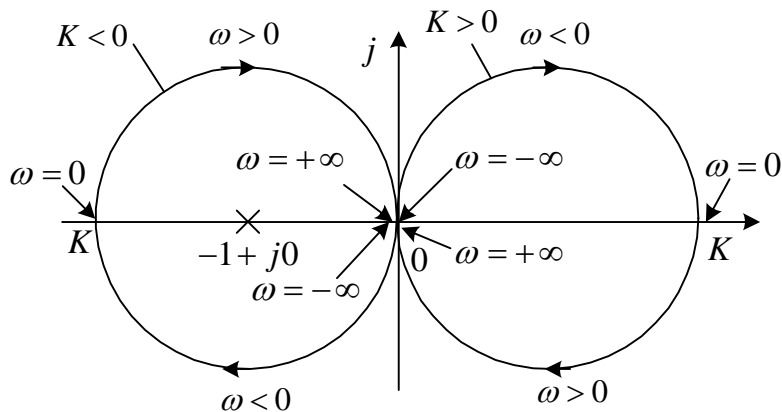
(解)  $G_o(s)$  の極  $s = -1/T_1$  で左半平面にある (定理 1 が使える)。

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T_1} = \frac{K(1-j\omega T_1)}{1+(\omega T_1)^2}$$

$$G_o(j\omega) = x + jy \text{ とおくと, } x = \frac{K}{1+(\omega T_1)^2}, \quad y = \frac{-K\omega T_1}{1+(\omega T_1)^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{K^2}{1+(\omega T_1)^2} = Kx \quad \text{より, } (x - \frac{K}{2})^2 + y^2 = (\frac{K}{2})^2 \quad \text{①}$$

以上により、 $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  のとき、次のナイキスト線図が得られる。



$G_o(s)$  の極の実部は負であるから、安定であるためには  $-1 + j0$  の点を囲まないようにしないといけない。図より、 $K > -1$  で安定である。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$  の軌跡だけ考えてもよい。

(確認) 閉ループ伝達関数の特性方程式は、次式で与えられる。

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{1+sT_1} = 0 \quad \text{安定条件は, } s = -\frac{1+K}{T_1} < 0 \quad \therefore K > -1$$

(問題 7-1) 例題 7-2 で、 $T_1 < 0$  のときナイキスト線図を描いて安定判別せよ。

(解) 極の実部は正であるから、安定であるためには  $-1 + j0$  の点を反時計方向に回らないといけない (定理 1 が使えず、定理 2 を使う必要がある)。 $T_1 < 0$  のとき、例題 7-2 の①式は成立する。例題 7-2 とは逆回転になり、 $\omega$  の目盛りの付け方が異なる。 $y$  を見て考えよ。 $K < -1$  のとき安定となる。

(例題 7-3) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$  ( $K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ ) のフィード

バック制御系について、ナイキスト線図の略図を描き安定判別を行え。

(解)  $G_o(j\omega)$  の極は  $s = -1/T_1, -1/T_2$  で、2 根とも負である (定理 1 が使える)。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_o(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = K \quad \text{①}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^2 T_1 T_2} = 0e^{-j\pi} \quad \text{②}$$

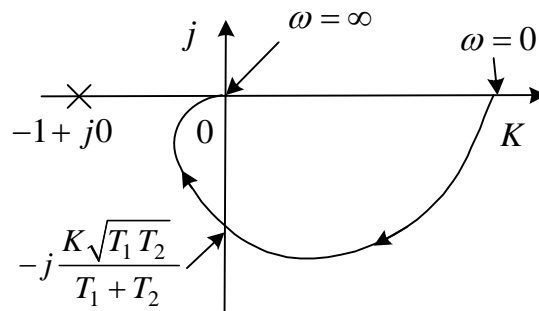
(②では  $1+j\omega T_1 \approx j\omega T_1, 1+j\omega T_2 \approx j\omega T_2$  と近似,  $\angle \frac{1}{j} = -\frac{\pi}{2}, \angle \frac{1}{j^2} = -\pi$ )

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1-\omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1+T_2)} = \frac{(1-\omega^2 T_1 T_2)K - j\omega(T_1+T_2)K}{(1-\omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2(T_1+T_2)^2} \quad \text{③}$$

$\omega = 0 \rightarrow \infty$  のとき虚部は負であることが判る。虚軸との交点は、実部を 0 とおいて

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \quad \text{のときで, } G_o(j\omega) = -j \frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$$

$G_o(j\omega)$  のナイキスト線図を図に示す。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$  のとき、 $-1+j0$  の点を左に見るので安定と言える。②より  $\omega$  が  $\infty$  に近いときの軌跡上の各点は原点から見ると  $-\pi$  の向きである。



(注意) 最終的に図に示すナイキスト線図の概形が書ければよい。①, ②, ③はこのための手掛かりを得ようとしている。①, ②は必ず必要と言うわけではない。試験では、どの象限を通るか考え、実軸とか虚軸と交わる点を求め、図は適当でよい (数値が決らないと正確に書けないので)。 $\omega = -\infty \rightarrow 0$  では実軸に対称なグラフとなり、全体として  $-1+j0$  の点を囲まないのが安定と考えても良い。

(例題 7-4) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{K}{s(1+sT)}$  ( $T > 0$ ) のフィードバック制御系について、

図 7-4 (b) I, II, III の順に  $s$  を動かしナイキスト線図の略図を描き安定判別を行え。

$$(解) G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = \frac{-\omega^2 TK - j\omega K}{\omega^4 T^2 + \omega^2} \quad \text{①}$$

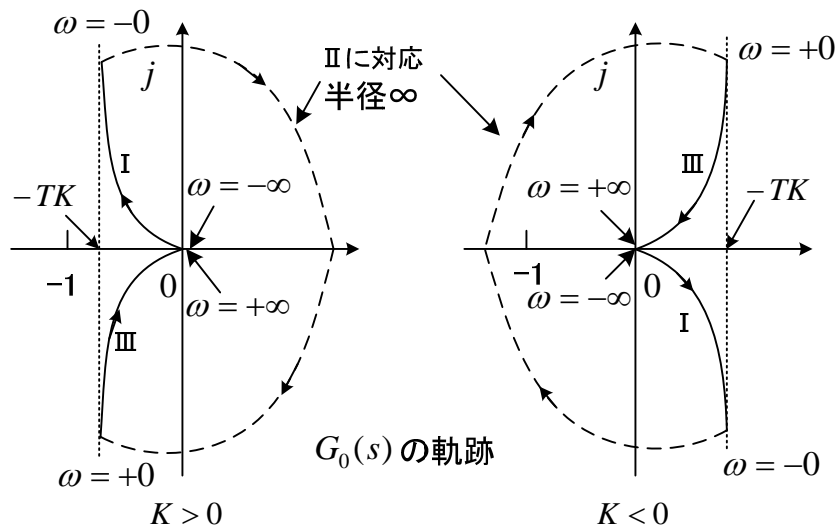
$$\omega \rightarrow 0 \text{ のとき, } G_o(j\omega) \approx -TK - j\frac{K}{\omega} \quad \text{②}$$

図 7-4 (b) の II では、 $s = re^{j\theta}$  (ただし、 $r > 0, \theta: -\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ) とおける。 $r$  は十分小さいので、 $G_o(s)$  で  $sT$  の項は 1 に比べて小さいので無視し  $G_o(s) = \frac{K}{r} e^{-j\theta}$  となる。 $\frac{|K|}{r} = \infty$

だから半径無限大の半円となる。 $K > 0$  であれば、 $G_o(s)$  の偏角は  $-\theta$  だから、

$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  と動く。 $K < 0$  の場合は、原点に対して対称な軌跡となる。

ナイキスト線図は図のように描け、 $K > 0$  であれば安定で、 $K < 0$  であれば  $-1 + j0$  の点を囲むので不安定である。



(注意 1) ②では、分母  $= \omega^2(\omega^2 T^2 + 1) \approx \omega^2$  と近似した。省略するときは 1 と比べよう。

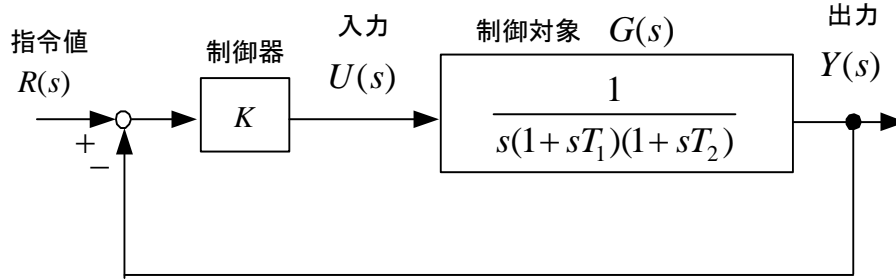
(注意 2) ①, ②は、 $s = j\omega$  としているから、II を動くときには成立しない。

(注意 3) III に対する軌跡だけ描いても安定判別できるので、普通は III の軌跡を書けばよい。

ここででは、原点の極の取り扱いを特別に問題にしてみた。

(注意 4) ラウスの方法を用いると、特性方程式  $Ts^2 + s + K = 0$  であり、安定条件は  $K > 0$  となり、一致する。

(例題 7-5) 図の制御系の安定条件をナイキスト線図の略図を描くことにより求めよ。ただし、 $K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$  とする。



(解) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、 $G_o(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$  で与えられる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{j\omega} = \infty e^{-j\pi/2} \quad (j \text{ で割るので偏角は } -\pi/2)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^3 T_1 T_2} = 0 e^{-j3\pi/2} \quad (j \text{ で 3 回割るので偏角は } -3\pi/2)$$

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3 T_1 T_2 + (j\omega)^2 (T_1 + T_2) + j\omega} = \frac{K}{j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2) - \omega^2 (T_1 + T_2)}$$

$$= \frac{-\omega^2 (T_1 + T_2) K - j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2) K}{\omega^2 (1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^4 (T_1 + T_2)^2}$$

$\omega \rightarrow 0$  のとき、分母  $\rightarrow \omega^2$  と考えられ、

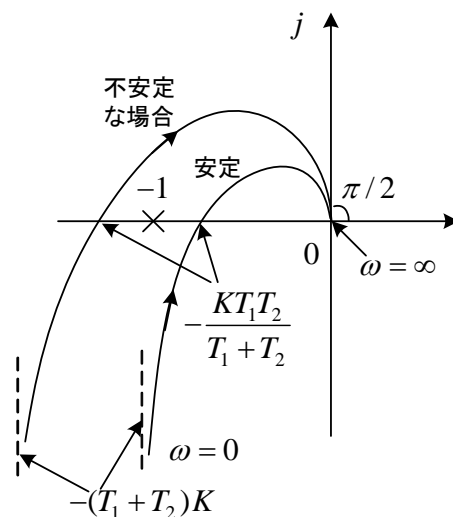
$$G_o(j\omega) \rightarrow -(T_1 + T_2) K - j \frac{K}{\omega} \text{ となる。}$$

$\omega$  が 0 に近い点の軌跡は原点から見ると  $-\pi/2$  の向きにある。 $\omega$  が  $\infty$  に近い点の軌跡は原点から見ると  $-3\pi/2$  の向きにある。

実軸との交点は、虚部を 0 とおいて

$$\omega^2 = 1/(T_1 T_2) \text{ のときで、}$$

$$G_o(j\omega) = -\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$



安定条件は、 $-1$  の点を左に見ることだから、 $-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1 \therefore KT_1 T_2 < T_1 + T_2$



## 7.2 むだ時間を含むシステムの安定条件

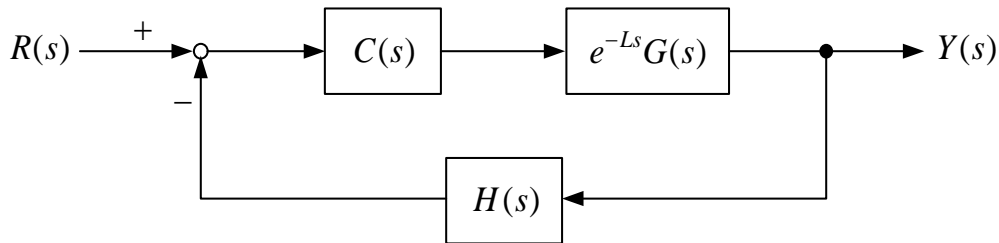


図 7-5 むだ時間を含む制御系

図 7-5 のむだ時間を含む制御系が安定であるための必要十分条件は、方程式

$$1 + e^{-Ls}C(s)G(s)H(s) = 0 \quad (7-14)$$

の根の実部がすべて負であることである<sup>(13)</sup>。

一巡伝達関数からむだ時間を除いた部分を

$$F_0(s) = C(s)G(s)H(s) \quad (7-15)$$

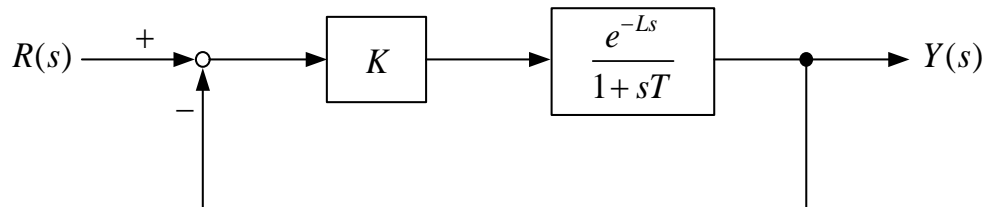
とおくと、一般にナイキストの安定判別法は以下の様に言える。

『 $F_0(s)$ の極がすべて虚軸を含む左半平面に存在する場合には、一巡伝達関数

$$F(s) = e^{-Ls}C(s)G(s)H(s) \quad (7-16)$$

のナイキスト軌跡が実軸上の点 $-1 + j0$ を回らなければ、図のフィードバック系は安定であり、点 $-1 + j0$ の上を通るかもしくは点 $-1 + j0$ の点を回れば不安定である。』

(例題 7-6) 図のフィードバック系の安定条件を求めよ。但し、 $K, T, L$ は正とする。



(解) 一巡伝達関数 $G_0(s)$ は

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+sT} \quad \text{①}$$

である。いま、 $G_1(s) = \frac{K}{1+sT}$  とおくと、 $G_1(j\omega)$  の軌跡は半円である。 $e^{-j\omega L}$  は大きさが1で、偏角が $-\omega L$ であるから、 $G_0(j\omega)$  のベクトル軌跡は、 $G_1(j\omega)$  の軌跡を時計方向に $\omega L[\text{rad}]$  回転させたものとなる。

ナイキスト安定判別法より、図のA点の角周波数を $\omega_0$ とすると安定条件は、

$$-1 < \text{Re}(G_0(j\omega_0)) \quad (2)$$

である。①より

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{Ke^{-j\omega L}}{1+j\omega T} \\ &= \frac{K(\cos \omega L - j \sin \omega L)(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} \\ &= \frac{K}{1+(\omega T)^2} \{ \cos \omega L - \omega T \sin \omega L - j(\sin \omega L + \omega T \cos \omega L) \} \end{aligned} \quad (3)$$

$\omega_0$  は虚部が0となることから、次式で定まる。

$$\sin \omega_0 L + \omega_0 T \cos \omega_0 L = 0 \quad \therefore \tan \omega_0 L = -\omega_0 T \quad (4)$$

②, ③, ④より、安定条件は、

$$-1 < \frac{K(\cos \omega_0 L - \omega_0 T \sin \omega_0 L)}{1+(\omega_0 T)^2} \quad \therefore -1 < K \cos \omega_0 L \quad (5)$$

図のA点の実部が  $K \cos \omega_0 L$  であるから、 $K \cos \omega_0 L < 0$  であり、④より

$$1 + \tan^2 \omega_0 L = \frac{1}{\cos^2 \omega_0 L} \quad \text{だから} \quad \frac{1}{\cos \omega_0 L} = -\sqrt{1+(\omega_0 T)^2}$$

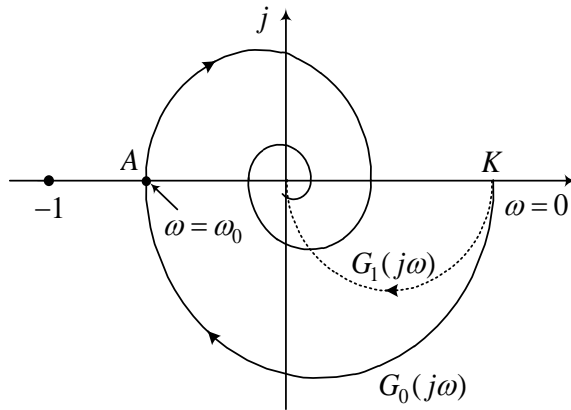
⑤に代入して、

$$K < \sqrt{1+(\omega_0 T)^2}$$

### 7.3 ボード線図による安定判別法

ナイキスト線図が角周波数の変化に対し伝達関数をそのまま複素平面上に描くのに対し、ボード線図は角周波数を横軸にとって大きさと位相を別々に描くことが違うだけである。よって、ボード線図を用いて安定判別を行う場合には、ナイキスト線図を頭に描きながら、考えることになる。

一巡伝達関数  $G_o(s)$  に不安定な極がない場合には、定理1より  $\omega: 0 \rightarrow \infty$  の変化に対し、 $G_o(j\omega)$  が  $-1 + j0$  の点を見れば閉ループ系は安定だから、次のことが言える。



『一巡伝達関数  $G_o(j\omega)$  の位相  $\angle G_o(j\omega)$  が  $-180$  度のとき、 $|G_o(j\omega)| < 1$  すなわち、ゲインが  $g = 20\log_{10}|G_o(j\omega)| < 0$  [dB] を満足すれば安定である。なお、位相  $\angle G_o(j\omega)$  が、 $-180$  度に達しない場合は、 $-1 + j0$  の点を右に見ることはないから安定である。』(条件： $G_o(s)$  に不安定極がない場合)

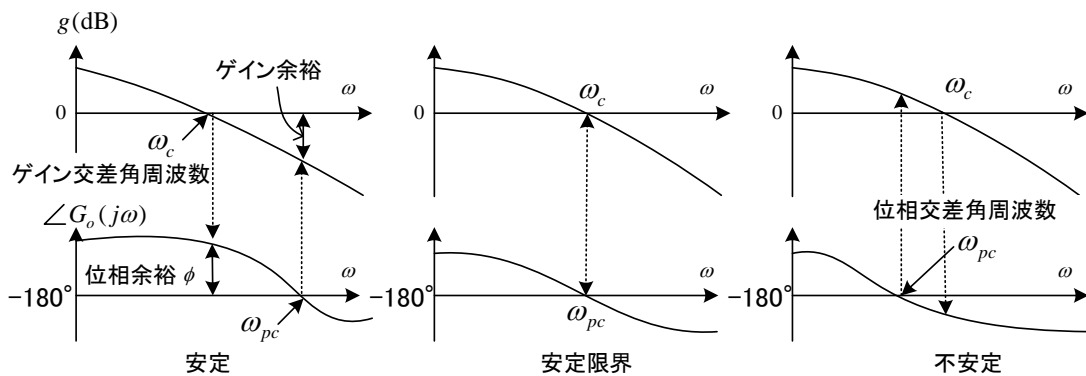
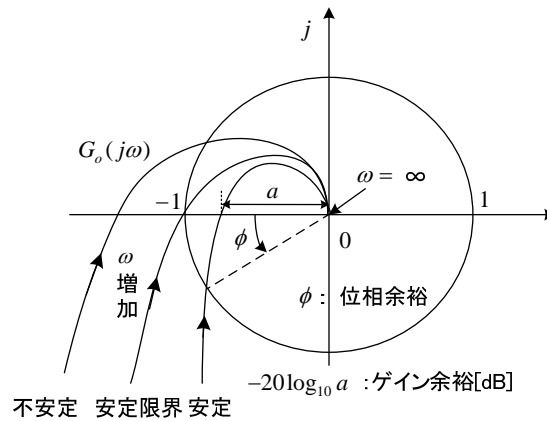


図 7-6 一巡伝達関数のボード線図による安定判別

図に示している **ゲイン余裕**(gain margin)[度], **位相余裕**(phase margin)[dB] は安定性の程度を評価する目安として良く用いられる。**ゲイン交差角周波数** が大きいと速く応答する。

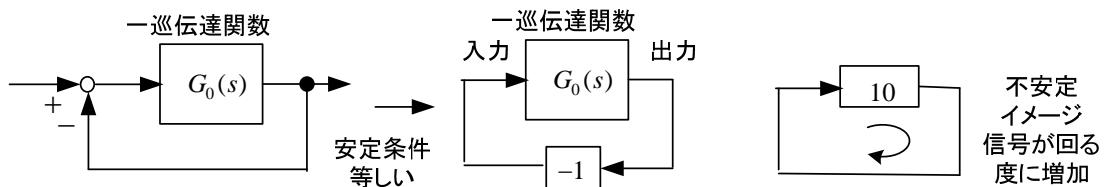
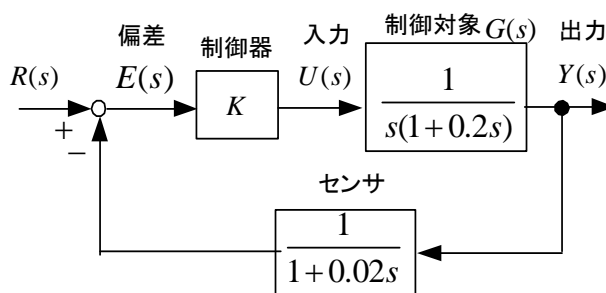


図 7-7 不安定になる条件

図 7-6 の安定条件を考えてみよう。図 7-6 の横軸の  $\omega$  は、いろんな周波数の入力を加えた場合を表している。 $g < 0$  となる  $\omega$  の入力信号は、出力の振幅が入力より小さく減衰するの

で不安定に関係ない。 $g > 0$ となる $\omega$ の入力信号は、信号が増幅されるので出力が大きくなって、もし正帰還であれば不安定になろう。図 7-7 の不安定のイメージに示すように、例えば信号を 10 倍してその出力がそのまま入力に入ると信号が回る度に増えて不安定になろう。 $G_o$  の出力の位相が 180 度遅れる ( $\angle G_o(j\omega) = -180$  度) とマイナスを付けることと同じでありさらにフィードバックの  $-1$  を掛けるので、結局正帰還になる。実際、図 7-6 では位相の遅れが 180 度となる  $\omega_{pc}$  で  $g > 0$  の場合不安定となっている。

(例題 7-7) 図のブロック線図で示された制御系で、 $K = 1$  の場合の安定判別をボード線図を利用して行え。また、安定の限界となる  $K$  を図より求めよ。ただし、 $K > 0$  とする。



(解) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は次式で与えられる。

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.02s)}$$

ゲインと位相を求める。 $G_o(s)$  の極は 0, -5, -50 で、不安定極はない。

$$g = 20 \log_{10} |G_o(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{|K|}{|j\omega| |1 + j0.2\omega| |1 + j0.02\omega|}$$

$$= 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j0.2\omega} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j0.02\omega} \right|$$

$K = 1$  のとき、初項は 0 である。 $K$  を大きくすると、ゲイン  $g$  が全周波数領域で一様に大きくなる。第 3 項、第 4 項の折れ点周波数はそれぞれ、 $\omega = 5, 50$  である。

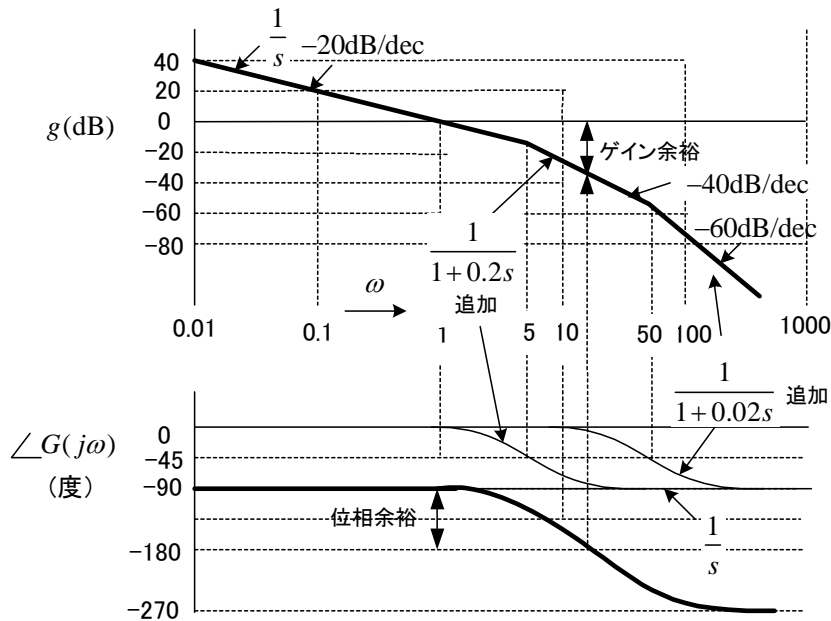
$$\angle G_o(j\omega) = \angle K + \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \frac{1}{1 + j0.2\omega} + \angle \frac{1}{1 + j0.02\omega}$$

図は、 $K = 1$  の場合を示す。 $\angle G_o(j\omega)$  が  $-180$  度となる  $\omega$  が判るので、図より 0dB までにあと約 35dB 程度のゲイン余裕があることが判る。よって、

$$20 \log_{10} K = 35 \therefore K = 55$$

を超えると不安定となる。なお、 $K$  を大きくしても位相は変化しない。位相余裕は 90 度程度ある。

(注) ラウスの方法で安定判別すると、安定条件は  $0 < K < 55$  である。



(問題 7-2) 例題 7-7 で  $K = 1$  のとき, ゲイン余裕を計算で求めよ。

(解) 負の実軸とナイキスト線図が交わる点の値は, 例題 7-5 を参照して

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} = -\frac{0.2 \times 0.02}{0.2+0.02} = -\frac{1}{55}$$

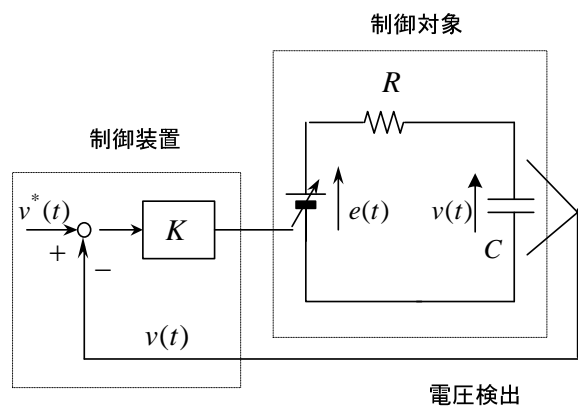
$$\text{ゲイン余裕は, } -20 \log_{10} \left| -\frac{1}{55} \right| = 20 \log_{10} 55 = 35 \text{ dB}$$

(問題 7-3) 図の制御系は, コンデンサ電圧  $v(t)$  を検出して, それを目標値  $v^*(t)$  に追従させる制御系である。このとき, 電源電圧  $e(t)$  を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$

パラメータは  $RC = 0.2$ ,  $K = 10$  とする。

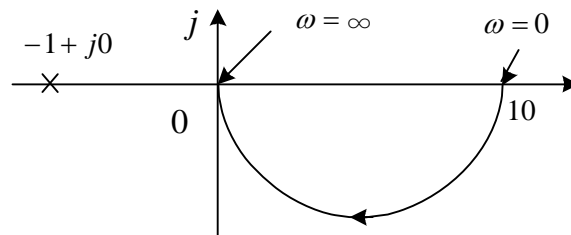
- (1) 制御系の全体のブロック線図を書け。(問題 4-1 参照)
- (2) ナイキスト線図を描いて安定かどうか判別せよ。(軌跡の式を求めること)
- (3) ボード線図(略図)を描いて安定かどうか判別せよ。



(略解) (2) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、ブロック図より  $G_o(s) = \frac{K}{1+RCs}$

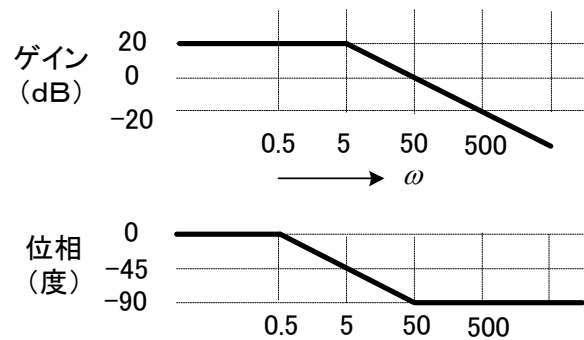
$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega RC} = \frac{10}{1+j0.2\omega} \equiv x+jy \quad \text{とおく。これより, } (x-5)^2 + y^2 = 5^2$$

従って、ベクトル軌跡は円となる。 $\omega: 0 \rightarrow \infty$  に対し、 $y < 0$  だから半円である。



$G_o(s)$  の極は、 $-1/(RC)$  で左半平面にあり、ベクトル軌跡が  $-1+j0$  の点を左に見るので閉ループ制御系は安定である。

(3) 一巡伝達関数のボード線図は図の様になる。ボード線図はナイキスト線図の大きさと位相を別々に書いただけだから、安定判別は(2)と同じ理由で安定である。



## 7.4 ニコルス線図

図 7-1 の制御系で、閉ループ伝達関数は、

$$G_{cl}(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \quad (7-17)$$

であり、このボード線図を描くことで、指令値に対する出力の周波数特性が得られる。特に、この極大値は**ピークゲイン**(peak gain) ( $M_p$ ) と呼ばれ、応答の重要な目安となる。一方、一巡伝達関数  $C(s)G(s)$  のボード線図は、ゲイン余裕や位相余裕を知るうえで欠くことができない。そこで、この両方が一度に判るなら大変便利である。**ニコルス線図**(Nichols chart)は、このような背景のもとで考案された。

一巡伝達関数を

$$G_o(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega) = x + jy \quad (7-18)$$

とおく。一方、閉ループ伝達関数  $G_{cl}(s)$  を

$$G_{cl}(j\omega) = Me^{j\phi} \quad (7-19)$$

とすると、

$$M = M(\omega) = \frac{|x + jy|}{|1 + x + jy|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad (7-20)$$

である。よって、

$$M^2 \{(1+x)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$$

$$\therefore M^2 = (1-M^2)x^2 + (1-M^2)y^2 - 2M^2x$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2}{1-M^2}x = \frac{M^2}{1-M^2}$$

$$\left(x - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2 \quad (7-21)$$

となる。このことから、閉ループ伝達関数の振幅  $M$  が一定の場合、 $x-y$  平面上で一巡伝達関数の軌跡は円となることが判る (図 7-8)。この図上に、解析したい一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のナイキスト線図を描くと、計算しなくても閉ループ伝達関数の振幅  $M$  が判り便利である。

次に、閉ループ伝達関数の位相  $\phi$  が一定の軌跡を一巡伝達関数の平面上で求める。

$$\phi = \arg(G_{cl}(j\omega)) = \arg\left(\frac{x + jy}{1 + x + jy}\right) = \arg\left(\frac{x + x^2 + y^2 + jy}{(1+x)^2 + y^2}\right) \quad (7-22)$$

従って、

$$\tan \phi = \frac{y}{x + x^2 + y^2} \quad (7-23)$$

$\tan \phi = N$  とおくと、

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0 \quad \therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \quad (7-24)$$

よって、この場合も等  $\phi$  の軌跡は円となる。図 7-9 にその軌跡を示す。

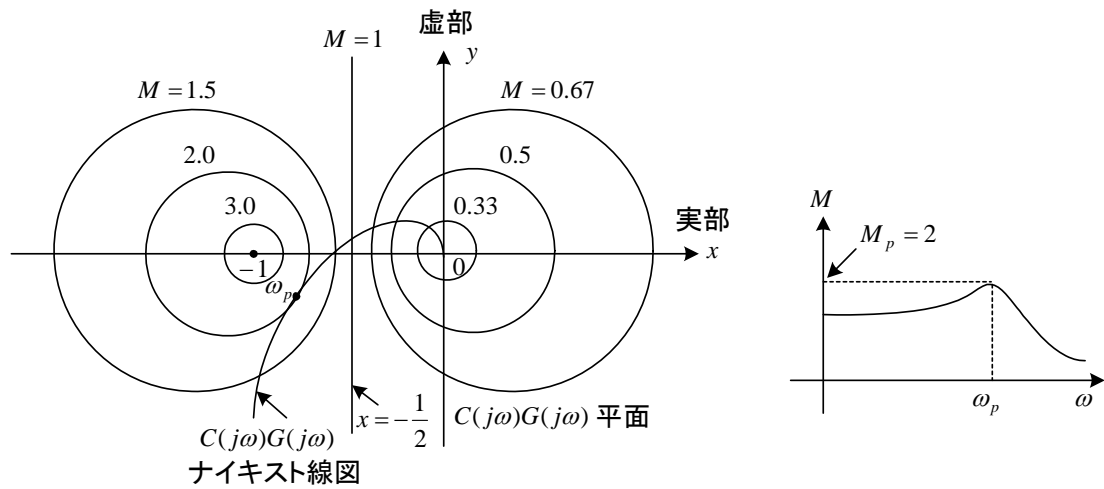


図 7-8 等  $M$  の軌跡

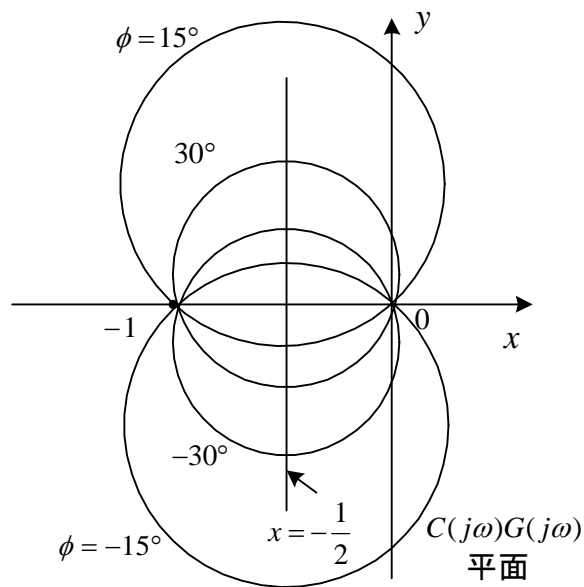
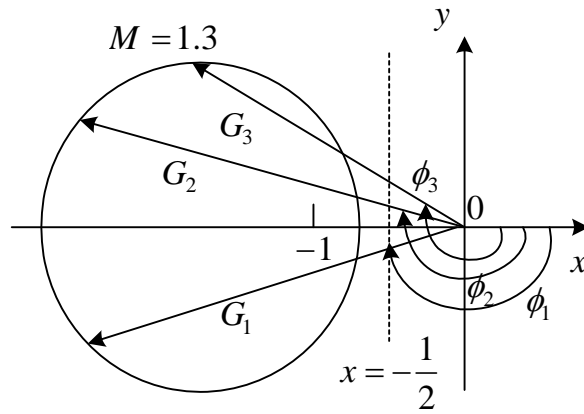


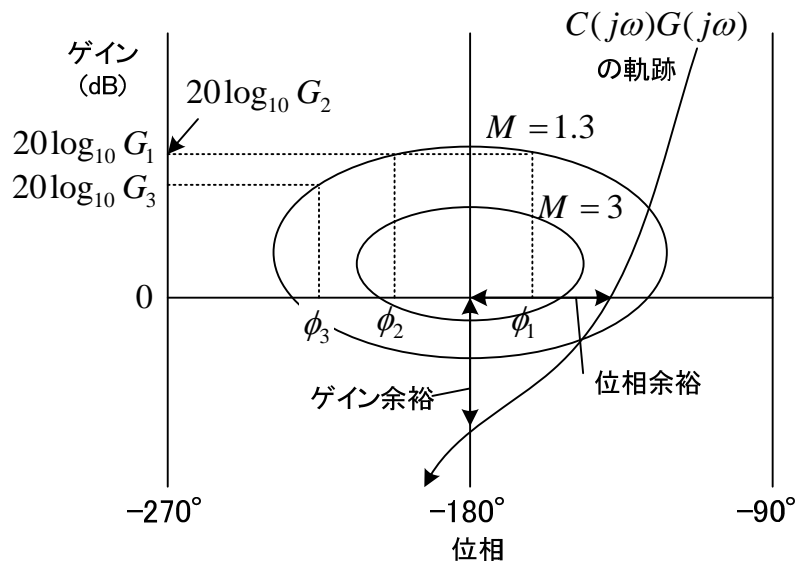
図 7-9 等  $\phi$  の軌跡

図 7-8 の等  $M$  の軌跡と図 7-9 の等  $\phi$  の軌跡は  $x-y$  平面上に描いてあるため、一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  を少し変更して制御器を設計するときには改めて  $C(j\omega)G(j\omega)$  を描き直す必要があり不便である。そこで、これらをゲイン-位相平面上に描くことが提案された。これを、ニコルス線図という。図 7-10 にその考え方を示す。例えば、(a)の  $M = 1.3$  の円の軌跡を (b) ではゲインと位相平面上に描き直している。ニコルス線図上の  $10C(j\omega)G(j\omega)$  の軌跡は、 $C(j\omega)G(j\omega)$  の軌跡を 20dB 上方に移動するだけでよい。





(a) 移したい等  $M$  の軌跡



(b) 移した等  $M$  の軌跡 (ニコルス線図)

図 7-10 ニコルス線図の作り方

最近では、計算機が使えるのでニコルス線図を使わなくてもピークゲイン、ゲイン余裕、位相余裕が計算できる。しかし、このような発想には学ぶべき点が多いように思う。

$M_p$  が大きいと振動的になり、小さいと応答が遅い。(2次系では、図 4-2, 図 5-10 を見よ。) サーボ系では、 $M_p = 1.1 \sim 1.5$ , プロセス系では、 $M_p = 1.5 \sim 2.5$  が経験的に用いられているようである。

## 第8章 根軌跡

特性方程式の根は、安定性や応答に関する重要な情報を含んでいる。この根が、制御ゲインの変化に対してどう変化するか判れば制御系設計の指針として役立つ。これを描く方法が**根軌跡法**(root locus method)である。

### 8.1 特性方程式の根と応答の関係

図 8-1 の制御系で、閉ループ伝達関数は、次式で与えられる。

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KC(s)G(s)}{1 + KC(s)G(s)} \quad (8-1)$$

ここで、制御器は根軌跡の説明のため、変えるゲイン  $K$  を強調して  $KC(s)$  としている。

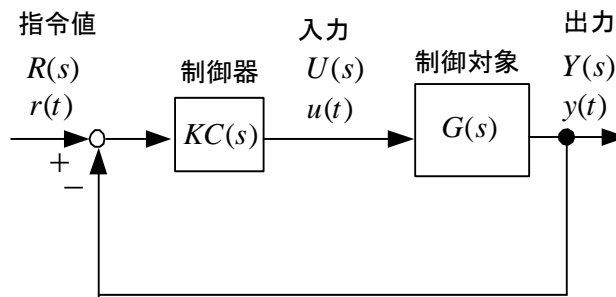


図 8-1 フィードバック制御系

特性方程式は、閉ループ伝達関数の分母を 0 とすることで、次式となる。

$$1 + KC(s)G(s) = 0 \quad (8-2)$$

閉ループ伝達関数が次式で与えられる 2 次系（減衰係数  $\zeta$ ，固有角周波数  $\omega_n$ ）を考える。

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\zeta : \text{Zeta}) \quad (8-3)$$

一般に、2 次系は

$$G_{cl}(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} \quad (8-4)$$

であり、 $\omega_n = \sqrt{b}$ ， $\zeta = a/(2\sqrt{b})$  と対応する。すると、(8-3) と (8-4) の差は定数倍の違い

だけである。両者は、ステップ応答が単純に定数倍されるだけであるから、(8-3)は安定性を調べるには十分に一般的と言える。

さて、(8-3)の特性方程式の根（閉ループ伝達関数の極）は $0 \leq \zeta < 1$ の場合

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (8-5)$$

である。根を図 8-2 に示す。

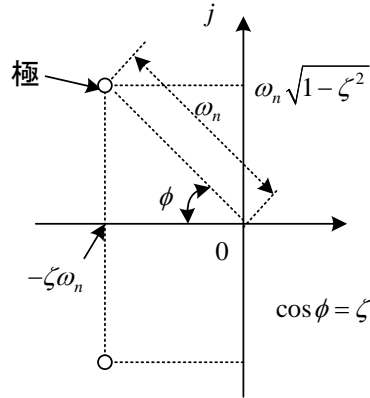


図 8-2 特性方程式の根（2次系）

(8-3)のステップ応答は、(4-7)より、

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (8-6)$$

であった。これを図 8-3 に示す。

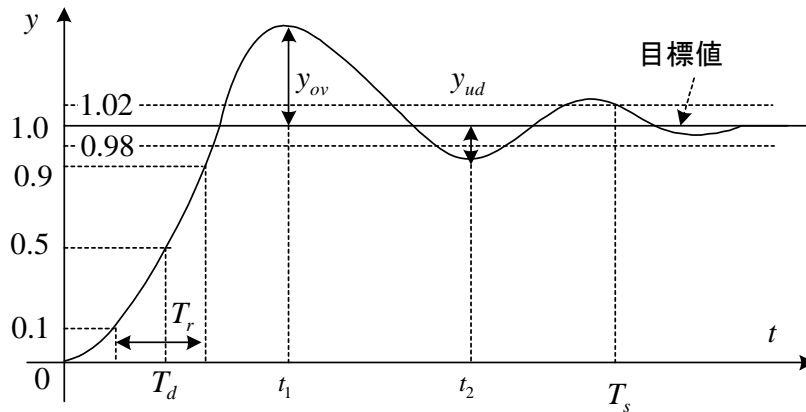


図 8-3 ステップ応答（2次系）

$0 < \zeta < 1$  の場合には、 $t = t_1$  で出力  $y(t)$  は最大値をもち、その後減衰振動する。最大値の目標値からの行き過ぎ量  $y_{ov}$  を**オーバシュート(overshoot)**という。また、 $y(t)$  が  $\pm 2\%$  に収まるまでの時間を**整定時間(settling time)**という。更に、図の  $T_r$  は**立ち上り時間(rise time)**と呼ばれる。

さて、 $y_{ov}, y_{ud}$  と  $t_1, t_2$  を求めてみよう。(8-6)を微分して、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \quad (8-7)$$

を得る。これが0となる条件から、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, t_2 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8-8)$$

よって、(8-6)、(8-8) より

$$y_{ov} = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \quad y_{ud} = \exp\left(-\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (8-9)$$

となる。 $y_{ud} / y_{ov}$  は、 $y_{ov}$  に一致する。 $y_{ov}$  を図 8-4 に示す。

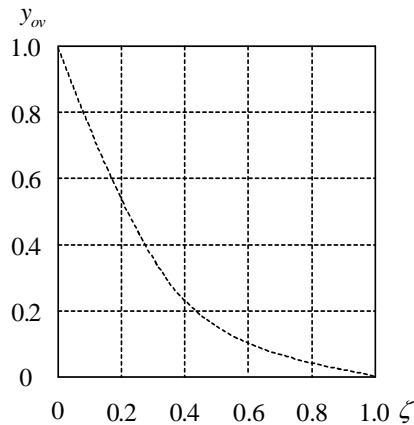


図 8-4 減衰率  $\zeta$  とオーバシュート  $y_{ov}$  の関係

オーバシュートは  $\zeta$  だけで決まり、図 8-2 の  $\phi$  が一定のところ根があれば  $\zeta$  は一定で、オーバシュートも変わらない。

一方、整定時間は根の実部  $\zeta\omega_n$  と関係が深く、この値が小さいほど整定時間は長い。図 8-5 に以下の閉ループ伝達関数について極とステップ応答の関係を示す。A を基準として考えると、B は同じ包絡線上にあり ((8-6) 式で  $e$  のべき乗を見よ)、C とはオーバシュートが等しく ( $\zeta$  が同じであるから)、D とは同じ振動数 (同じ虚部) である。

$$G_A(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}, G_B(s) = \frac{17}{s^2 + 2s + 17}$$

$$G_C(s) = \frac{40}{s^2 + 4s + 40}, G_D(s) = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$$

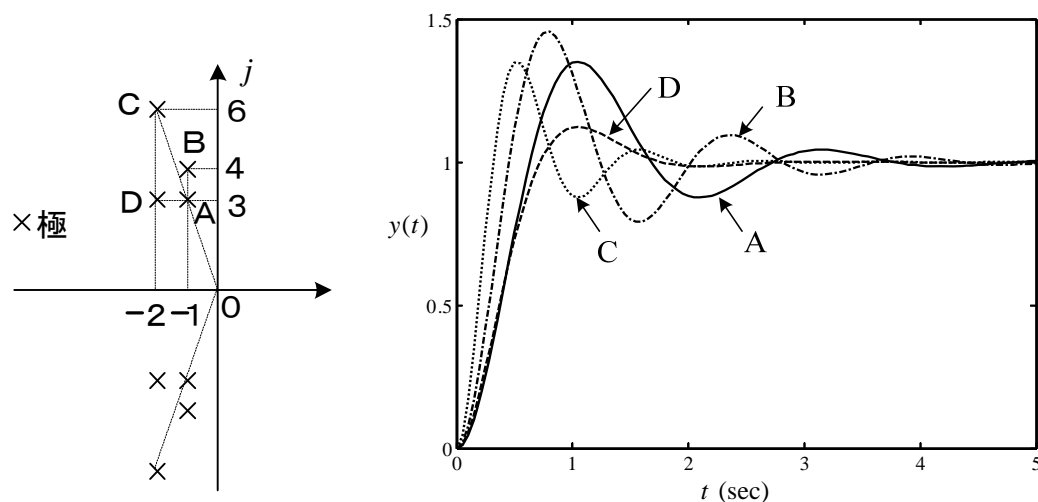


図 8-5 閉ループ伝達関数の極とステップ応答の関係

(問題 8-1)  $G_A, G_B, G_C, G_D$  の極, 減衰係数  $\zeta$ , 固有角周波数  $\omega_n$  を求めよ。

(解) 極は, 図 8-5 参照,  $G_A$  の  $\omega_n = 3.16$ ,  $\zeta = 0.316$ ,  $G_B$  の  $\omega_n = 4.12$ ,  $\zeta = 0.243$   
 $G_C$  の  $\omega_n = 6.32$ ,  $\zeta = 0.316$ ,  $G_D$  の  $\omega_n = 3.61$ ,  $\zeta = 0.556$

以上のことから, 望ましい極の配置は, 図 8-6 の斜線の領域となる。実軸上の根は振動に関係しない。一般の伝達関数には多くの極が存在するが, 虚軸に近い極が応答に支配的となり, 近似的に 2 次系として捉えられることが多い。

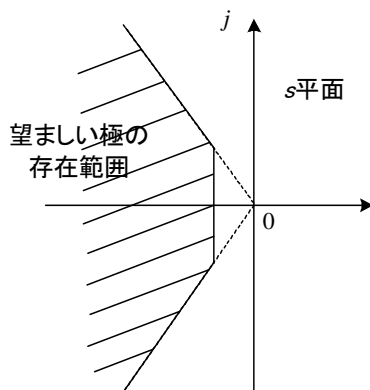


図 8-6 望ましい特性方程式の根 (極) の存在領域

## 8.2 根軌跡の描き方

制御器や制御対象のパラメータを変化させたとき、特性方程式の根がどのように変化するかを知ることは、安定性を検討するうえで最も基本的な要望である。特に、図 8-1 に示すように、制御器のゲイン  $K$  を変化させた場合について、特性方程式の根の動きを図的に描く方法が、1948 年 W.R.Evans により提案された。これは、**根軌跡法**(root locus method)と呼ばれる。

いま、一巡伝達関数  $KC(s)G(s)$  の零点を  $z_i$ 、極を  $p_i$  とし、分母の次数を  $n$  次、分子の次数を  $m$  次とすると、

$$KC(s)G(s) = K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^N (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-N})} \quad (8-10)$$

と書ける。 $K'$ には  $s$  は含まれず、 $K$  に比例する。

(8-2)の特性方程式より、根は

$$KC(s)G(s) = -1$$

を満たす。大きさと位相に分けて考えると、

i) ゲイン条件

$$\begin{aligned} |KC(s)G(s)| &= \left| K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^N (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-N})} \right| = 1 \\ \therefore |K'| &= \frac{|s|^N |s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_{n-N}|}{|s - z_1| |s - z_2| \cdots |s - z_m|} \end{aligned} \quad (8-11)$$

ii) 位相条件 ( $K' > 0$  の場合)

$$\begin{aligned} \angle(KCG) &= \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - N \angle s - \sum_{j=1}^{n-N} \angle(s - p_j) \\ &= (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (8-12)$$

となる。まず、(8-12)の位相条件を満たす軌跡を求め、その上にゲイン条件を満足する  $K$  を目盛ったものが根軌跡である (文献(3)参照)。

以下、根軌跡を書く手順を示す。

- (1) 根軌跡は  $s$  平面の実軸に対して対称である。
- (2) 根軌跡は  $KC(s)G(s)$  の極に始まり ( $K = 0$ )、零点に終わる ( $K = \infty$ )。対応する零点がなければ無限遠点に終わる。
- (3) 根軌跡の本数は、 $KC(s)G(s)$  の分子、分母の次数の中で、大きな方の次数に等しい。通常は、分母の次数が大きい。

- (4) 実軸上の根軌跡は  $K C(s)G(s)$  の極と零点を右側から1つおきに結んだ線分となる。  
 (5) 根軌跡の分岐の中で、 $K = \infty$  のとき  $n - m$  個は無遠点の零点に終わる。

そのとき、漸近線 (asymptotes) の傾き角は

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad (8-13)$$

である。また、その漸近線の実軸との交点 (intersection) は次式で与えられる。

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n-N} p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (8-14)$$

$k$  重根のときは、その根を  $k$  倍する。

- (6) 根軌跡の虚軸との交点における  $K$  の値は、安定限界であり、ラウスの方法かナイキスト線図またはボード線図より求まる。  
 (7) 実軸上の分岐点の  $s$  の値は次式より計算できる。

$$\frac{dC(s)G(s)}{ds} = 0 \quad (8-15)$$

(簡単な説明)

(2) については、特性方程式の根は  $C(s)G(s) + \frac{1}{K} = 0$  より得られる。 $K \rightarrow 0$  のとき

$C(s)G(s)$  が  $\infty$  に近づく  $s$  が根なので、根はその極と等しく、 $K \rightarrow \infty$  のとき  $C(s)G(s)$  が 0 になる  $s$  が根だから、その零点と一致する。

(4) については、まず実軸上に  $s$  をとり、それが (8-12) の位相条件を満足するか考える。

図 8-7 に示すように、共役複素極を  $p_j, p_k$  とすると、 $s - p_j$  は  $p_j$  から  $s$  に向かうベクトル

である。その偏角は図に示した通りで、これと  $s - p_k$  の偏角の和は  $360^\circ$  となる。共役複素零点の場合も同様である。次に、実軸上の極と零点を考える。 $s$  より右側にある極や零点と  $s$  を結ぶベクトルの偏角はいずれも  $180^\circ$  である。 $s$  より左側にある極や零点と  $s$  を結ぶベクトルの偏角はいずれも  $0^\circ$  である。位相条件は上記ベクトルの偏角の和や差が  $180^\circ$  になることを要求するものであるから  $360^\circ$  や  $0^\circ$  になるものは関係ない。この結果 (8-12) が成立するためには、 $s$  の右側の極や零点の数が奇数あることが必要十分である。加算減算は  $180^\circ$  なら関係ない。 $n$  重根は  $n$  個と考える。

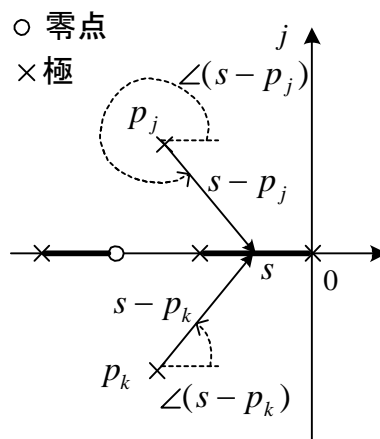


図 8-7 実軸上の根軌跡

(7) を導出する。特性方程式は,

$$1 + KC(s)G(s) = 0$$

である。いま,  $s$  の多項式 (分数でないよ)  $N(s), D(s)$  を用いて

$$C(s)G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

と表すと, 特性方程式は次式となる。

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad \text{①}$$

軌跡が実軸を離れる点では, 特性方程式は重根をもっているから, 上式を  $s$  で微分しても 0 である。

$$\frac{dD(s)}{ds} + K \frac{dN(s)}{ds} = 0 \quad \text{②}$$

①を②に代入して  $K$  を消去すると次式が得られる。

$$N(s) \frac{dD(s)}{ds} - D(s) \frac{dN(s)}{ds} = 0$$

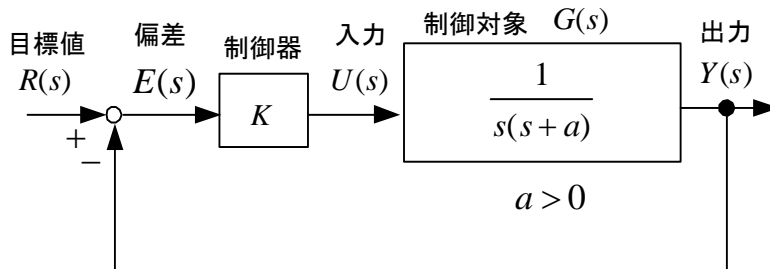
これは,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{N(s)}{D(s)} \right) = \frac{dC(s)G(s)}{ds} = 0$$

と一致する。



(例題 8-1) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(解) 1) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

根軌跡は極  $0, -a (K=0)$  に始まり、零点  $\infty, \infty (K=\infty)$  に終わる。

2) 根軌跡の本数は 2 である。

3) 実軸上の根軌跡は、 $0$  と  $-a$  を結んだ線となる。

4) 漸近線の傾き角は、分母の次数  $n=2$ 、分子の次数  $m=0$  だから  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  となる。

$$\text{実軸との交点 } \sigma = \frac{0+(-a)}{2} = -\frac{a}{2}$$

5) 特性方程式は、

$$1 + G_o(s) = 0$$

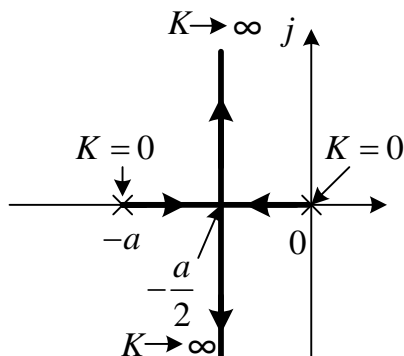
$$s^2 + as + K = 0$$

ラウスの安定判別法より、 $a > 0, K > 0$  安定限界は  $K = 0$

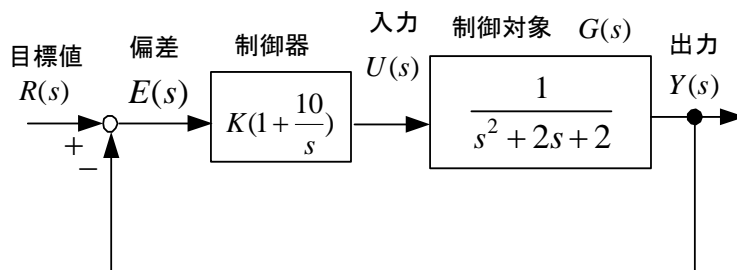
6) 実軸上の分岐

$$\frac{dG_o(s)}{ds} = 0 \quad \therefore 2s + a = 0 \quad s = -\frac{a}{2}$$

以上により、根軌跡は図のように描ける。



(例題 8-2) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(解) 1) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = \frac{K(s+10)}{s(s^2+2s+2)}$$

根軌跡は  $0, -1 \pm j (K=0)$  の 3 個の極に始まり、3 個の零点  $-10, \infty, \infty (K=\infty)$  に終わる。

2) 根軌跡の本数は分母の次数となり 3 本である。

3) 実軸上の根軌跡は、 $0$  と  $-10$  を結んだ線となる。

4) 漸近線の傾き角は、分母の次数  $n=3$ 、分子の次数  $m=1$  だから  $\frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$\text{実軸との交点 } \sigma = \frac{-1+j-1-j-(-10)}{3-1} = 4$$

5) 特性方程式は、

$$1 + G_o(s) = 0 \quad \therefore s^3 + 2s^2 + (K+2)s + 10K = 0$$

ラウスの安定判別法を用いる。全ての係数は同符号でなければならないので、 $K > 0$

$s^3$	1	$K+2$	
$s^2$	2	$10K$	
$s^1$	$\frac{2(K+2)-10K}{2} > 0$		
$s^0$	$10K > 0$		

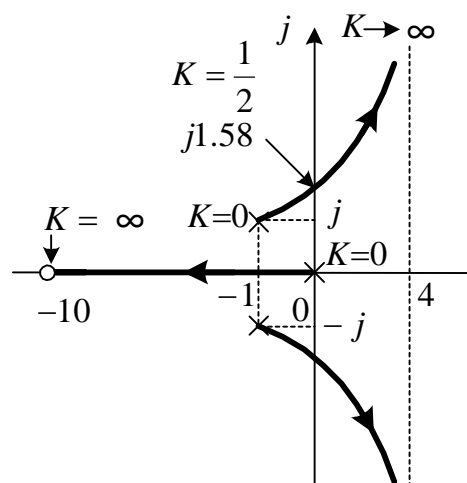
従って、 $0 < K < 1/2$

6)  $K = 1/2$  のとき、特性根に  $s = \pm j\omega$  がある。  
 $s^3 + 2s^2 + (5/2)s + 5 = 0$

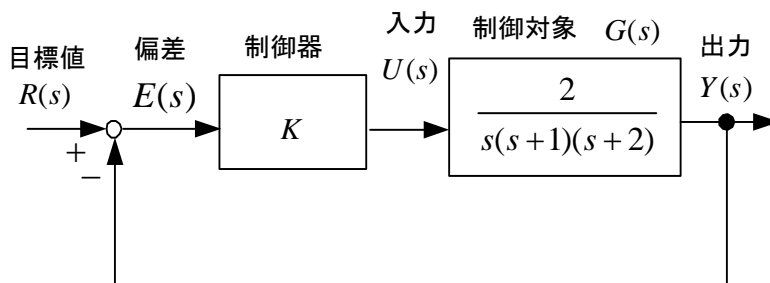
$$= (s^2 + \omega^2)(s + \alpha) = 0$$

$$\therefore \omega = \sqrt{5/2} = 1.58$$

以上により、根軌跡は図のように描ける。



(例題 8-3) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(略解) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)}$

漸近線の傾き角は、 $n=3, m=0$  だから  $\frac{(2k+1)}{3-0} \pi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$  となる。

漸近線の実軸との交点  $\sigma = -1$

特性方程式は、 $1 + G_o(s) = 0 \quad \therefore s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$

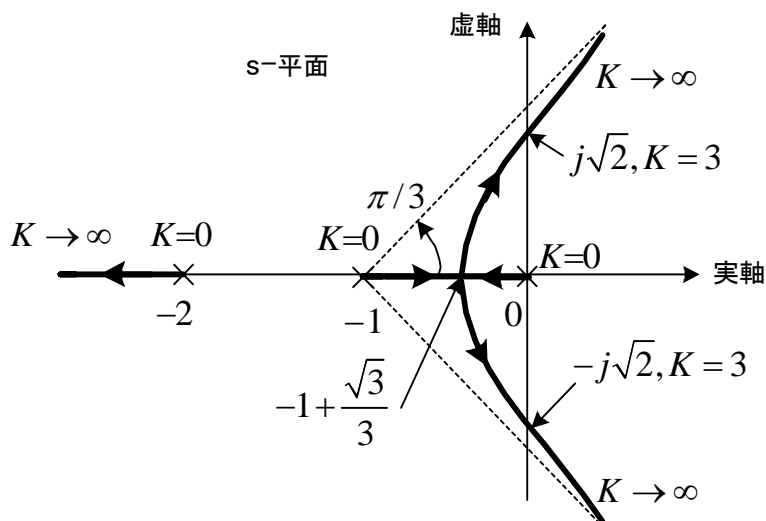
ラウスの安定判別法を用いる。安定条件  $0 < K < 3$

$K = 3$  のとき、特性根には  $s = \pm j\omega$  が含まれる。

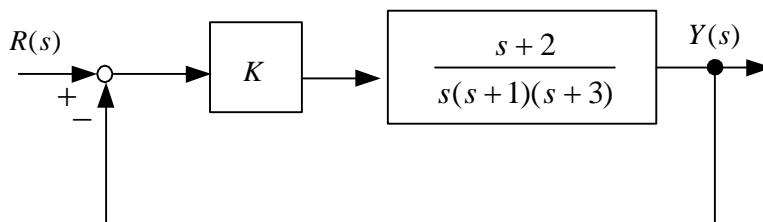
$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \quad \therefore (s^2 + \omega^2)(s + \alpha) = 0 \quad \omega^2 = 2, \alpha = 3$  よって、 $s = \pm j\sqrt{2}$

根軌跡が実軸を離れる点は、

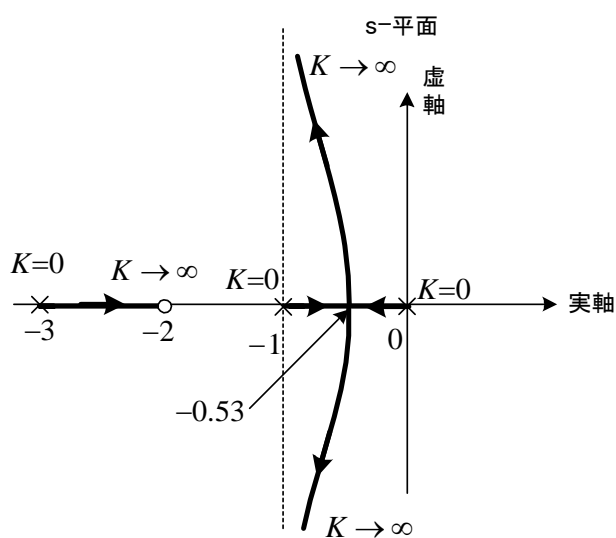
$$\frac{dG_o(s)}{ds} = \frac{-2K(3s^2 + 6s + 2)}{(s^3 + 3s^2 + 2s)^2} = 0 \quad s = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(問題 8-2) 図の制御系で, 制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき, 特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。ただし,  $s^3 + 5s^2 + 8s + 3 = 0$  の実根は  $s = -0.53$  である。



(解)



例題 8-3 と問題 8-2 を比べると, 零点の追加によって安定性が改善されていることが判る。

# 第9章 PID制御

これまで、どのような制御器を用いるかということあまり触れなかったが、代表的な制御器としてPID制御がある。PID制御は実用上極めて重要でその意味を理解することが大いに望まれる。PID制御に限ったことではないが、定常状態での偏差に関して一般的な理論を述べる。この結果、I制御の必要性が明らかとなる。

## 9.1 PID制御とは？

図9-1のフィードバック制御系を考える。

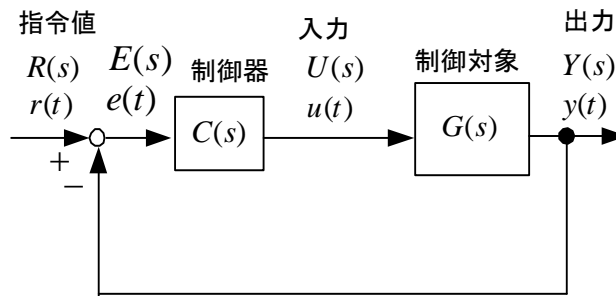


図9-1 フィードバック制御系

PID制御とは、指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ の偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$ をとり、制御対象への入力 $u(t)$ を次式のように求める制御法である。

$$u(t) = K_P(r - y) + K_I \int_0^t (r - y) dt + K_D \frac{d(r - y)}{dt} \quad (9-1)$$

ここで、 $K_P, K_I, K_D$ は正でそれぞれ、比例ゲイン、積分ゲイン及び微分ゲインと言う。それぞれの制御を**比例制御**(proportional control)、**積分制御**(integral control)、**微分制御**(derivative control)と呼ぶ。なお、比例制御と積分制御だけを用いたPI制御も多く用いられている。

比例制御は現在の偏差が大きい程入力を大きくして偏差をなくそうとするもので、最も自然な制御法と考えられる。ここで、制御対象は入力 $u(t)$ を大きくすれば、出力 $y(t)$ も大きくなるであろうとの前提がある。しかし、比例制御だけでは、指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致する場合、入力 $u(t) = 0$ となってしまう。一般に、入力が0であれば、出力も0となることが多いから、比例制御だけでは指令値 $r(t)$ と出力 $y(t)$ が一致することはあり得ないことになる。すなわち、**定常偏差**(steady-state error)が残り、望ましくない。

そこで、積分制御を加えてステップ応答（指令値  $r(t)$  が一定）の定常偏差を 0 にする。積分制御を加えるとステップ応答の定常偏差が 0 となる理由は以下のように考えるとよい。もし、指令値  $r$  (一定) と出力  $y(t)$  が一致しない場合、積分制御の項はどんどん増加または減少し  $u(t)$  が一定になることはない (図 9-2 参照)。これは定常状態と言えない。従って、指令値が一定であるならば、定常状態では  $u(t)$  が一定になるので、そのとき指令値  $r$  と出力  $y(t)$  は一致する必要がある。なお、定常状態で  $r$  と  $y(t)$  が一致しても、積分器の出力は 0 ではなく、それまでの積分値が残ったままである。この積分値は制御対象との関係で決る。積分制御は、指令値のステップ変化に対する定常偏差を 0 にするという利点があるが、過去から現在までの情報を現在の入力に反映する結果、タイミング（位相）が遅れて不安定にする危険性をもっている。従って、積分制御だけを用いることはまれである。

微分制御は、未来に起こるであろう現象を現在の入力に生かし、現象の先取りをする結果、過渡特性の改善に効果がある。しかし、出力信号に含まれるノイズの影響を受けやすいため (微分なのでわずかの脈動で正負に変化する)、注意が必要である。実際に使う場合、不完全微分 (ローパスフィルタ併用) として高周波領域ではゲインを小さくすることが一般的である。

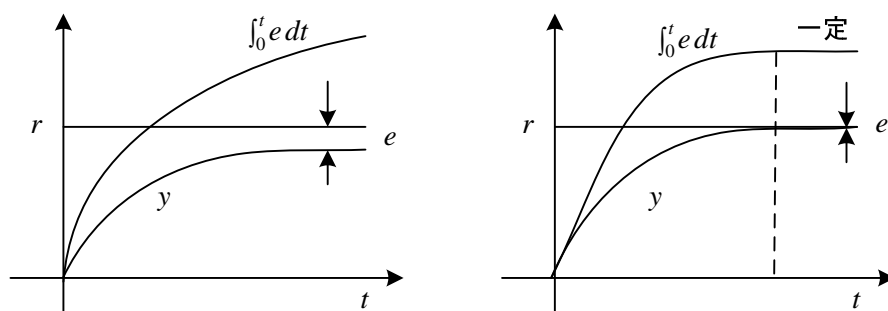
さて、PID 制御の伝達関数を求めてみよう。(9-1)をラプラス変換し、初期値を 0 とおいて、次式が得られる。

$$U(s) = K_p(R(s) - Y(s)) + \frac{K_I}{s}(R(s) - Y(s)) + K_D s(R(s) - Y(s))$$

$$= (K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s)(R(s) - Y(s))$$

よって、PID 制御器の伝達関数は次式で与えられる。

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \tag{9-2}$$



$e$ が0でないと、積分値は益々増加し、制御は終わらない。故に、この状態はあり得ない。

積分制御があると、いつもこうなる。 $e=0$ でも積分値は0とは限らない。

図 9-2 積分制御がある場合のステップ応答

PID 制御器の伝達関数を

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (9-3)$$

で表現するとき、 $T_I$  は**積分時間**(reset time, integral time)、 $T_D$  は**微分時間**(rate time, derivative time)と呼ばれる。

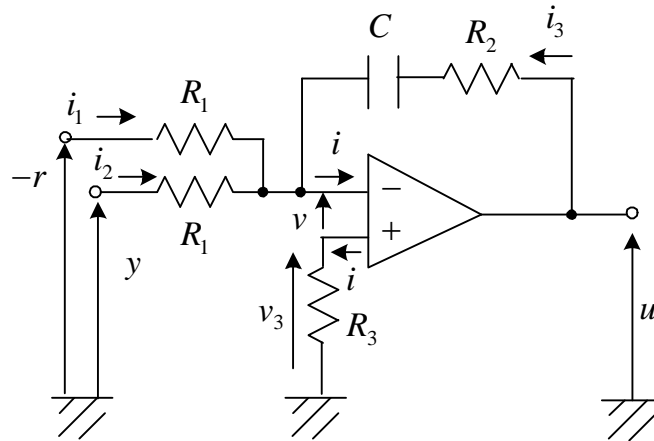


図 9-3 オペアンプを用いた P I 制御器

図 9-3 のオペアンプが理想的とすると、次式が成立する。

- (1)  $v = 0$  : オペアンプだけの増幅度が無限大で、負帰還があるから。
- (2)  $i = 0$  : 入力インピーダンスが無限大だから。

この結果、 $v_3 = 0$ である。 $-r, y, u$  を電圧とすると、

$$i_1 = -\frac{r}{R_1}, i_2 = \frac{y}{R_1}, u = R_2 i_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt, i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

整理して、

$$u = \frac{R_2}{R_1} (r - y) + \frac{1}{R_1 C} \int_0^t (r - y) dt$$

である。これは、P I 制御器であることが判る。第 2 項の積分器の値はコンデンサ電圧であることがわかる。 $r = y$  で  $i_3 = 0$  の定常状態でもコンデンサ電圧は 0 と限らない。

## 9.2 定常特性

図 9-1 の制御系で、**定常偏差**(steady-state error)を求めてみよう。図より、

$$E = R - Y = R - ECG$$

であるから、

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)} \quad \text{ここで, } G_o(s) = C(s)G(s) \quad : \text{一巡伝達関数} \quad (9-4)$$

$t \rightarrow \infty$  のときの定常偏差  $e_s$  は(2-21)の**最終値の定理**より次式で計算できる。

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_o(s)} \quad (9-5)$$

基本的な目標値（指令値）に対する，定常偏差を考えよう。

(1) ステップ指令

$r(t) = 1$  の場合，  $R(s) = 1/s$  となり，  $t \rightarrow \infty$  のときの定常偏差  $e_s$  は**定常位置偏差** (steady-state position error)と呼ばれ， (9-5)より

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{1 + K_{pp}} \quad (9-6)$$

ここで，  $K_{pp}$  は**位置偏差定数**(position error constant)と呼ばれ，次式で求められる。

$$K_{pp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = G_o(0) \quad (9-7)$$

(2) ランプ指令(ramp input)

$r(t) = t$  の場合，  $R(s) = 1/s^2$  となり，  $t \rightarrow \infty$  のときの定常偏差  $e_s$  は**定常速度偏差** (steady-state velocity error)と呼ばれ， (9-5)より

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{K_v} \quad (9-8)$$

ここで，次式の  $K_v$  は**速度偏差定数**(velocity error constant)と呼ばれる。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) \quad (9-9)$$

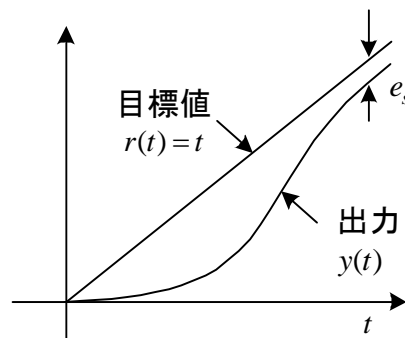


図 9-4 ランプ指令に対する定常偏差



具体的に一巡伝達関数  $G_o(s)$  の型を考えて、表 9-1 を導こう。0 以外の零点と極をそれぞれ  $-z_i$ ,  $-p_i$  とし、 $G_o(s)$  を次式で表す。

$$G_o(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (9-10)$$

$G_o(s)$  に  $1/s$  が含まれない  $N=0$  場合を **0 型**、 $1/s$  が含まれる  $N=1$  場合を **1 型**、 $1/s^2$  が含まれる  $N=2$  場合を **2 型** などと言う。例えば 1 型という場合、一巡伝達関数に  $1/s$  が含まれていればよいので、図 9-1 の場合には制御器または制御対象のどちらかに  $1/s$  が含まれていることになる。表 9-1 は(9-10)から得られる次式を (9-6), (9-8)に代入して得られる。

$$0 \text{ 型の場合: } K_{pp} = K \frac{z_1 z_2 \cdots z_m}{p_1 p_2 \cdots p_n}, \quad K_v = 0$$

$$1 \text{ 型の場合: } K_{pp} = \infty, \quad K_v = K \frac{z_1 z_2 \cdots z_m}{p_1 p_2 \cdots p_n}$$

$$2 \text{ 型の場合: } K_{pp} = \infty, \quad K_v = \infty$$

表 9-1 一巡伝達関数  $G_o(s)$  の型と定常偏差  $e_s$  の関係

$G_o(s)$ の型	ステップ指令 $r(t)=1$ に対する定常偏差	ランプ指令 $r(t)=t$ に対する定常偏差
0 型	$\frac{1}{1+K_{pp}}$	無限大
1 型 $1/s$ の因子	0	$\frac{1}{K_v}$
2 型 $1/s^2$ の因子	0	0

(注)  $A$  を定数として、 $r(t)=A$ ,  $r(t)=At$  の場合、偏差は  $A$  倍になる。

定常偏差を 0 にするなら、2 型が望ましいが、2 型の場合には位相が遅れるので不安定になり易くなる。

“積分制御を追加して PI 制御にすれば定常偏差は常に 0 となる” と、単純に考えてはいけない。どのような指令値か、型はどうなっているかが関係してくる。また、指令値が正弦波であれば、PI 制御器であっても、定常偏差を 0 にすることはできない。これに関する理論として、以下の**内部モデル原理**(internal model principle)がある。

定常偏差を 0 にするための条件は、一巡伝達関数が指令値や外乱をラプラス変換したときの極（実部 $\geq 0$ ）を含むことである（文献 21, 23）。

例えば、ステップ変化する指令値や外乱に対してはそれらをラプラス変換すると  $A/s$ （極は 0）だから、一巡伝達関数に積分器  $1/s$  を含まないといけない。ランプ指令の場合も同様に考えられる。指令値が

$$r(t) = A \sin \omega_0 t$$

の場合、そのラプラス変換は

$$R(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

だから、定常偏差をなくすには制御器に  $1/(s^2 + \omega_0^2)$  を含まないといけない。図 9-5 はこの場合の制御系構成の一例である。 $C(s)$  は過渡特性（安定性）を改善するための制御器で、一巡伝達関数に  $1/(s^2 + \omega_0^2)$  を含むなら種々の構成が考えられる。

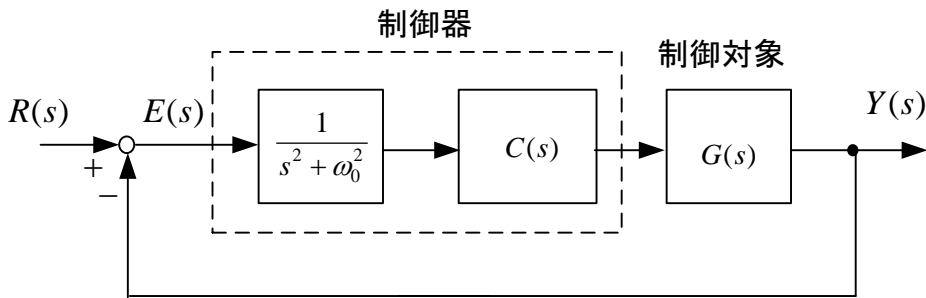
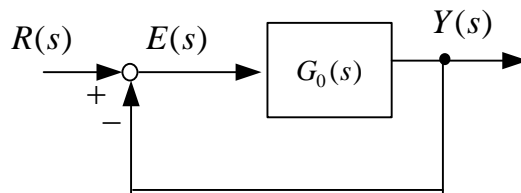


図 9-5 正弦波指令に対する定常偏差を 0 にする制御器

指令  $r(t) = A \sin \omega_0 t$  に対する定常偏差が 0 になる条件を求めてみよう。一巡伝達関数を

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \text{ おく。ここで、} N(s), D(s) \text{ は } s \text{ の多項式である。}$$



$$R(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \text{ だから、} R(s) - G_0(s)E(s) = E(s) \text{ より}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{D(s)}{D(s) + N(s)} \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

分子  $D(s) = (s^2 + \omega_0^2) D'(s)$  であれば  $s^2 + \omega_0^2$  で約分でき、特性方程式  $D(s) + N(s) = 0$  のすべての根の実部が負（閉ループシステムが安定）であれば、 $E(s)$  を部分分数展開して、

ラプラス逆変換より求めた  $e(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき、 $e(t) \rightarrow 0$  となる。従って、求める条件は、閉ループ系が安定で  $G_0(s)$  の極に  $\pm j\omega_0$  が含まれることである。内部モデル原理の一例である。

これまで、定常偏差に関して述べたが、制御器や制御対象の変数は定常状態でどうなるかを知りたいことがある。最終値の定理を使うと定常解析は可能であるが、ここでは、指令値や外乱が一定値（ステップ指令）の場合に限定して、定常解析を行う簡単な方法を述べる。これは、以下の様にまとめられる。

**定常状態の解析**は  $s=0$  とおく。

条件：指令値や外乱が一定値（ステップ指令）の場合のみ

直流回路の定常解析と同じことである。 $s=0$  は  $d/dt=0$  に対応する。

(注) ランプ指令，正弦波指令など指令や外乱が時間的に変化する場合は  $s=0$  とはできない。

**積分器**のゲインは $\infty$ になるので、その入力は0, 出力は外部条件で決る一定値になる。

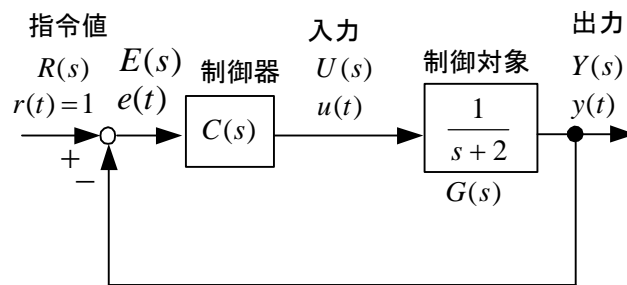
積分器の入力が0でない一定値の場合には、その値をずっと積分していく（集めていく）ので積分器の出力が変化してこれは定常状態とは言えない。従って、積分器の入力は定常状態では0でないといけない。

(例題 9-1) 図の制御系で、制御器が

(1) P 制御  $C(s) = K_p$

(2) PI 制御  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$

(3) PID 制御  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$



のとき、ステップ応答の定常偏差を求めよ。

(解) 一巡伝達関数は、 $G_o(s) = C(s)G(s)$  である。

(1)  $t \rightarrow \infty$  のときの定常偏差  $e_s$  は

$$e_s = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + K_p/2} = \frac{2}{2 + K_p}$$

$$(2) e_s = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

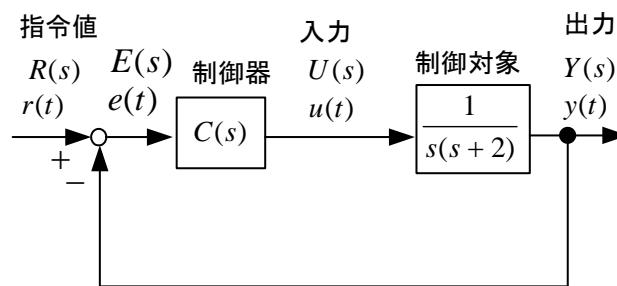
$$(3) e_s = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

このように、制御対象に $1/s$ が含まれない場合には、積分制御があればステップ応答の定常偏差は0となる。

(例題 9-2) 図の制御系で、制御器が

$$C(s) = K_p$$

のとき、 $r(t) = 1$  に対するステップ応答の定常偏差を求めよ。また、 $r(t) = t$  (ランプ指令) に対する定常偏差を求めよ。



(解) 図より、一巡伝達関数は、

$$G_o(s) = C(s)G(s) = \frac{K_p}{s(s+2)}$$

位置偏差定数  $K_{pp} = G_o(0) = \infty$  だから、ステップ指令  $r(t) = 1$  に対する定常偏差  $e_s$

$$e_s = \frac{1}{1 + K_{pp}} = 0$$

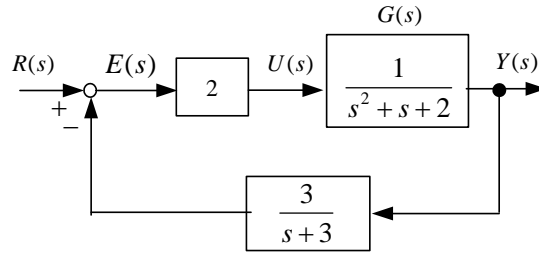
速度偏差定数  $K_v$  は  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = K_p/2$  だからランプ指令  $r(t) = t$  に対する定

常偏差  $e_s$  は

$$e_s = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{K_p}$$

(注) 制御対象に $1/s$ を含んでいたら、比例制御でも1型となり、ステップ応答の定常偏差は0となる。

(例題 9-3) 図の制御系で、ステップ指令  $r(t) = 1$  およびランプ指令  $r(t) = t$  に対する定常偏差を求めよ。



(解) 一巡伝達関数は  $G_o(s) = \frac{2}{s^2 + s + 2} \frac{3}{s + 3}$  である。

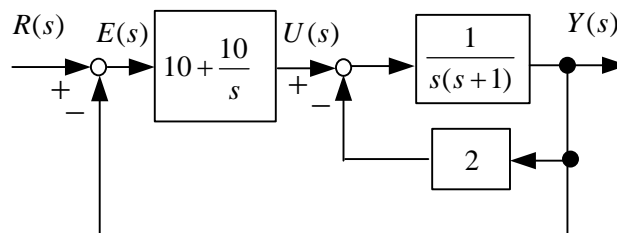
位置偏差定数  $K_{pp} = G_o(0) = 1$  だから、ステップ指令  $r(t) = 1$  に対する定常偏差  $e_s$

$$e_s = \frac{1}{1 + K_{pp}} = \frac{1}{2}$$

速度偏差定数  $K_v$  は  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = 0$  だからランプ指令  $r(t) = t$  に対する定常偏差  $e_s$  は

$$e_s = \frac{1}{K_v} = \infty$$

(例題 9-4) 図の制御系で、ステップ指令  $r(t) = 10$  およびランプ指令  $r(t) = 2t$  に対する定常偏差を求めよ。



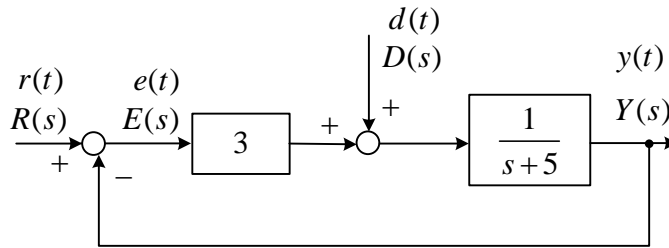
(解) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{10s + 10}{s} \frac{1}{s^2 + s + 2}$  (  $\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + s + 2}$  より )

$r(t) = 10$  に対する定常偏差を  $e_s$  とすると、

$$e_s = \frac{10}{1 + G_o(0)} = \frac{10}{1 + \infty} = 0$$

$r(t) = 2t$  のとき、  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = 5$  故に定常偏差は  $e_s = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{5}$

(例題 9-5) 図の制御系で、ステップ指令  $r(t) = 1$  かつ外乱  $d(t) = 1$  であるとき定常偏差を求めよ。



(解) ブロック図より 
$$\frac{3(R-Y)+D}{s+5} = Y \quad \therefore Y = \frac{3R+D}{s+8}$$

$R = \frac{1}{s}, D = \frac{1}{s}$  だから  $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3 \frac{1}{s} + \frac{1}{s}}{s+8} = \frac{1}{2}$

定常偏差は  $e_s = r(\infty) - y(\infty) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

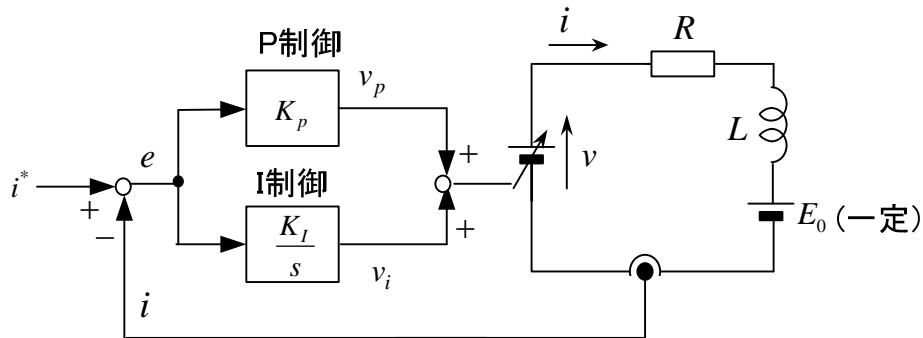
(別解) 指令値及び外乱ともに一定なので、定常値は  $s=0$  と置いて求まる。

ブロック図より (変数の  $(\infty)$  は省略した)

$$\frac{3(r-y)+d}{5} = y \quad \therefore y = \frac{3r+d}{8} = \frac{1}{2} \quad (r=d=1 \text{ だから}) \text{ 以下同様}$$

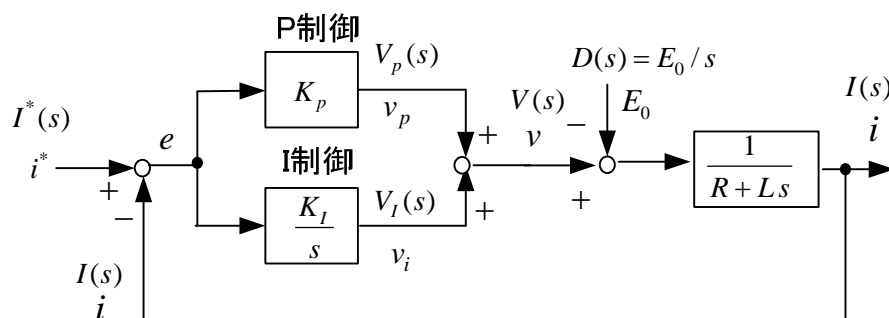
\* 外乱だけの場合は  $r=0$  である。システムは線形だから重ね合わせの理が成り立つので、指令値と外乱の片方を 0 とし求め、後で加えてもよい。

(例題 9-6) 図は電流の P I 制御系である。電流の指令値  $i^*$  が一定値であるとき、定常状態での、電流  $i$ 、偏差  $e$ 、比例制御器の出力  $v_p$ 、積分制御器の出力  $v_i$ 、電源電圧  $v = v_p + v_i$  を求めよ。ただし、回路の直流電源  $E_0$  (外乱とする) は一定である。また、制御システム全体のブロック図を書け。さらに、P I 制御器が P 制御のみの場合、定常状態での、電流  $i$ 、偏差  $e$ 、P 制御器の出力  $v_p$ 、電源電圧  $v$  を求めよ。



(解) PI 制御の場合： PI 制御時のブロック線図は図のようになる。指令値や外乱が一定値（直流）の場合，伝達関数の  $s=0$  と置いて定常値が求まるので， $v_i$  が有限であるためには積分器の入力  $e=0$  でなければならない。また， $sL=0$  とおける。

$$e = i^* - i = 0, i = i^*, v_p = K_p e = 0, \frac{v - E_0}{R} = i \therefore v = v_i = Ri^* + E_0$$



\*I 制御の出力  $v_i$  の値は，全体的に決る。

P 制御の場合：同様に，伝達関数の  $s=0$  と置いて定常値が求まるので

$$\left\{ K_p(i^* - i) - E_0 \right\} / R = i \quad \therefore i = \frac{K_p i^* - E_0}{R + K_p}$$

$$e = i^* - i = \frac{Ri^* + E_0}{R + K_p}, v_p = K_p \frac{Ri^* + E_0}{R + K_p}, v = v_p$$

(補足) PI 制御の場合：  $v = v_p + v_i = K_p(i^* - i) + K_I \int_0^t (i^* - i) dt$  で，指令値  $i^*$  が一定値，

外乱  $E$  も一定値なので，定常状態では偏差が 0 となり  $i^* = i$  となる（もし等しくないと  $v_i$  は積分値なので変化が続いて，この結果電流も変化が続き，これは指令値が一定の場合の定常状態とは言えないから）。従って，定常時には  $e=0$  となる。電流が一定のときコイルの電圧は 0 なので ( $sL=0$  とおける)，回路の式より  $v = Ri + E_0$  がなりたつ。 $v_p = 0$  だから， $v_i = v$  でなくてはならない。積分器には制御を始めたときからの積分値が残り，たとえ現時点で  $i^* = i$  でも出力  $v_i$  は 0 とはならないので注意せよ。

### 9.3 PI 制御器を含む制御系の状態方程式

制御対象が、状態方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{9-11}$$

と、出力方程式

$$y(t) = Cx(t) \tag{9-12}$$

で記述されるとき、 $y$ を検出し、入力 $u(t)$ をPI制御により次式で制御する場合を考える。

$$u(t) = K_p(y^* - y) + K_I \int_0^t (y^* - y) dt \quad (9-13)$$

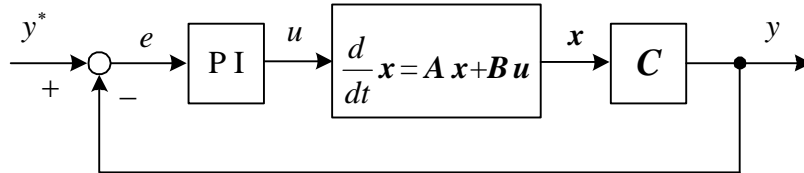


図 9-9 PI 制御器を含む制御系

いま、

$$\int_0^t (y^* - y) dt \equiv z$$

とおくと、 $\frac{dz}{dt} = y^* - y$  (9-14)

(9-13)より、 $u = K_p(y^* - y) + K_I z$  (9-15)

(9-15)を(9-11)に代入し、(9-12)を用いると次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} y^* \quad (9-16)$$

上式は、次式のように書け、制御系全体の状態方程式である。

$$\frac{dx'}{dt} = A' x' + B' y^* \quad (9-17)$$

従って、系全体の安定性は、

$$A' = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

の固有値によって決まる。例えば、 $K_p$ をパラメータとして変化させ、QR法などにより $A'$ の固有値を数値計算しプロットすると、根軌跡と同じものが得られる。

(例題 9-7) 次の微分方程式で記述される制御対象がある。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = u(t) \quad \textcircled{1}$$

$x(t)$ を検出し、目標値 $x^*(t)$ との偏差をとり、 $u(t)$ を次式のようにPI制御する。

$$u(t) = K_p(x^* - x) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x^* - x) dt \quad \textcircled{2}$$



このとき、系全体の状態方程式を求めよ。但し、 $T_i = 0.1[\text{s}]$ とする。

(解) まず、制御対象の状態方程式を導く。

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = x_2$$

とおくと、①より、

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 2x_1 + u$$

よって、制御対象の状態方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

PI 制御器については、

$$\int_0^t (x^* - x) dt = z$$

とおくと、

$$\frac{dz}{dt} = x^* - x$$

入力  $u(t)$  は、

$$u = K_p(x^* - x) + 10K_p z$$

従って、系全体の方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 - K_p & -2 & 10K_p \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \\ 1 \end{bmatrix} x^*$$

$\mathbf{A}'$  の固有値を求める式は、

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}'| = s^3 + 2s^2 + (K_p + 2)s + 10K_p = 0$$

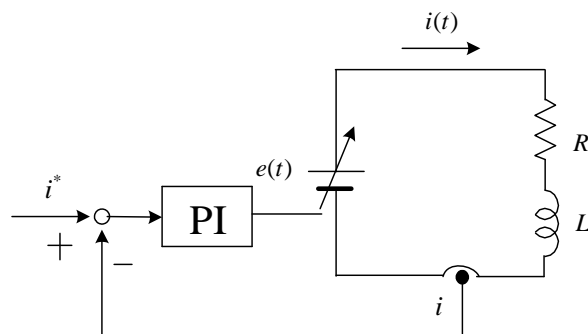
となる。

(確認) ラプラス変換して、ブロック図を書き、閉ループ伝達関数を求め、その分母を 0 とおいた特性方程式を求めよ。これが  $\mathbf{A}'$  の固有値を求める式と一致することを確認せよ。

(例題 9-8) 図の RL 回路の電流を次式で PI 制御する。

$$e(t) = K_p(i^* - i) + K_I \int_0^t (i^* - i) dt$$

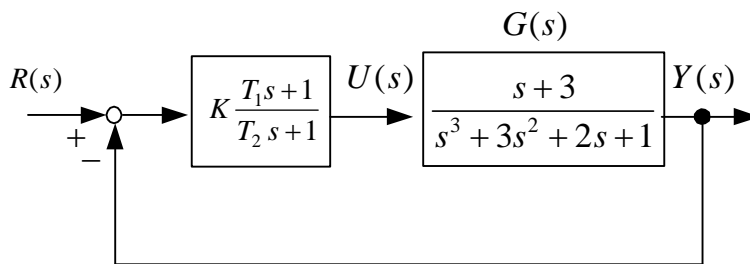
このとき、制御系全体の状態方程式を求めよ。



(解) 制御系全体の状態方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{K_I}{L} & -\frac{R+K_p}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{K_p}{L} \end{bmatrix} i^*$$

(例題 9-9) 図の制御系の状態方程式と出力方程式を求めよ。



(解) まず制御対象の状態方程式を求めよ。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s+1} = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s+1} \frac{V(s)}{V(s)}$$

とおく。分子、分母をそれぞれ等しいと考え、分母より

$$U(s) = (s^3 + 3s^2 + 2s + 1)V(s)$$

を逆ラプラス変換して、

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 2 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = u(t)$$

ここで、

$$x_1(t) = v(t) \quad , \quad x_2(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \quad , \quad x_3(t) = \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt}$$

と定義すると

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d^3 v(t)}{dt^3} = -x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) + u(t)$$

以上により、制御対象の状態方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

これを、次式で表す。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \textcircled{1}$$

出力は、分子より

$$\begin{aligned} Y(s) &= (s+3)V(s) \\ &= sV(s) + 3V(s) \end{aligned}$$

両辺を逆ラプラス変換して次式の出力方程式を得る。

$$y(t) = x_2(t) + 3x_1(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

これを、次式で表す。

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \textcircled{2}$$

次に、制御器を考える。

$$K \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} (R(s) - Y(s)) = U(s)$$

$$\therefore K \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{T_2 s + 1} \right) (R(s) - Y(s)) = U(s) \quad \text{ただし, } \alpha = \frac{T_1}{T_2} \quad \textcircled{3}$$

$$\text{いま, } \frac{1}{T_2 s + 1} (R(s) - Y(s)) = Z(s) \quad \text{とおくと, } (T_2 s + 1)Z(s) = R(s) - Y(s)$$

逆ラプラス変換して,

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{1}{T_2} z(t) + \frac{1}{T_2} r(t) - \frac{1}{T_2} \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \textcircled{4}$$

③を逆ラプラス変換して,

$$u(t) = K\alpha r(t) - K\alpha \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + K(1-\alpha)z(t) \quad \textcircled{5}$$

①に⑤を代入し、①、④より制御系全体の状態方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}\alpha\mathbf{C} & \mathbf{BK}(1-\alpha) \\ -\frac{1}{T_2}\mathbf{C} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{BK}\alpha \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} r$$

出力方程式は、次式となる。

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix}$$

## 第 10 章 制御系の設計 I

制御器設計の基本的方針について述べる。3つの周波数領域に分けて制御器の役割を変えることで良好な特性を得る。制御器は一般に直列補償として構成されるが、2自由度制御系という考え方もある。

### 10.1 制御系に要求されるもの

制御系を設計する場合、どんな性能に着目すればよいのであろうか？以下に示すように、いろいろのことが考えられる。

- (1) システムが安定でありオーバシュートやアンダシュートが小さいこと（安定性，減衰性）。制御対象が変動しても安定性が影響されないこと（ロバスト安定性:robust stability）。Robust は“頑健な，強固な”の意味がある。
- (2) 目標値に素早く達すること（速応性 speed of response）。
- (3) 定常偏差がないこと。
- (4) 外乱の影響を受けないこと（外乱抑圧特性）。
- (5) ノイズの影響を受けないこと（雑音除去特性）。
- (6) 制御対象の操作量(入力)が大きすぎて頻繁に制限値(リミッタ)にかからないこと。

速応性，定常偏差は目標値追従特性とよばれることもある。(1)～(6)には，同時に満足することができないものも含まれている。大雑把に言って，制御器のゲインを大きくすると，(2) (3) (4) は満足されるが，逆に(1) (5) (6) は満たされなくなる。もちろん，不安定な制御対象で制御器のゲインを大きくして安定化することもあり，あくまでも“一応”である。

### 10.2 両立できない制御性能

図 10-1 の制御系について，制御性能を満足するには制御器はどうあるべきか考える。目標値に対する偏差の伝達関数を  $G_{re}(s)$  とすると，この場合には外乱と観測雑音を 0 と考えて，

$$\frac{Y}{R} = \frac{CG}{1+CG}, R-Y=E \quad \text{より,}$$
$$G_{re}(s) = \frac{E}{R} = \frac{1}{1+CG} \quad (10-1)$$

となる。  $C = \infty$  のとき  $G_{re} = 0$  となり理想的特性となる。

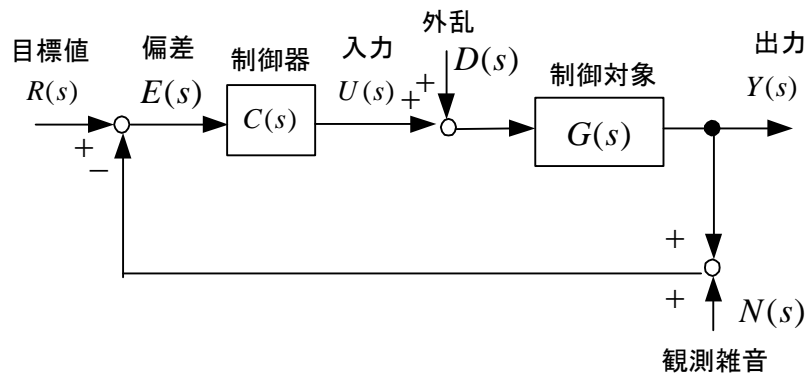


図 10-1 フィードバック制御系

外乱に対する偏差の伝達関数を  $G_{de}(s)$  とすると、この場合には、目標値と観測雑音を 0 と考えて、

$$(EC + D)G = Y, \quad -Y = E \quad \text{より、}$$

$$G_{de}(s) = \frac{E}{D} = -\frac{G}{1 + CG} \quad (10-2)$$

となる。この場合も、 $C = \infty$  のとき  $G_{de} = 0$  となり理想的特性となる。

観測雑音に対する出力の伝達関数を  $G_{ny}(s)$  とすると、

$$ECG = Y, \quad Y + N = -E \quad \text{より、}$$

$$G_{ny}(s) = \frac{Y}{N} = -\frac{CG}{1 + CG} \quad (10-3)$$

となる。この場合には、 $C = 0$  のときすなわち制御しない方が  $G_{ny} = 0$  となり観測ノイズの影響が出力に現れなくなる。(10-1)~(10-3)はいずれも十分に小さくしたい伝達関数であるが、同時に満足する  $C$  は存在できない。一般に、

$$S(s) \equiv \frac{1}{1 + C(s)G(s)}, \quad T(s) \equiv \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (10-4)$$

とおき、 $S(s)$  を**感度関数**、 $T(s)$  を**相補感度関数**と呼ぶ。両者の値には、

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (10-5)$$

の関係がある。 $S(j\omega), T(j\omega)$  は複素数なので、 $|S(j\omega)|, |T(j\omega)|$  共に小さくできるが、 $|S(j\omega)| + |T(j\omega)| \geq 1$  であり、共に小さくすることに限界はある。

次に、ロバスト安定性について考える。いま、制御対象が次式のように変化したとする。

$$G'(s) = (1 + \delta(s))G(s) \quad (10-6)$$

$\delta(s)$  はモデル化誤差(modeling error)である。このときのブロック図を図 10-2 に示す。

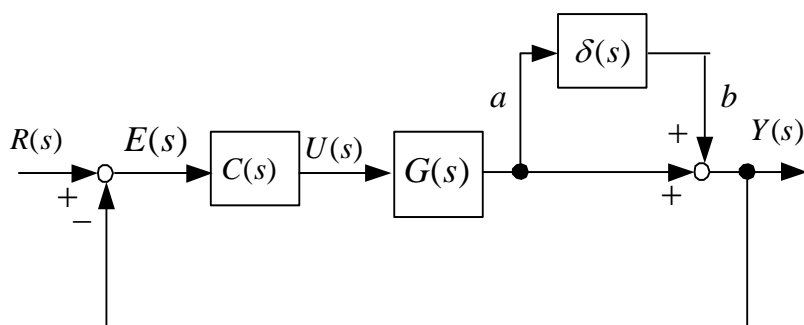


図 10-2 制御対象が変動した場合の制御系(文献(9)より)

$R(s) = 0$  として、 $b$  から  $a$  に至る伝達関数を求める。

$$a + b = -E, \quad ECG = a \quad \text{より,}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{CG}{1 + CG} \quad (10-7)$$

観測雑音に対する出力の伝達関数と等しいことが判る。安定であるためには、ナイキストの安定条件[定理 2]より、一巡伝達関数が  $-1 + j0$  の点を囲まなければよく、

$$\left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| |\delta(j\omega)| = |T(j\omega)| |\delta(j\omega)| < 1 \quad (10-8)$$

であれば十分である。従って、ロバスト安定であるための条件は、相補感度関数  $|T(j\omega)|$  を小さくすることで達成できる。

以上のことから、全ての制御性能を常に満足する制御器は実現不可能で、何らかのトレードオフにより実現する以外方法がないことが明確となった。

### 10.3 制御系の設計指針

目標値追従特性と外乱除去特性を良くするには感度関数  $|S(j\omega)|$  を小さくすべきで、雑音除去特性とロバスト安定性を良くするには相補感度関数  $|T(j\omega)|$  を小さくすべきであって、それらの和は 1 以上だから共に小さくすることには限界がある。そこで、周波数領域によりどちらを重要視するかで、両者の妥協を図る。

制御系設計の基本方針として、低周波領域では目標値追従特性と外乱除去特性を良くし、高周波領域では雑音除去特性とロバスト安定性を良くする。目標値（指令値）をゆっくりと変化させる場合（低周波の指令）には出力が追従してくれないと話にならない。ボード線図でゲイン  $g > 0\text{dB}$  の周波数成分に対しては増幅して応答してくれるので、低周波領域のゲインは大きく選ぶ必要がある。高周波領域までゲインが大きければ指令値を急に変化させてもすぐに追従してくれるが、雑音の影響を受け易くなるのでほどほどで我慢する。すなわち、雑音は高周波成分からなり、モデル化誤差  $\delta(j\omega)$  も高周波領域で大きくなる（低周波特性は無視しないでモデル化することが普通である）から、これらの影響を排除するため高周波領域ではゲインを小さく選び信号を減衰させる。一巡伝達関数のゲインが  $0\text{dB}$  となる中間周波数領域では、制御系が安定になるように位相余裕を確保する。

以上をまとめると、望ましい制御系を構成するためには、一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図が、図 10-3 の斜線で示す領域に入らないようにする。

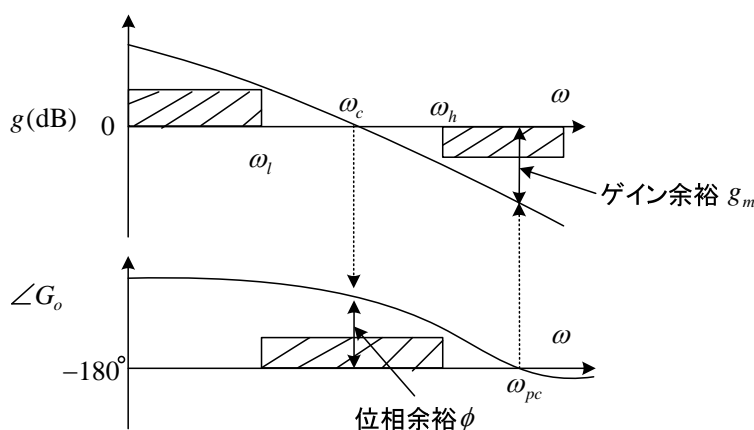


図 10-3 望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$

図で、 $\omega_c$  は**ゲイン交差角周波数**(gain crossover angular frequency)と呼ばれる。 $\omega_c$  が大きい程、目標値の急峻な変化にも追従して速応性を高めることができ、急に変化する外乱も除去できるようになるが、ノイズに影響されやすくまたロバスト安定性も悪くなる。 $\omega_{pc}$  は**位相交差角周波数**(phase crossover angular frequency)と呼ばれる。

望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega)$  のボード線図が与えられると、制御器の伝達関数  $C(j\omega)$  を調節して  $C(j\omega)G(j\omega)$  が図の斜線領域に入らないようにして設計を行う。ボード線図を用いると、ゲインと位相が制御対象のグラフに制御器のグラフを加えるだけで求まるため大変便利である。

基本的な制御系の設計指針は、上述の通りである。以下では、一巡伝達関数  $G_o(s)$  がむだ時間要素を含まないプロパーな有理関数で、極や零点が左半平面上に存在する**最小位相系**(minimum phase system)の場合について設計指針を具体的に述べる。

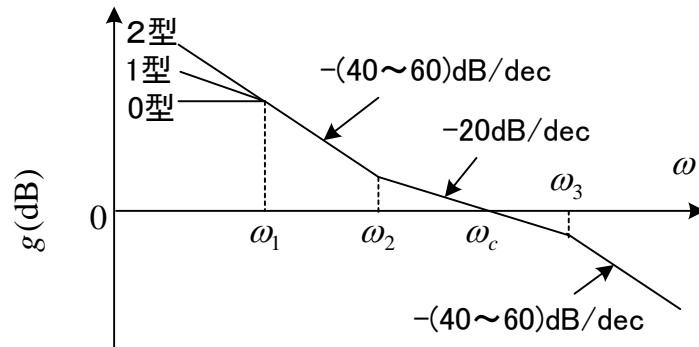


図 10-4 望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega)$  のゲイン特性 (文献(5)より)

(1) 目標値や外乱の存在する周波数帯域が  $\omega_2$  以下であるとすれば,  $\omega_2$  以下では目標値追従特性と外乱除去特性を良くするため, ゲインを高くする必要がある。この帯域では, PI 補償や位相遅れ補償を行うとゲインを高くできる。特に,  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  では,  $-40 \sim -60\text{dB/dec}$  の部分を作り定常偏差を小さくする。ステップ応答に対する定常偏差を完全に 0 にするには,  $\omega = 0$  のときゲインが  $\infty$  となる必要があるから,  $\omega < \omega_1$  では, 1 型 ( $-20\text{dB/dec}$ ) か 2 型 ( $-40\text{dB/dec}$ ) でなくてはならない。制御対象が  $1/s$  を積の形で含まないとき, PI 制御器を使うと 1 型となる。

(2) ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  付近の位相の遅れは安定性 (減衰性) と関係し, 十分な位相余裕を確保するためには,  $\omega_c$  付近のゲインの傾斜は緩やかであることが必要である。**ボードの定理**によるとゲインと位相の関係は独立でなく,  $-20\text{dB/dec}$  の傾斜が長く続くと位相の遅れは  $90$  度に近くなり, 位相余裕  $90$  度が確保できる ( $G_o(s)$  がプロパーな有理関数で最小位相系の条件が必要で, むだ時間を含む場合は成立しない)。そこで,  $\omega_2 < \omega < \omega_3$  では,  $-20\text{dB/dec}$  の傾斜とする。必要に応じて,  $\omega_2 < \omega < \omega_3$  で位相進み補償や微分 (D) 補償を行って十分な位相余裕が得られれば, 全体のゲインを上げて  $\omega_c$  を大きくできるので, 速応性を増すこともできる。

(3)  $\omega_3$  以上の周波数帯は, 雑音やモデル化誤差の影響が大きくなるので, ゲインを十分に落とす。このため, 出力信号を検出するときに低域通過フィルタ (ローパスフィルタ) を用いて, 雑音を除去するのが普通である。低域通過フィルタも一巡伝達関数の一部と成る。しかし, 低域通過フィルタの挿入は位相の遅れを伴うので, 雑音の周波数帯域がゲイン交差角周波数  $\omega_c$  に近いときは, 安定性を損なう恐れがあるので注意が必要である。

(問題 10-1) 図は制御系設計の基本となる一巡伝達関数のボード線図である。以下の問いに答えよ。

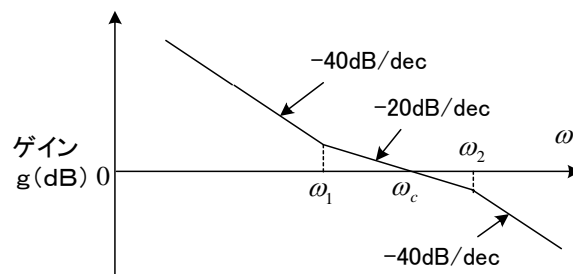
(1)  $\omega_c$  は何と呼ばれるか。

(2)  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  の部分を  $-20\text{dB/dec}$  にするのは何故か。位相余裕との関係も含め答えよ。



(3)  $\omega < \omega_1$  でゲインを大きく選ぶ理由を述べよ。 $\omega = 0$  でゲインを無限大にする利点は？

(4)  $\omega_2 < \omega$  で、ゲインを小さく選ぶ理由を述べよ。



## 10.4 補償要素と制御系の設計

ボード線図上では、

### 望ましい一巡伝達関数 = 制御対象の伝達関数 + 制御器の伝達関数

が成り立つので、望ましい一巡伝達関数を決めると制御器の伝達関数が決まってくる。これが制御器の設計である。図 10-3 や図 10-4 の望ましい周波数特性を実現するためには、制御器に以下の補償要素を単独または組み合わせて（掛け合わせて）使用すれば良い。

1) 比例要素  $C(s) = K_c$  (10-9)

2) 積分要素  $C(s) = 1/(sT)$  (10-10)

3) 微分要素  $C(s) = K_c s$  (10-11)

4) PD 要素  $C(s) = K_p(1 + T_D s)$  (10-12)

5) 一次遅れ要素  $C(s) = 1/(1 + sT)$  (10-13)

6) PI 要素  $C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_I s})$  (10-14)

7) 位相進み要素(phase lead element)  $C(s) = K_c \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}$  ( $\alpha > 1$ ) (10-15)

8) 位相遅れ要素(phase lag element)  $C(s) = K_c \frac{\alpha(T s + 1)}{\alpha T s + 1}$  ( $\alpha > 1$ ) (10-16)

9) 位相進み-遅れ要素(phase lead-lag element)

$$C(s) = K_c \frac{\alpha_1 T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \frac{\alpha_2 (T_2 s + 1)}{\alpha_2 T_2 s + 1} \quad (\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1) \quad (10-17)$$

10) PID 要素  $C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$  (10-18)

\* 比例要素は他の要素の中に含まれているものもある。

以下に、位相進み補償、位相遅れ補償、PID 補償に関して述べる。

## ○ 位相進み補償

まず、位相進み要素のボード線図の略図を描く。(10-15)で  $s = j\omega$  とおいて

$$C(j\omega) = K_c \frac{j\omega\alpha T + 1}{j\omega T + 1} = \begin{cases} K_c & : \omega T < \omega\alpha T < 1 \quad (\omega < 1/(\alpha T)) \\ jK_c\omega\alpha T & : \omega T < 1 < \omega\alpha T \quad (1/(\alpha T) < \omega < 1/T) \\ K_c\alpha & : 1 < \omega T < \omega\alpha T \quad (1/T < \omega) \end{cases}$$

と近似して、ボード線図が以下のように描ける。

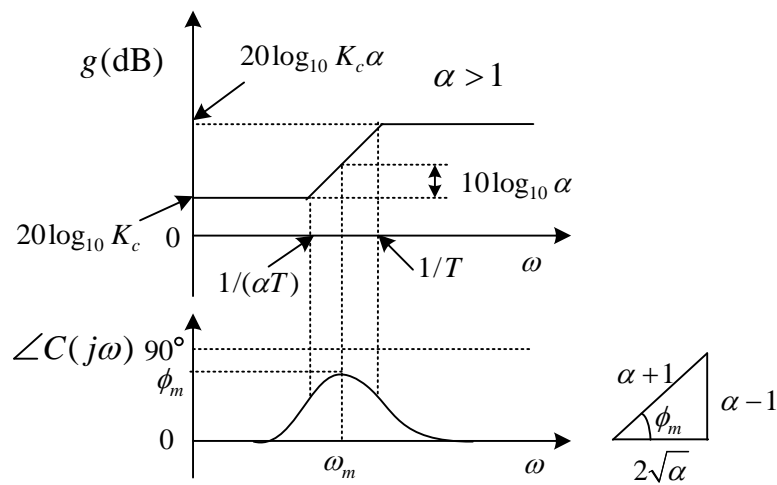


図 10-5 位相進み要素のボード線図

図 10-5 で、位相が最大となる点を求める。

$$\angle C(j\omega) = \angle(1 + j\omega\alpha T) - \angle(1 + j\omega T) = \tan^{-1} \omega\alpha T - \tan^{-1} \omega T \quad (10-19)$$

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{\alpha T}{1 + (\omega\alpha T)^2} - \frac{T}{1 + (\omega T)^2} = 0 \quad \text{より}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}, \quad \phi_m = \tan^{-1} \sqrt{\alpha} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (10-20)$$

(10-20)で  $\tan \phi_m$  を計算すると、 $\tan(\phi_1 - \phi_2) = (\tan \phi_1 - \tan \phi_2) / (1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2)$  だから

$$\tan \phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad \therefore \sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (\text{図 10-5}) \quad \therefore \alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (10-21)$$

$\omega_m$  を位相進み要素を含めた全体の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  と等しくなるように設計すると、位相余裕を大きくできるので安定性が改善できる。進めたい位相  $\phi_m$  が大きいほど  $\alpha$  を大きく選ぶ必要がある ( $g$  が増加する部分が広がる)。ただし、高周波でゲインが高くなるのでノイズの影響を受けやすくなることに注意する必要がある。

図 10-6 の制御系で位相進み補償の設計例を以下に示す。設計仕様は、速度偏差定数  $K_v = 10$ ，位相余裕 40 度以上とする。

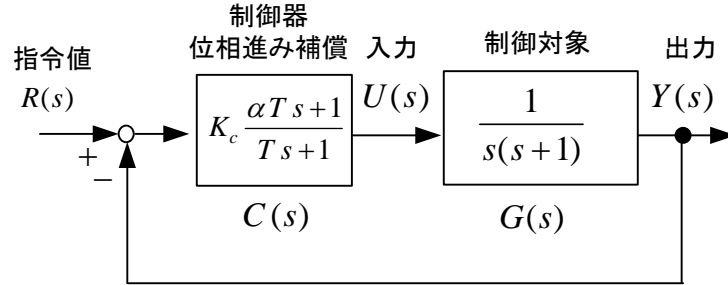


図 10-6 位相進み補償の設計例

一巡伝達関数は、次式で与えられる。

$$G_0(s) = K_c \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} \frac{1}{s(s+1)} \quad (\alpha > 1) \quad (10-22)$$

速度偏差定数  $K_v$  が 10 になるように  $K_c$  を設計する。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0 = K_c = 10 \quad (10-23)$$

そこで、 $10/(s(s+1))$  のボード線図を描くと、図 10-7 の補償なし ( $C(s) = 10$  の比例制御に相当) が得られる。ゲイン交差角周波数  $\omega_c = 3$ ，位相余裕 18 度である。ボード線図やこれらの値は、市販のソフトウェア Matlab が利用できる。

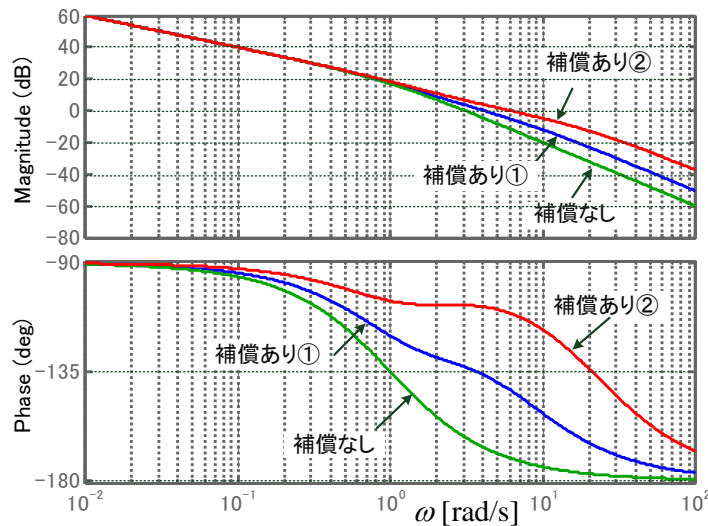


図 10-7 図 10-6 の一巡伝達関数  $G_0(s) = C(s)G(s)$  のボード線図

位相進み補償の最大位相  $\phi_m = 30^\circ$  と設定すると、(10-21)より

$$\alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 3 \quad (10-24)$$

図 10-5 より、 $\phi_m = 30^\circ$  で、ゲインの増加は  $10 \log_{10} \alpha = 10 \log_{10} 3 = 4.77 \text{dB}$  となる。このため位相進み補償を追加するとゲイン交差角周波数は補償なしの場合に比べて増加し、ちょうど  $4.77 \text{dB}$  増える点を、補償後のゲイン交差角周波数とする。補償なしのボード線図でゲインが  $-4.77 \text{dB}$  の角周波数  $\omega_m$  を見つけると、 $\omega_m = 4.1$  が得られる（精密な図か数値計算がないと精度は悪いが）。(10-20)より、

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_m} = \frac{1}{\sqrt{3} \times 4.1} = 0.141 \quad (10-25)$$

この結果、 $\alpha T = 3 \times 0.141 = 0.423$  だから、位相進み補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = 10 \frac{0.423s + 1}{0.141s + 1} \quad (\text{補償あり①}) \quad (10-26)$$

この場合を補償あり①として図 10-7 に示している。図より、ゲイン交差角周波数は 4.1 であるが、位相余裕は  $43.6$  度しかない。 $18$  度  $+ 30$  度より小さくなったのは、最終的なゲイン交差角周波数が補償なしの場合より増えたため、補償なしの位相が  $18$  度より低下したためである。

(10-24)で、 $\phi_m = 60^\circ$  として、同様に設計した位相進み補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = 10 \frac{0.622s + 1}{0.045s + 1} \quad (\text{補償あり②}) \quad (10-27)$$

この場合のボード線図を補償あり②として図 10-7 に示した。このときゲイン交差角周波数は 6.1 であり、位相余裕は  $69$  度である。

フィードバック制御系の  $r(t) = 1$  に対する各場合のステップ応答を図 10-8 に示す。

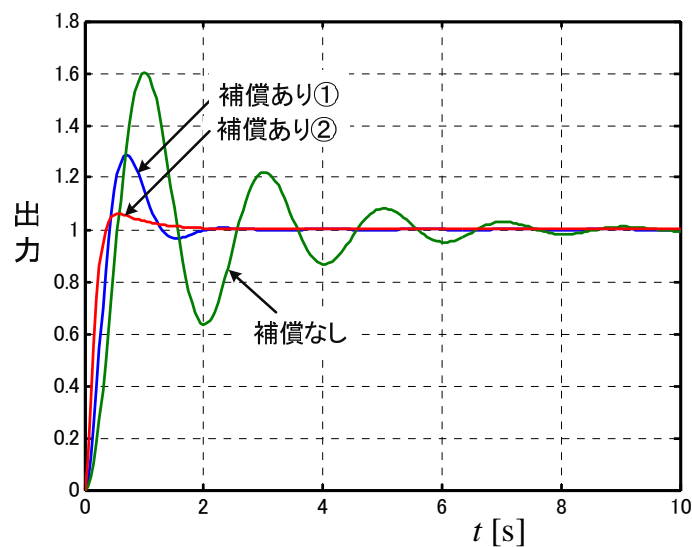


図 10-8 図 10-6 のステップ応答

補償あり②の場合は、ゲイン交差角周波数が最も高いので立ち上がり時間が短く、位相余裕が大きいのでオーバーシュートも小さい。 $\phi_m$ を変えて数回設計を行うと希望する位相余裕の制御器が得られる。図中の“補償なし”は $C(s)=10$ の比例制御の場合である。

## ○ 位相遅れ補償

まず、位相遅れ要素のボード線図の略図を描く。

$$C(j\omega) = K_c \frac{\alpha(j\omega T + 1)}{j\omega\alpha T + 1} = \begin{cases} K_c\alpha & : \omega T < \omega\alpha T < 1 & (\omega < 1/(\alpha T)) \\ 1/(j\omega T) & : \omega T < 1 < \omega\alpha T & (1/(\alpha T) < \omega < 1/T) \\ K_c & : 1 < \omega T < \omega\alpha T & (1/T < \omega) \end{cases}$$

と近似して、ボード線図が図 10-9 のように描ける。

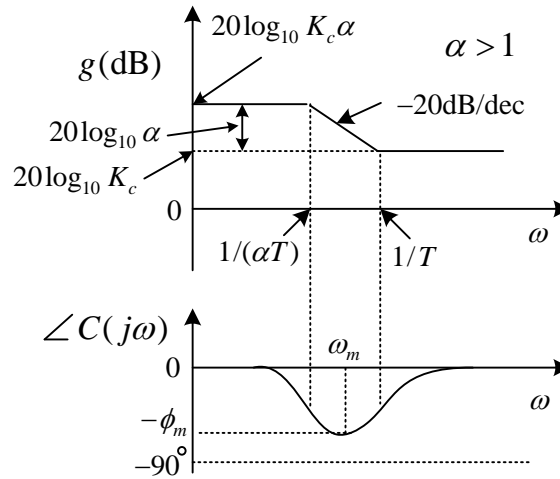


図 10-9 位相遅れ要素のボード線図

図 10-9 で、位相が最小となる点を求める。

$$\angle C(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) - \angle(1 + j\omega\alpha T) = \tan^{-1} \omega T - \tan^{-1} \omega\alpha T \quad (10-28)$$

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{\alpha T}{1 + (\omega\alpha T)^2} = 0 \quad \text{より}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}, \quad \phi_m = \tan^{-1} \sqrt{\alpha} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -\angle C(j\omega) > 0 \quad (10-29)$$

$\tan \phi_m$  を計算すると

$$\tan \phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad \therefore \quad \sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (\phi_m > 0) \quad (10-30)$$

①  $1/T$  を補償前の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  の  $1/10$  程度に設計すると、補償前の位相余裕に余り影響を及ぼすことなく低周波領域でゲインを大きくでき定常特性が改善される。 $\alpha$  を大きく選ぶとその分ゲインが大きくなる ( $g$  が増加する部分が広がる)。た

だし、 $\alpha$ を大きく選ぶと $\phi_m$ （位相遅れ）が大きくなる。② 別の利用法としては、 $K_c < 1$ とし、交差角周波数を低くして位相余裕を増加させることも考えられる。

図 10-10 で①の場合につき位相遅れ補償の設計例を以下に示す。制御対象の伝達関数は位相進み補償などによりゲイン交差角周波数や位相余裕が適切に設計されており、これに影響を及ぼすことなく速度偏差定数  $K_v = 100$  とすることが設計仕様である。

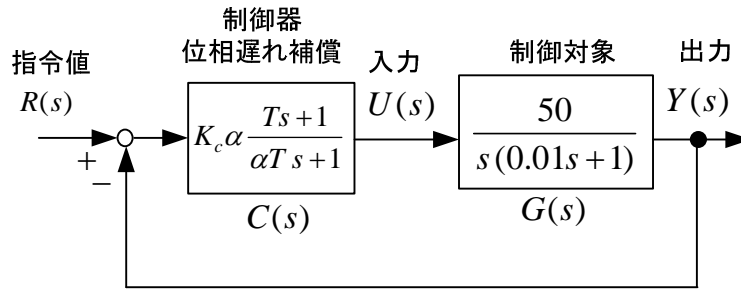


図 10-10 位相遅れ補償の設計例

一巡伝達関数は、次式与えられる。

$$G_0(s) = K_c \frac{\alpha(Ts + 1)}{\alpha Ts + 1} \frac{50}{s(0.01s + 1)} \quad (\alpha > 1) \quad (10-31)$$

ゲイン交差角周波数より高い周波数領域では、題意よりゲインは変えられないので  $K_c = 1$  でなければならない。速度偏差定数  $K_v$  が 10 になるように  $\alpha$  を設計する。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0 = 50K_c\alpha = 100 \quad (10-32)$$

これから、 $\alpha = 2$  が得られる。

次に、制御対象  $G(s)$  のボード線図を描くと、図 10-11 の補償なし ( $C(s) = 1$  の比例制御に相当) が得られる。ゲイン交差角周波数  $\omega_c = 45.5$ ，位相余裕 65.5 度である。ボード線図やこれらの値は、市販のソフトウェア Matlab が利用できる。  $1/T$  を補償前の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  の 1/10 に設計すると、

$$\frac{1}{T} = \frac{45.5}{10} \quad \therefore T = 0.22$$

この結果、位相進遅れ補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = \frac{2(0.22s + 1)}{0.44s + 1} \quad (\text{補償あり}) \quad (10-33)$$

この場合の  $G_0(s)$  を補償ありとして図 10-11 に示している。図より、補償前のゲイン交差角周波数や位相余裕にほとんど影響を及ぼすことなく、低周波領域のゲインが増加している。なお、低周波領域で位相の遅れは大きくなっているが線形システムである限り安定性に問

題はない。比較のため、図 10-11 には制御対象のゲインを 2 倍した  $2G(s)$  ( $C(s)=2$  の比例制御に相当) のボード線図も示している。補償前に比べると、位相は同じで、ゲインのみ 6dB 増加している。位相遅れ補償のゲインは、高周波では補償なしの  $G(s)$ 、低周波では  $2G(s)$  と重なる。

フィードバック制御系の  $r(t)=1$  に対する各場合のステップ応答を図 10-12 に示す。補償なしに比べて、位相遅れ補償後は定常値に速く収束していることが判る。 $C(s)=2$  の比例制御の場合には、ゲイン交差角周波数が高くその分位相余裕は減少するので、速く立ち上がるが、オーバーシュートが大きくなっている。

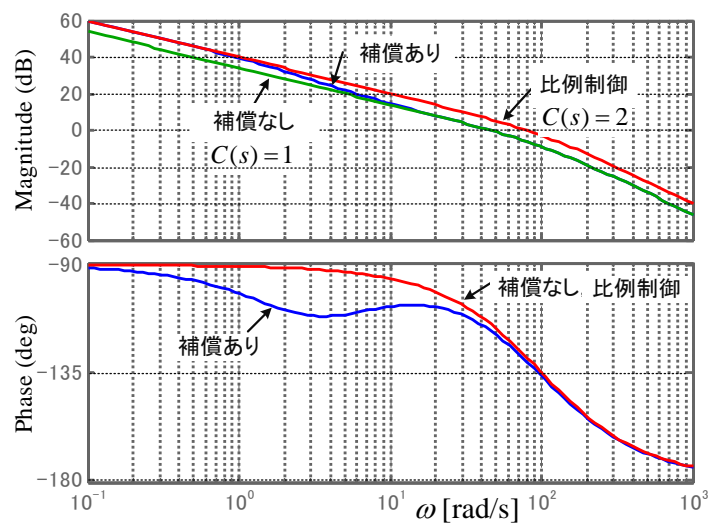


図 10-11 図 10-10 の一巡伝達関数  $G_0(s) = C(s)G(s)$  のボード線図

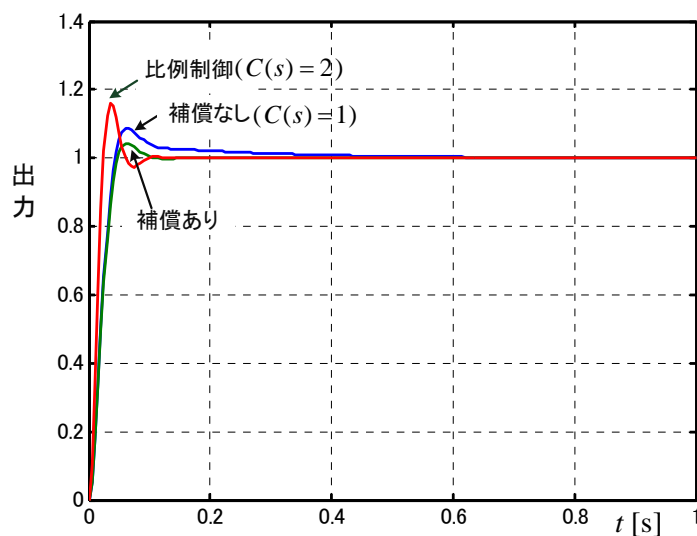


図 10-12 図 10-10 のステップ応答

## ○ PID 補償

比較のため、まず P 制御（比例制御）のボード線図を図 10-13 に示す。比例制御は周波数に無関係に一定だから、ゲイン  $g$  は一定値であり、位相  $\angle G(j\omega)$  は 0 である。

PI 制御（比例積分制御）の場合には、

$$C(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{jT_I \omega}\right)$$

$$= \begin{cases} K_p / (jT_I \omega) & : \omega < 1/T_I \\ K_p(1-j) & : \omega = 1/T_I \quad (\text{折点角周波数}) \\ K_p & : \omega > 1/T_I \end{cases} \quad (10-34)$$

となる。周波数が低い領域では、積分制御となりゲインは  $\omega \rightarrow 0$  で無限大となる。すなわち直流信号に対しては PI 制御器の出力はいくらでも大きくなり、このことでステップ応答の定常偏差が 0 となる。しかし、位相は遅れるので、位相余裕が低下する原因をもつ。折点角周波数は  $\omega = 1/T_I$  で、実部と虚部を等しいと置くことで求まる。ゲインは、

$$g = 20 \log_{10} |C(j\omega)| = 20 \log_{10} |K_p(1-j)| = 20 \log_{10} K_p + 10 \log_{10} 2$$

$$\approx 20 \log_{10} K_p + 3 \quad (10-35)$$

となり、図の折れ線近似より約 3dB 増加する。このとき、位相は -45 度となる。これより周波数が高い領域では積分項は無視できて、P 制御となり、ゲインは一定で位相遅れもなくなる。PI 制御は、位相遅れ補償に比べて  $\omega = 0$  でゲインが無限大になる利点があり、制御対象に  $1/s$  が含まれていない場合その効果を発揮する。

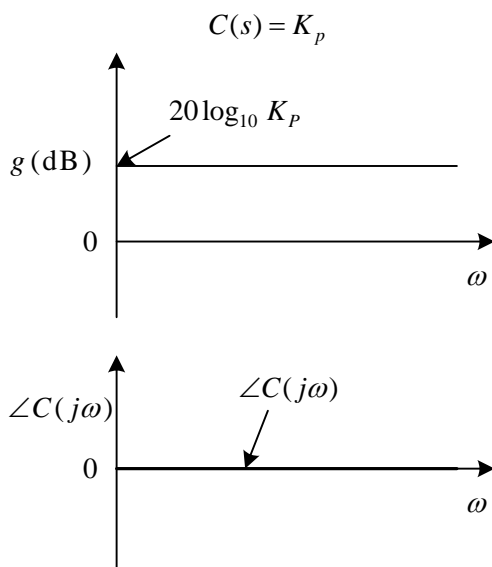


図 10-13 比例 (P) 制御のボード線図

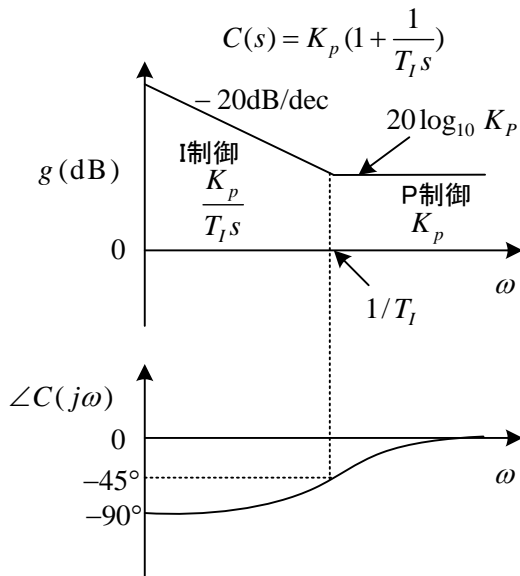


図 10-14 比例積分 (PI) 制御のボード線図



PID 制御の伝達関数は、 $T_D \ll T_I$  とすると周波数領域によって次のように近似できる。

$$C(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{jT_I \omega} + jT_D \omega \right) = \begin{cases} K_p / (jT_I \omega) & : \omega < 1/T_I \\ K_p (1 - j) & : \omega = 1/T_I \\ K_p & : 1/T_I < \omega < 1/T_D \\ K_p (1 + j) & : \omega = 1/T_D \\ jK_p T_D \omega & : 1/T_D < \omega \end{cases} \quad (10-36)$$

このとき、折れ線近似したボード線図を図 10-15 に示す。PI 制御に比べ、周波数の高い領域で微分器として働き、ゲインが増加し位相が 90 度まで進む。微分特性は制御対象の遅れを打ち消し、-40dB/dec の特性を部分的に -20dB/dec にしたいときに利用する。しかし、高周波領域でゲインを大きくすることは、ノイズの影響を受けやすくなるので、センサのノイズ特性、配線方法、電磁的環境などを考慮に入れる必要がある。従って、実際には必要以上に高周波でゲインを大きくしないため、不完全微分が用いられる。この場合の伝達関数は、次式で与えられる。

$$C(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{jT_I \omega} + \frac{jT_D \omega}{1 + j\eta T_D \omega} \right) \quad (10-37)$$

ここで、 $1/\eta$  は通常 1~10 程度が選ばれる。この場合のボード線図を図 10-16 に示す。純粋な PID 制御に比べ、高周波領域でゲインが一定となり P 制御の特性となる。

PID 制御は、位相進み-遅れ補償と類似の特性改善が可能となる。すなわち、低周波領域の定常特性改善とゲイン交差角周波数付近での安定性改善である。制御対象に積分器が含まれていない 0 型の制御対象では、位相進み-遅れ補償はステップ応答の定常偏差を 0 にできないが、PID 制御では 0 にできる利点がある。

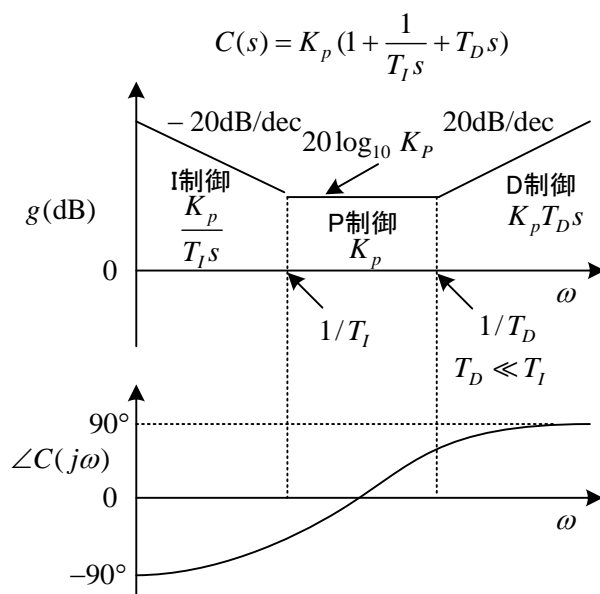


図 10-15 比例積分微分 (PID) 制御のボード線図

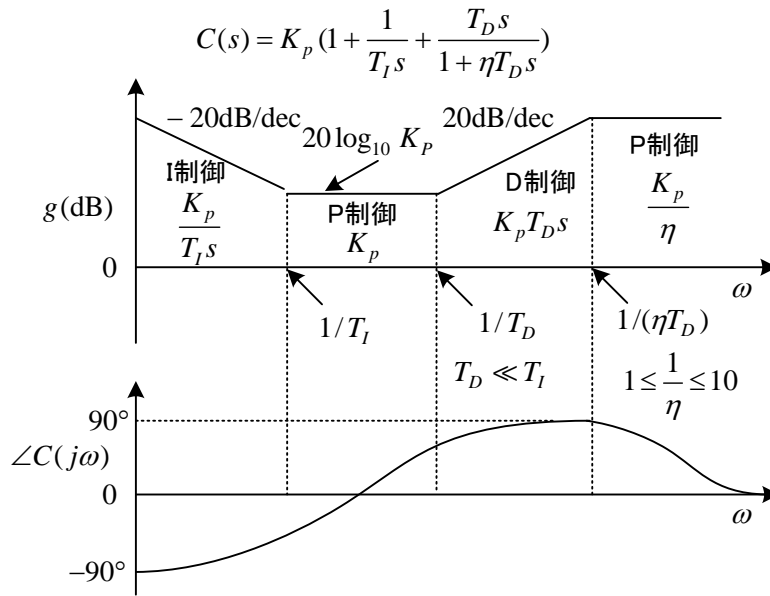
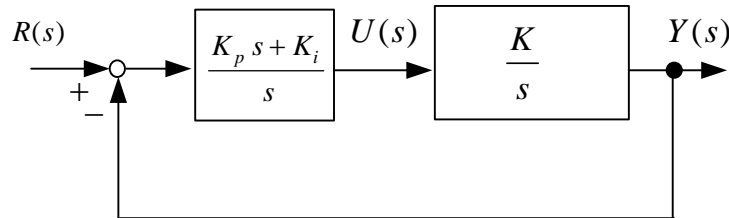


図 10-16 不完全微分を用いた比例積分微分 (PID) 制御のボード線図

(問題 10-2) 図の制御系で、ゲイン交差角周波数が  $\omega_c$ 、位相余裕が  $\phi$  となるように、PI 制御器の比例ゲイン  $K_p$  と積分ゲイン  $K_i$  を設計せよ。



(解) 一巡伝達関数は  $G_0(s) = \frac{K(K_p s + K_i)}{s^2}$   $\therefore G_0(j\omega) = \frac{K(j\omega K_p + K_i)}{(j\omega)^2}$

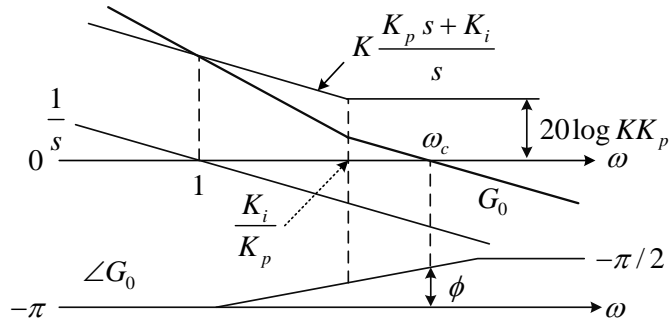
ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  なので  $|G_0(j\omega_c)| = \frac{K\sqrt{(K_p \omega_c)^2 + K_i^2}}{\omega_c^2} = 1$  より

$$\omega_c^4 - (K K_p)^2 \omega_c^2 - (K K_i)^2 = 0 \quad \text{①} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{(K K_p)^2 + \sqrt{(K K_p)^4 + 4(K K_i)^2}}{2}} \quad \text{②}$$

位相余裕  $\phi$  は、 $\phi = \angle G_0(j\omega_c) + \pi$   $\therefore \phi = \tan^{-1} \frac{K_p \omega_c}{K_i}$   $\therefore K_p = \frac{K_i}{\omega_c} \tan \phi$  ③

③を①に代入し  $K_i$  を求めると

$$K_i = \frac{\omega_c^2}{K} \frac{1}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \quad \text{③より} \quad K_p = \frac{\omega_c}{K} \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}}$$



## 10.5 2 自由度制御系

これまで、図 10-17 に示す制御器（この形を直列補償要素という）について考えてきた。この形は 1 自由度制御系と呼ばれ、(10-1), (10-2) に述べたように、目標値追従特性と外乱抑圧特性は独立に設計できない。このとき、ゲイン交差角周波数を高く設計すると、外乱抑圧には適するが、ステップ応答に大きなオーバーシュートが生じるといった問題が生じることが考えられる。

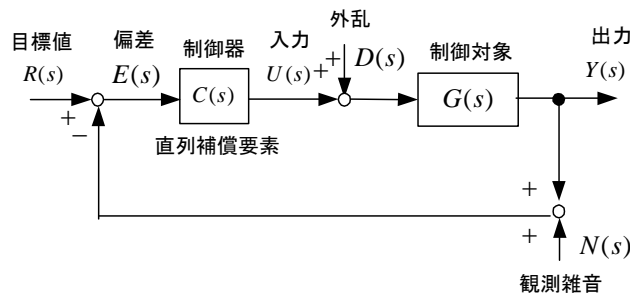


図 10-17 1 自由度制御系

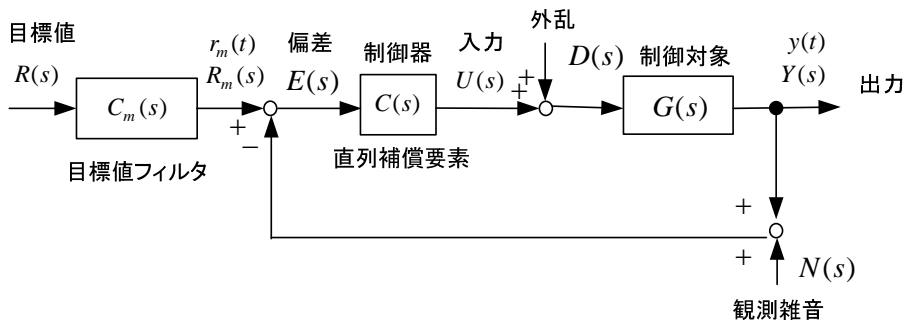


図 10-18 2 自由度制御系（目標値フィルタ形）

図 10-18 に 2 自由度制御系と呼ばれる制御器の構成の一例を示す。図の制御器は、直列補償要素の他に、目標値フィルタと呼ばれるものからなる。大雑把に言うと、外乱を抑制するように  $C(s)$  を設計し、目標値フィルタで比較的ゆっくり変化する指令値  $r_m(t)$  を作り、出力  $y(t)$  をそれに追従させる。図 10-17 でも指令値を  $r_m(t)$  で与えれば同じでことある。

例えば、目標値フィルタ  $C_m(s)$  を一次のローパスフィルタとすると、

$$C_m(s) = \frac{1}{1+sT} \quad (10-38)$$

と書ける。このとき、目標値のステップ変化に対し、 $r_m(t)$  は図 10-19 のようになる。

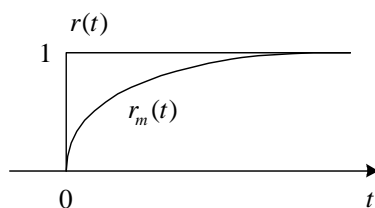


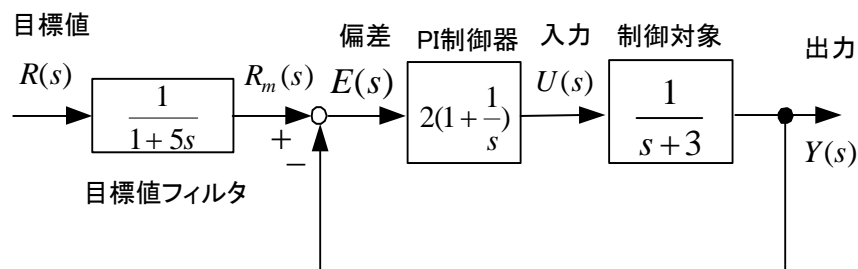
図 10-19 目標値フィルタの出力

目標値に対する出力の閉ループ伝達関数は、

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C_m CG}{1+CG} \quad (10-39)$$

となり、 $C_m$  により応答が変えられる。ただし、制御系の安定性は、特性方程式で決まるから、 $C_m$  によってそれを変えることはできない (不安定な系を安定にすることはできない)。もちろん、 $C_m$  自身は安定な伝達関数 (右半平面に極がない) でなくてはならない。

(問題 10-3) 図の 2 自由度制御系は安定な制御系かどうか判定せよ。



(解) 特性方程式の根は  $s = -\frac{1}{5}, \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$  だから安定である。

(このように、目標値フィルタの伝達関数は元々の特性方程式に影響を与えない)

図 10-20 は目標値フィードフォワード形の 2 自由度制御系である。素早く目標値に追従させる

ため制御対象  $G(s)$  の逆システムを  $C_2(s) = 1/G(s)$  で作り、誤差部分をフィードバックで補償する (文献 (19))。ただ、 $C_2(s)$  は微分器動作になるため、 $C_3(s)$  により目標値応答を指定する。この結果  $C_3(s)C_2(s)$  は微分動作にはならないだろう。安定性や外乱に対する応答は  $C_1(s)$  だけで決る。

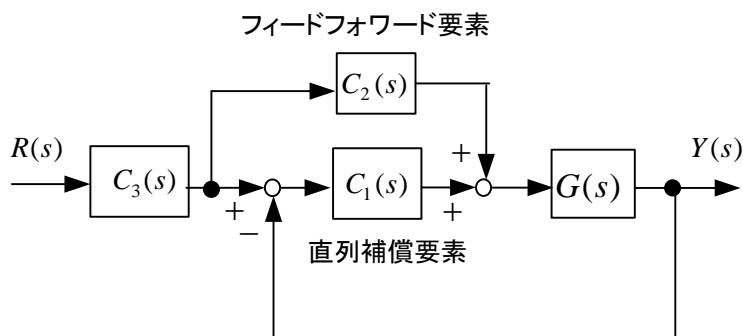


図 10-20 2 自由度制御系 (目標値フィードフォワード形)

図 10-18 と図 10-20 が等価となる条件を求めてみよう。図 10-20 で、加え合わせ点を移動して、図 10-21 の等価ブロック図を得る。

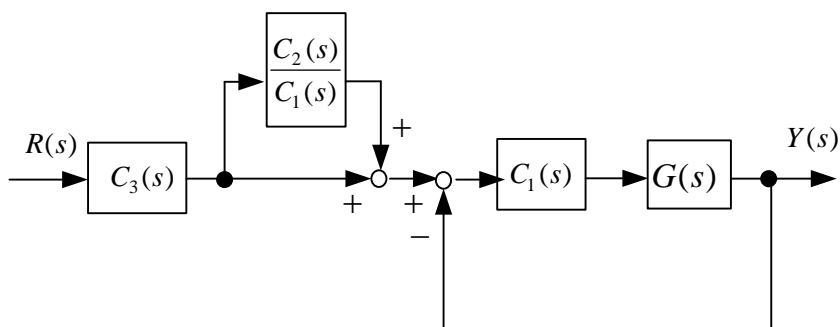


図 10-21 図 10-20 の等価ブロック図

これから、次式が成立すれば、両者は等価である。ただし、図 10-20 には明確な設計思想がある。

$$C_m(s) = C_3(s) \left( 1 + \frac{C_2(s)}{C_1(s)} \right) \quad (10-40)$$

$$C(s) = C_1(s) \quad (10-41)$$

簡単な例を使って、**フィードフォワード制御**( feedforward control)について改めて考えてみよう。図 10-22 (a)は、電流を  $i = i^*$  と制御するため、フィードフォワード制御を行った制御系である。このブロック図は(b)となる。このとき、伝達関数は  $I(s)/I^*(s) = 1$  となり、瞬時に電流が制御できそうである。つまり、フィードバック制御なしで電流が制御できる。

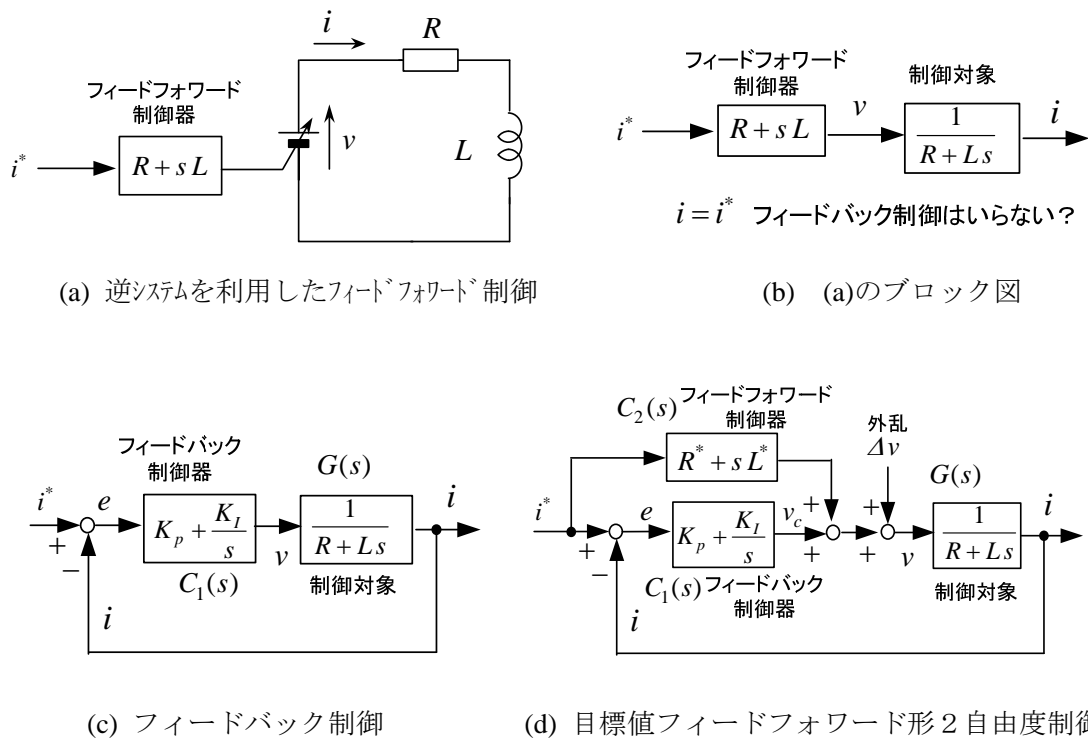
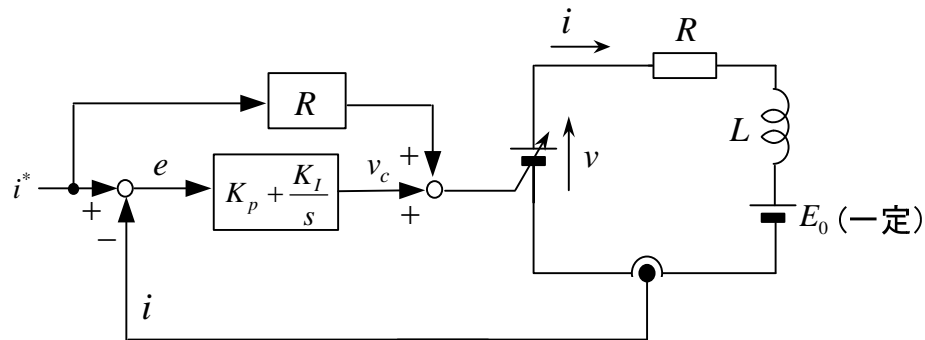


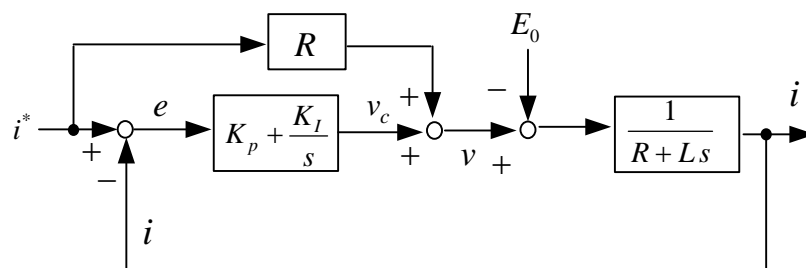
図 10-22 フィードバック制御とフィードフォワード制御

しかし、実際にはうまく制御することは困難である。理由は、抵抗は温度や電流の大きさで値が変化すること、インダクタンスは飽和することがあり厳密には電流の関数であること、電源電圧の精度や最大値に限界があることなどである。このために、実際には、図(c)のフィードバック制御が良く使われている。(d)は目標値フィードフォワード形の2自由度制御である。(b)と(c)を組み合わせた構造になっている。制御器で使う抵抗やインダクタンスは実際と違うので、\*印をつけている。(d)の場合、制御対象のパラメータ変化や外乱をフィードバック制御器  $C_1(s)$  が分担している。仮に、 $R^* = R, L^* = L$ 、外乱  $\Delta v = 0$  であれば、 $v_c = 0$  となって、 $C_1(s)$  の働きはブロック図で考える限りなくなる。(c) に比べて(d)の方が、電流の応答は速くなると考えられる。しかし、電流指令  $i^*$  を急に変化させると、その微分が非常に大きくなって、入力電圧  $v$  も非常に大きな値となる。現実には入力電圧  $v$  には限界があるから、制御器にリミッタを設けて入力電圧を制限するか図 10-20 の  $C_3(s)$  を導入する。この結果、電流の高速応答が制限される。そうすると、ゲインを大きく選んだ場合の(c)の特性と大差がなくなる可能性もある。ただし、(c)は(d)に含まれており、目標値フィードフォワード形は、目標値応答と外乱除去を考えた設計法と見ることができよう。

(問題 10-4) 図は目標値フィードフォワード形の P I 制御系である。電流の指令値  $i^*$  が一定値であるとき、定常状態での、実際の電流  $i$ 、偏差  $e$ 、P I 制御器の出力  $v_c$ 、P I 制御器の中にある積分器の出力  $v_i$ 、電源電圧  $v$  を求めよ。ただし、回路の中の直流電源  $E_0$  (外乱とする) は一定で、 $v = v_c + Ri^*$  である。また、制御システム全体のブロック図を書け。さらに、P I 制御器が P 制御である場合、定常状態での、実際の電流  $i$ 、偏差  $e$ 、P 制御器の出力  $v_c$ 、電源電圧  $v$  を求めよ。



(解) PI 制御の場合： P I 制御の積分器の働きで、電流指令が一定の定常状態では  $i = i^*$  となる。よって、 $e = 0$  となる。また定常状態では電流が一定なのでコイルの電圧は 0 となる。従って回路の式から  $v = Ri^* + E_0$  となる。 $v = Ri^* + v_c$  なので、 $v_c = E_0$  となる。



ブロック図から定常値を求める場合には、指令値や外乱が一定なら  $s = 0$  とおくことで得られる。これは微分が 0 に対応する。積分器の項が  $\infty$  となるが、 $v_c$  が有限であるためには  $e = 0$  と考えればよい。このとき  $i = i^*$  である。P I 制御器の中にある比例制御の出力は 0 であるから、積分器の出力  $v_i = E_0$  となる。

P 制御の場合：ブロック図で  $s = 0$  と置いて求める。

ブロック図より  $\frac{K_p(i^* - i) + Ri^* - E_0}{R} = i$  だから

$$i = i^* - \frac{E_0}{R + K_p}, \quad e = \frac{E_0}{R + K_p}, \quad v_c = \frac{K_p E_0}{R + K_p}, \quad v = Ri^* + \frac{K_p E_0}{R + K_p}$$

比例制御では偏差  $e$  は 0 にならない。

# 第 11 章 制御系の設計 II

本章では、工場の生産ライン、家電製品、工作機械、ロボット、エレベータ、電車、電気自動車などの制御に利用される電動機制御系の設計と温度や圧力等を制御するプロセス制御の設計および電子回路である PLL 周波数シンセサイザの設計について述べる。

## 11.1 電動機制御系の設計

### (1) モータの速度制御系の構成

DC モータはトルクを発生し、その大きさは電流に比例する。そこで、まず電流をきちんと制御して、その上で速度を制御することを考える。制御の演算は一般にマイクロコンピュータで行われ、その出力である電圧指令を電力変換器で増幅して実際の電圧を作りモータに加える。一般に、電力変換器は単純な比例要素と考えられるので、この部分は電流制御器の一部としてとらえる。なお、交流モータでも同様の設計が可能である。

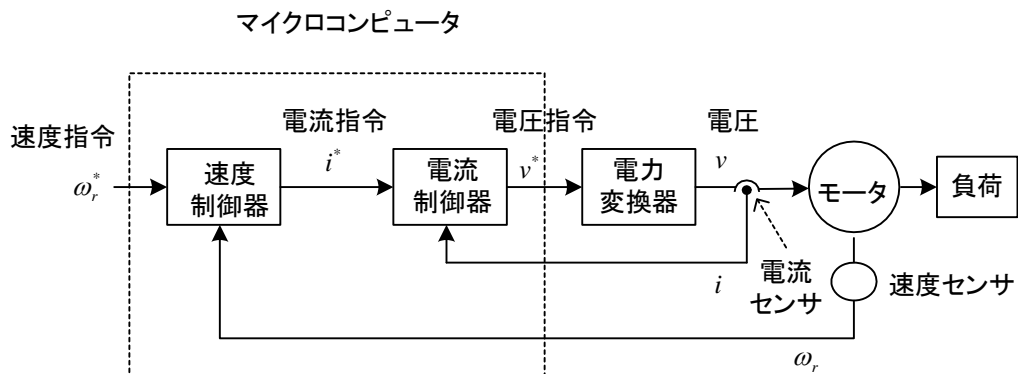


図 11-1 モータの速度制御系

### (2) 電流制御器の設計

電流制御器の設計法について述べる。制御対象のモータは、その電気回路をインダクタンスと抵抗の直列回路として考えることにする。このときのブロック図を図 11-2 に示す。

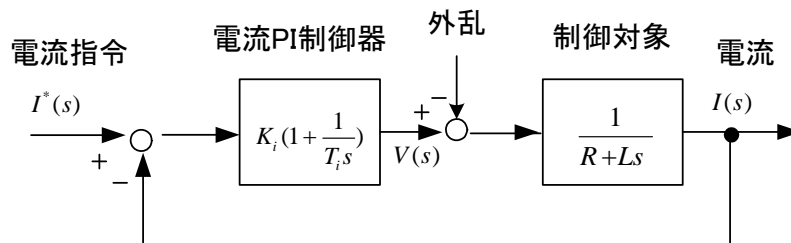


図 11-2 電流制御系のブロック図



モータの誘導起電力は外乱とみなしている。線形システムだから外乱は 0 と考えて設計する。電流制御器としては、PI 制御器を用いることとする。図で、一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{1}{R + Ls} = K_i \frac{T_i s + 1}{T_i s} \frac{1}{R(1 + (L/R)s)} \quad (11-1)$$

となる。いま、

$$T_i \equiv L/R \quad (11-2)$$

と設計すると、(11-1)より極と零点が相殺して（安定な極と零点の相殺は問題ない）

$$G_o(s) = K_i / (T_i R s) = K_i / (L s) \quad (11-3)$$

の積分特性となる。このとき、ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  は  $|G_o(j\omega)|=1$  より次式となる。

$$\omega_c = K_i / L \quad (11-4)$$

この場合の電流制御の閉ループ伝達関数を求めると次式となる。

$$\frac{I}{I^*} = \frac{K_i / (Ls)}{1 + K_i / (Ls)} = \frac{K_i}{Ls + K_i} \equiv \frac{1}{T_{eq}s + 1} \quad (11-5)$$

$$\text{ただし、} T_{eq} = L / K_i = 1 / \omega_c$$

このとき、閉ループ伝達関数の折点角周波数は  $\omega_c$  と一致する。

設計法としては、ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  を決めて、(11-2)より  $T_i$ 、(11-4)より  $K_i$  を求めればよい。 $R = 1.3\Omega$ 、 $L = 0.0098\text{H}$  の場合、 $\omega_c = 1000\text{rad/s}$  に設定すると、

$$K_i = L\omega_c = 0.0098 \times 1000 = 9.8, T_i = \frac{L}{R} = \frac{0.0098}{1.3} = 0.00754 \quad (11-6)$$

となる。 $\omega_c$  を種々設定した場合の一巡伝達関数のボード線図を図 11-3 に示す。

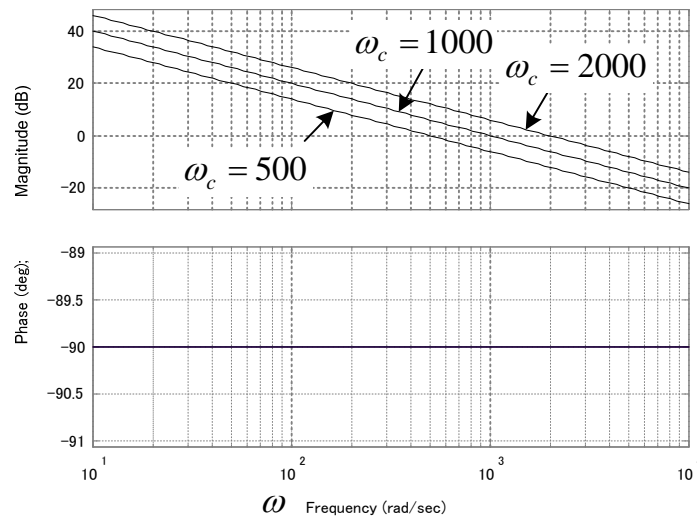


図 11-3 一巡伝達関数 ((11-3) 式) のボード線図

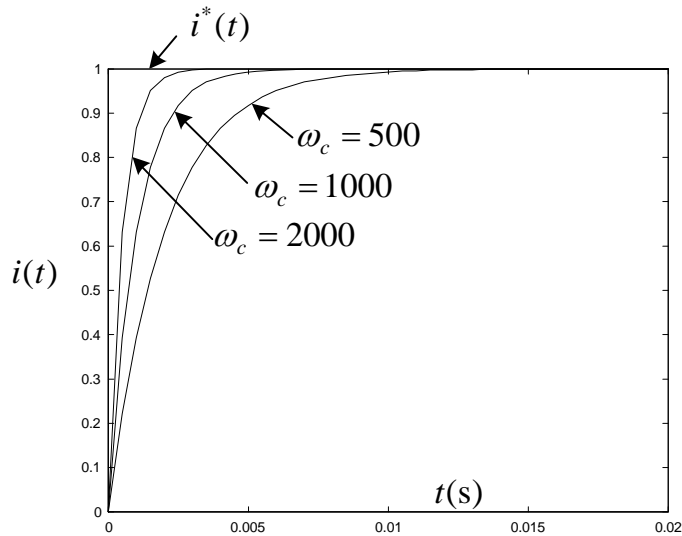


図 11-4 ステップ応答 ((11-5) 式)

また、図 11-4 は図 11-3 の  $\omega_c$  の設定値に対応した閉ループ系のステップ応答である。 $\omega_c$  を大きく設定するほど、速応性にすぐれていることが判る。 $\omega_c$  を大きく設定すると、(11-6) より PI 制御のゲイン  $K_i$  は大きな値となる。実際には、電圧を作る電力変換器の容量と性能、ノイズの問題、デジタル制御の問題などで  $\omega_c$  には上限がある。

### (3) 速度制御器の設計

次に、速度 PI 制御器の設計法について述べる。電流制御系が(11-5)で与えられるとき、速度制御系のブロック図は図 11-5 のように表せる(文献(7))。

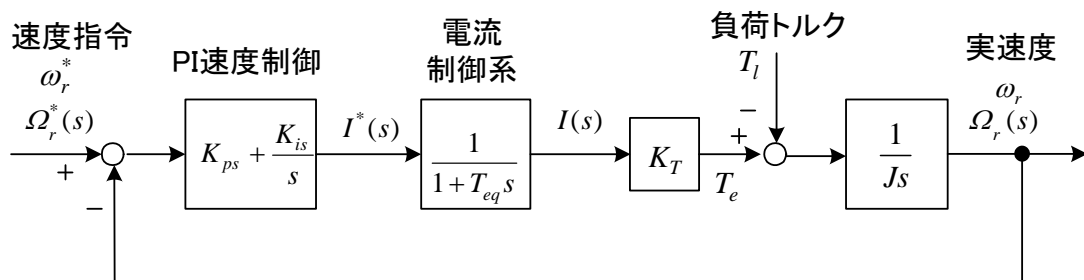


図 11-5 速度制御器設計のためのシステムのブロック図

DC モータの発生トルクは電流に比例し、次式で与えられる。なお DC モータについては例題 3-6 を参照のこと。

$$T_e = K_T i \tag{11-7}$$

このブロック図より速度制御系の一巡伝達関数は次式で表せる。

$$G_o(s) = \left(K_{ps} + \frac{K_{is}}{s}\right) \frac{1}{1+T_{eq}s} \frac{K_T}{Js} \quad (11-8)$$

これを基に、PI速度制御系を設計するためのボード線図を図11-6に示す(文献(7))。

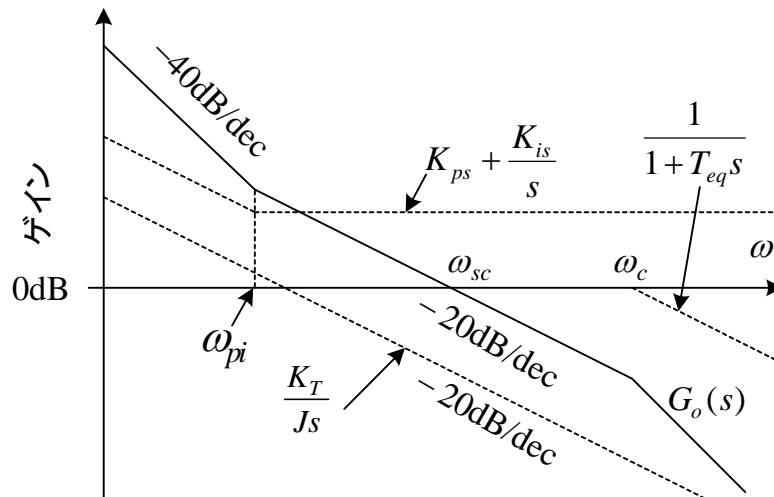


図11-6 PI速度制御系の一巡伝達関数  $G_o(s)$

設計の基本的考え方として、速度制御系のゲイン交差角周波数  $\omega_{sc}$  付近では、 $-20\text{dB/dec}$  の特性を持つようにして安定性を確保する。これは $-20\text{dB/dec}$  の特性が長く続けば位相遅れが90度近くになり、180度に達しないので不安定とはならないからである。速度制御系の  $\omega_{sc}$  が電流制御系の折れ点角周波数  $\omega_c = 1/T_{eq}$  に近いとオーバシュートを生じやすくなるため、 $\omega_c$  は  $\omega_{sc}$  より数倍高く設計する。このため、 $\omega$  が  $\omega_{sc}$  付近では、電流制御の伝達関数は1と考えてよい。また、PI制御の折れ点角周波数  $\omega_{pi}$  は、 $s = j\omega$  とおき実部と虚部が等しいと置くことで、

$$\omega_{pi} = K_{is} / K_{ps} \quad (11-9)$$

であるが、 $\omega_{sc}$  において $-20\text{dB/dec}$  の傾きを確保するためには、 $\omega_{pi}$  は  $\omega_{sc}$  の1/5以下にする。この結果、 $\omega_{sc}$  付近ではPI制御の伝達関数は  $K_{ps}$  で電流制御系の伝達関数は1である。従って、交差角周波数  $\omega_{sc}$  は以下のように求まる。

$$\left| \frac{K_T K_{ps}}{J j\omega_{sc}} \right| = 1 \quad \therefore \omega_{sc} = \frac{K_T K_{ps}}{J} \quad (11-10)$$

従って、PI速度制御器の比例ゲインは、 $\omega_{sc}$  を与えて

$$K_{ps} = \frac{J\omega_{sc}}{K_T} \quad (11-11)$$

とする。積分ゲインは、

$$\omega_{pi} \leq \omega_{sc} / 5 \tag{11-12}$$

のように  $\omega_{pi}$  を選んで、(11-9)より次式で設計する。

$$K_{is} = \omega_{pi} K_{ps} \tag{11-13}$$

$\omega_{sc}$  の目安としては、サイリスタレオナード速度制御系で 30rad/s が限界、誘導モータの可変速ドライブで 50rad/s 以上（速度範囲 1:100 以上）、誘導モータのサーボシステムで 200rad/s 以上と言われている。また、800W の PM 同期モータのサーボシステムを 500rad/s で設計した例もある。また、電流制御については、PWM 制御のキャリア周波数が 10kHz (IGBT 使用) の場合に、 $\omega_c = 2000 \text{ rad/s}$  とした例がある。

次に、具体的に(11-8)の一巡伝達関数のボード線図を描き、さらに速度指令のステップ変化に対する応答を計算して、制御パラメータの影響を調べてみよう。図 11-6 の角周波数  $\omega_{pi}, \omega_{sc}, \omega_c$  の3つの値をいろいろと変えてみる。 $K_{ps}, K_{is}$  はそれぞれ(11-11), (11-13)で設定する。また、トルク定数  $K_T = 0.926 \text{ Nm/A}$  , 慣性モーメント(モータ+負荷)  $J = 0.0126 \text{ kgm}^2$  としている。

図 11-7 は、ゲイン交差角周波数  $\omega_{sc}$  をパラメータとした場合のボード線図である。このとき速度指令  $\omega_r^* = 1$  に対する速度  $\omega_r$  のステップ応答を図 11-8 に示す。 $\omega_{sc}$  が大きいほど速応性に優れていることが判る。図 11-9, 図 11-10 は、 $\omega_{pi}$  を  $\omega_{sc}$  の 1/5 より大きく選んだ場合である。 $\omega_{pi} = \omega_{sc}$  の場合には位相余裕が小さくなり、応答に大きなオーバーシュートが見られる。これにより、(11-12)の条件が望ましいことが判る。

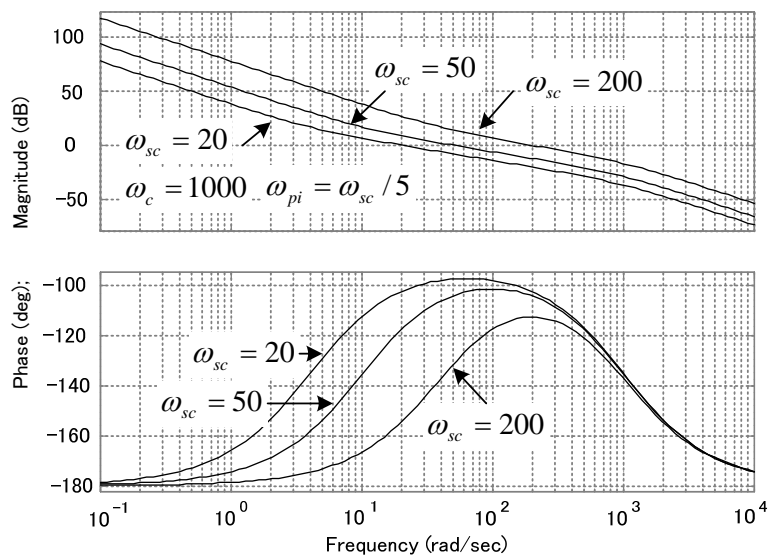


図 11-7 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

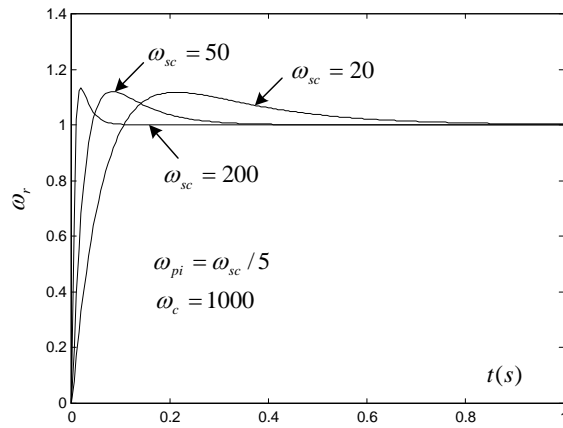


図 11-8 速度指令のステップ変化に対する応答

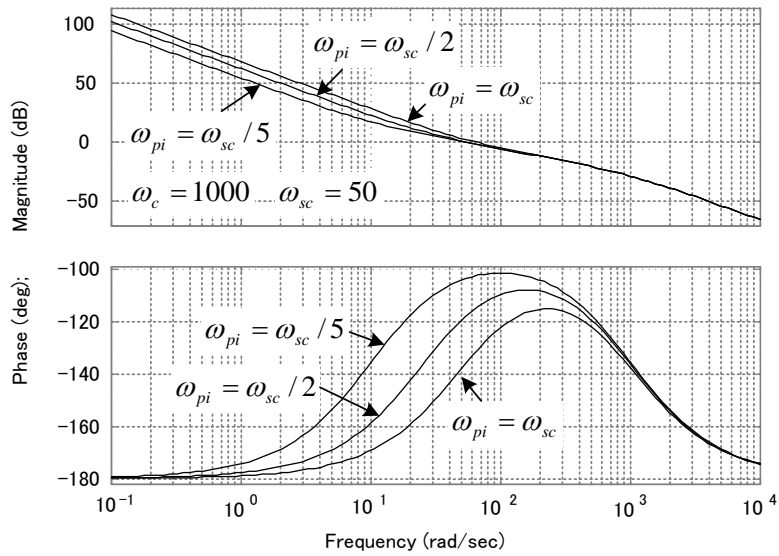


図 11-9 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

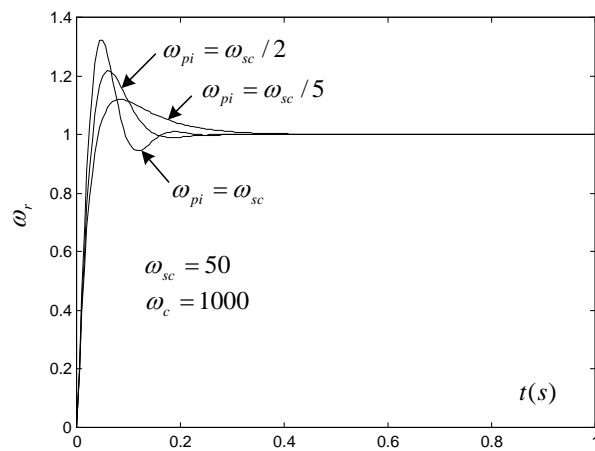


図 11-10 速度指令のステップ変化に対する応答

図 11-11, 図 11-12 は,  $\omega_c$  を  $\omega_{sc}$  の 1 倍, 2 倍, 20 倍と選んだ場合である。  $\omega_c = \omega_{sc}$  の場合には位相余裕が小さくなり, 応答に大きなオーバーシュートが見られる。これにより,  $\omega_c$  を  $\omega_{sc}$  の数倍以上に選ぶことが望ましいと言える。

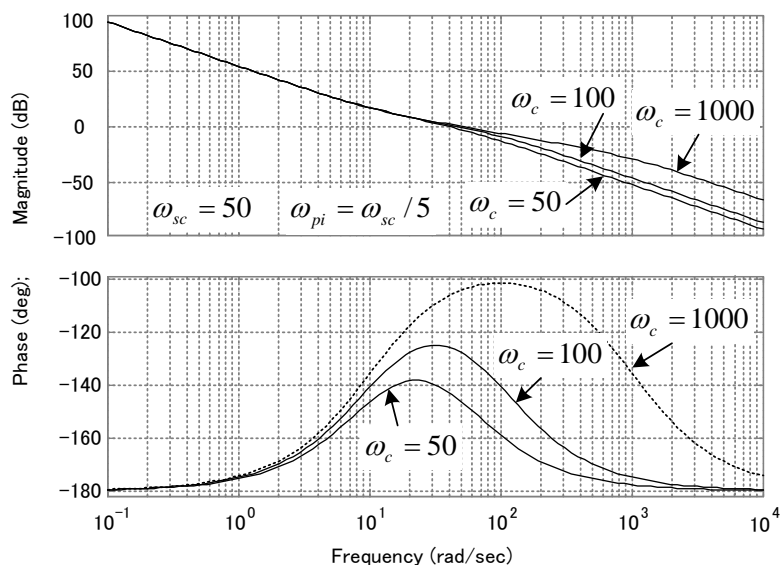


図 11-11 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

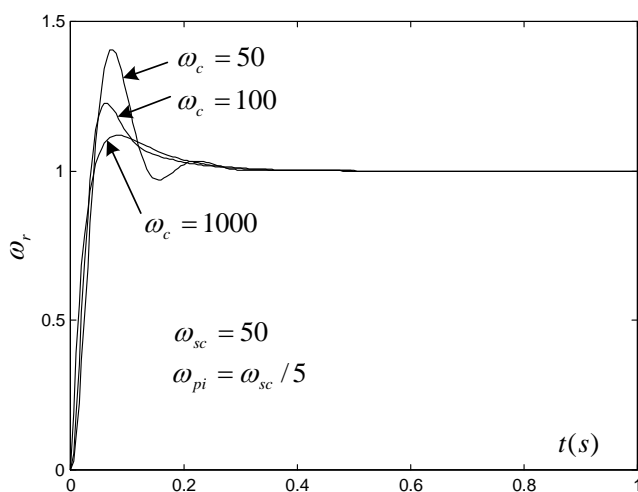


図 11-12 速度指令のステップ変化に対する応答

物体を動かしてその位置や姿勢を制御するフィードバック制御システムは一般に**サーボ系**(servo system)と言われる。サーボ系は速度制御ループの外側に位置制御ループを追加することで実現できる。ロボットや工作機械はサーボ系の代表的なものである。このときのシステム図を図 11-13 に示す。位置は速度の積分であり, 制御対象の中に積分器が含まれるので, 位置制御としては比例制御でもステップ応答に対し定常偏差を生じない。よって, 比例制御が良く用いられる。図 11-15 のように近似すると, 閉ループ伝達関数は 2 次遅れ要素

になるので、減衰係数（オーバシュートがないようにするには1以上）を与えて  $K_p$  が設計できる。図 11-14 で速度フィードバックを行うことは位相進み補償を行うことに匹敵する。

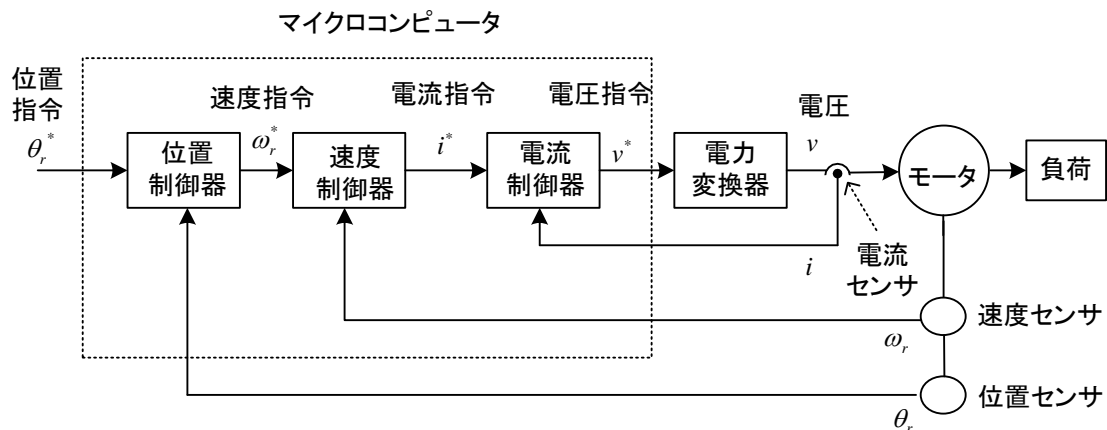


図 11-13 サーボ系の基本構成

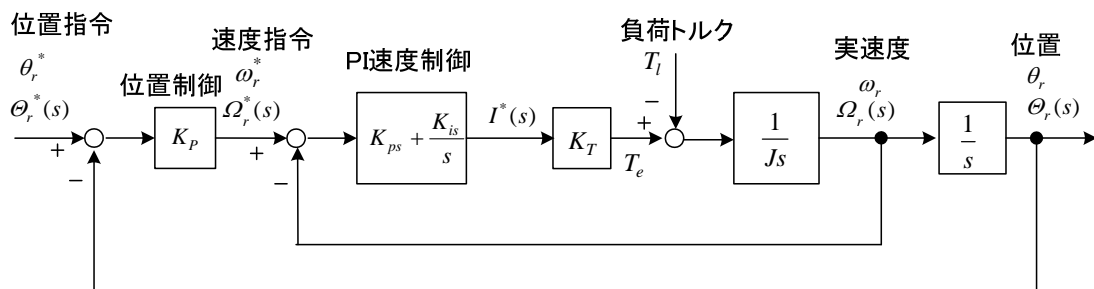


図 11-14 位置制御系のブロック図（電流制御系を理想的と考えた場合）

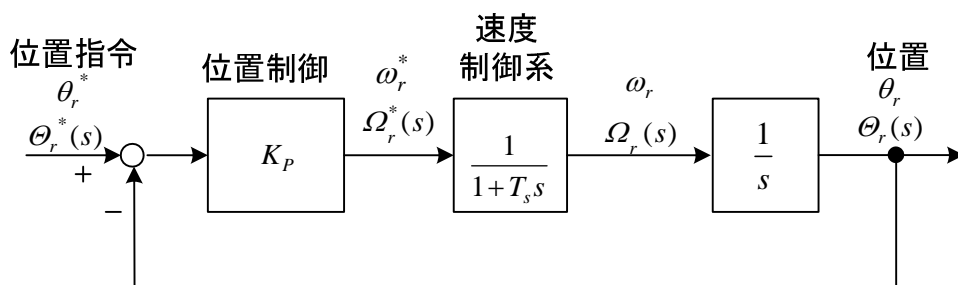


図 11-15 位置制御系の簡易ブロック図（速度制御系の一次遅れ近似）

## 11.2 プロセス制御系の設計

温度・圧力・流量・レベルなどの制御を行うプロセス制御系の設計法を述べる。制御対象の伝達関数を、

$$G(s) = e^{-Ls} \frac{A}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (11-14)$$

としたとき、どのような制御器が適するかを目安を図 11-16 に示す(文献(10))。なお、制御系は図 10-1 に示した構成とする。

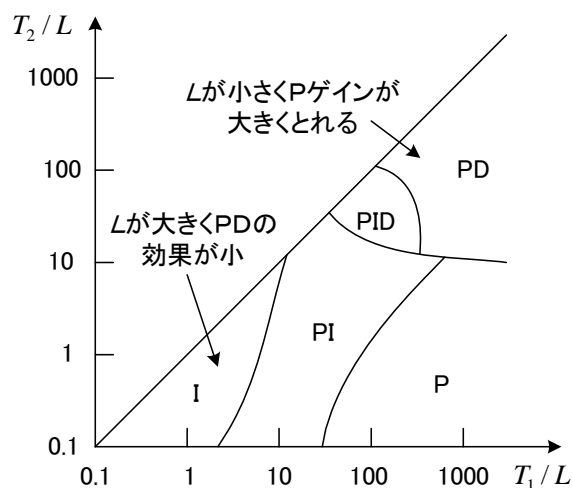


図 11-16 PID 制御器の選択基準

図中の制御器の代わりに、一般的な PID 制御器を用いても問題ないが、その分制御は複雑になる。図の意味は、それ以外の調節器があまり有効でないことを意味する。例えば、I の部分は、無駄時間の影響が大きく P や D の効果が期待できず、積分動作のみでもよい。

PID 制御の伝達関数を

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (11-15)$$

としたとき、制御パラメータの決定法は多く提案されているが、2つの方法を紹介する。

### (1) 限界感度法(ultimate sensitivity method)

ジューグラ(Ziegler)とニコルス(Nichols)が提案した方法で、まず P 制御だけを用いて  $K_p$  を少しずつ大きくする。安定限界に達して、閉ループ系が一定振幅の持続振動をしたときの比例ゲイン  $K_c$  と振動の周期  $T_c$  を求める。制御対象のモデルが得られていないことが多いので、実験により求めることになる。このとき、PID パラメータを表 11-1 のように決める。

表 11-1 限界感度法による PID パラメータ(文献(8)より)

	$K_p$	$T_I$	$T_D$
P 制御	$0.5K_c$		
PI 制御	$0.45K_c$	$0.83T_c$	
PID 制御	$0.6K_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$



## (2) ステップ応答に基づく方法

制御対象のステップ応答を実験により測定して、その波形から PID パラメータを決定する方法が幾つか提案されている。図 11-17 のようにステップ応答が観測されたとする。

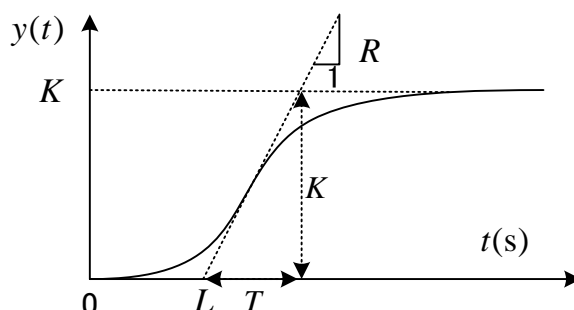


図 11-17 制御対象のステップ応答

立ち上がりの勾配が最も急になっている点で接線を引き、その傾きを  $R$ 、 $y=0$  との交点を  $L$  とする。また、定常値を  $K$  とする。Chien らは、行き過ぎなしで応答時間を最小にする表 11-2 のパラメータ決定法を提案している。

表 11-2 Chien らによる PID パラメータ (文献(8)より)

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P 制御	$0.3/(RL)$		
PI 制御	$0.35/(RL)$	$1.17T$	
PID 制御	$0.6/(RL)$	$T$	$0.5L$

この方法は、制御対象を

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-Ls} \quad \text{ただし, } T = K/R \quad (11-16)$$

で近似していることになる。(11-16)のステップ応答は、むだ時間部分を除くと、

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

で、傾きは  $y'(0) = K/T$  である。

## (3) 設計例

制御対象が

$$G(s) = \frac{1}{1+200s} e^{-20s}$$

で与えられるとする。よって、(11-16) で  $K=1, T=200, L=20$  であり、 $R=1/200$  となる。PI 制御器を用いた図 11-18 の制御系を考える。

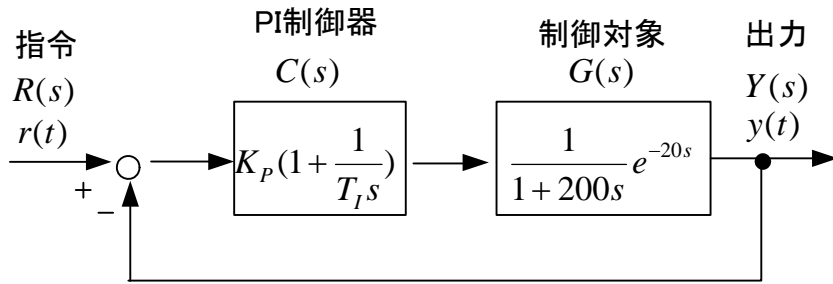


図 11-18 プロセス制御系

Chien の方法で制御パラメータを求めると、

$$K_p = 0.35 \times 200 / 20 = 3.5$$

$$T_i = 1.17 \times T = 234$$

となる。図 11-19 に一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図，図 11-20 に  $r(t) = 1$  に対する  $y(t)$  の応答（ステップ応答）を示す。図には、限界感度法の結果も示しており、この場合、 $C(s) = K_p$  として、いろいろの  $K_p$  に対してステップ応答をシミュレーションより求め、持続振動を起こす  $K_p = 16.3 (= K_c)$  とその時の周期  $T_c = 80.0$  (s) を観測した。この結果、限界感度法のパラメータは、

$$K_p = 0.45 \times 16.3 = 7.315$$

$$T_i = 0.83 \times 80.0 = 66.4$$

となった。図 11-19 より、むだ時間を含む系では、ゲインの傾きだけで位相は決まらないことが判る。従って、ゲインと位相の両方を描いて設計する必要がある。

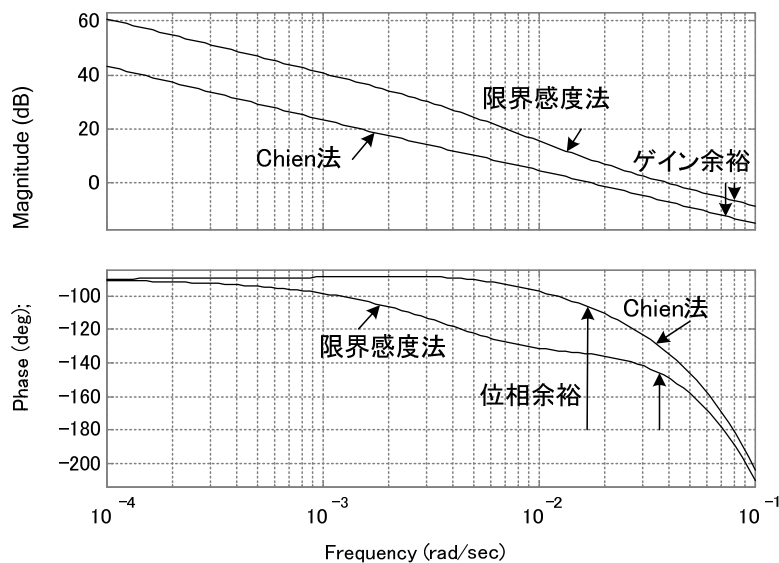


図 11-19 一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図

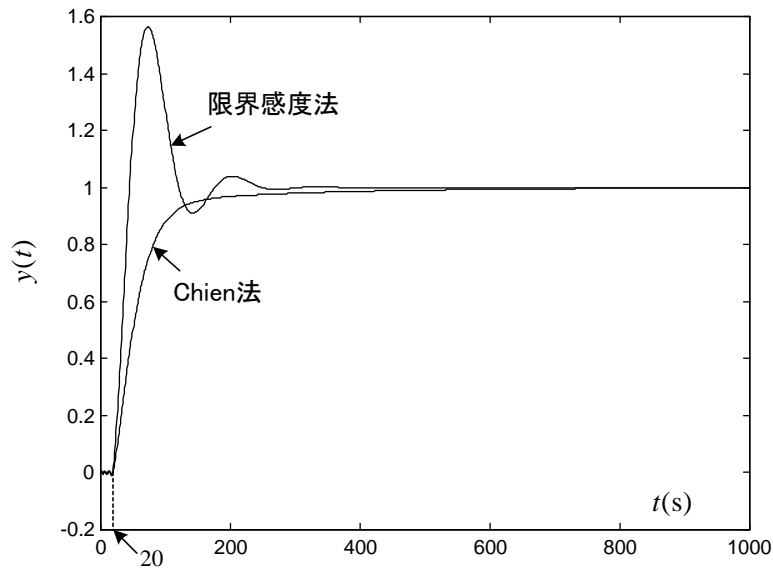


図 11-20 ステップ応答

図より，以下のことが判る。

- ①限界感度法は，比例ゲインが大きく速応性に優れるが，オーバシュートが大きい。これは，ゲイン交差角周波数は Chien 法に比べて高いが，位相余裕やゲイン余裕が小さいことから判る。
- ②Chien 法は，限界感度法に比べ位相余裕やゲイン余裕が大きく安定性に優れ，オーバシュートのない応答が得られている。
- ③周波数が高くなると無駄時間要素の影響で位相が急激に減少し，ゲイン交差角周波数はサーボ系のように高く選ぶことができない。
- ④指令値は  $t = 0$  でステップ変化しているが，無駄時間の影響で 20 秒後から出力が変化し始めている。

位相余裕，ゲイン余裕の値は経験的に次のような値が望ましいとされている（文献(3)）。

	ゲイン余裕	位相余裕	$M_p$
サーボ系	12~20 dB	40° ~60°	1.1~1.5
プロセス制御系	3~10 dB	20° ~70°	1.5~2.5

プロセス制御系では，主として，外乱に対する定常偏差を小さくすることが目的であるため，多少振動的な制御パラメータが用いられる。

### 11.3 PLL周波数シンセサイザの設計

PLL (phase locked loop) の**周波数シンセサイザ** (frequency synthesizer) への応用に関して述べる。周波数シンセサイザとは、水晶発振器の周波数を利用して目的とする任意の基準周波数を作るもので、ラジオ、テレビ、携帯電話など電波を扱う装置の発振器として広く利用されている。この技術がなければ、今日の携帯電話は実現できていないと言われる。

図 11-21 に PLL 周波数シンセサイザの基本ブロック図を示す。

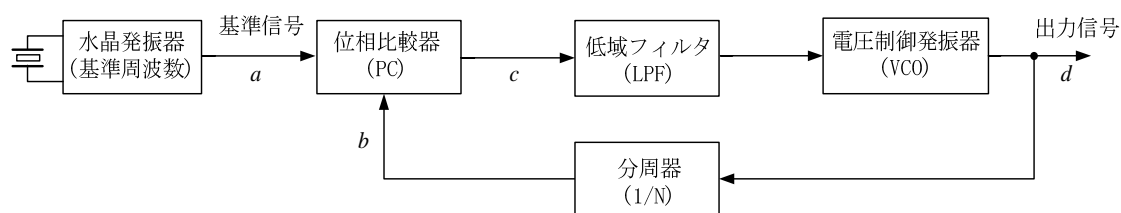


図 11-21 PLL周波数シンセサイザのブロック図

**位相比較器** (phase comparator) で、2つの入力信号の位相差に相当する信号を発生させる。位相比較器は、排他的論理和をとることで構成できる。他にも、掛算器を用いる方法などがある。**低域フィルタ** (low pass filter) は、高周波信号成分を除去し平均電圧の変化(低周波成分)を得るためのものである。**電圧制御発振器** (voltage controlled oscillator) は、電圧に比例した周波数の交流パルスを出力する。PLL の働きにより、基準信号の位相に同期した任意の周波数の出力信号を得ることができる。

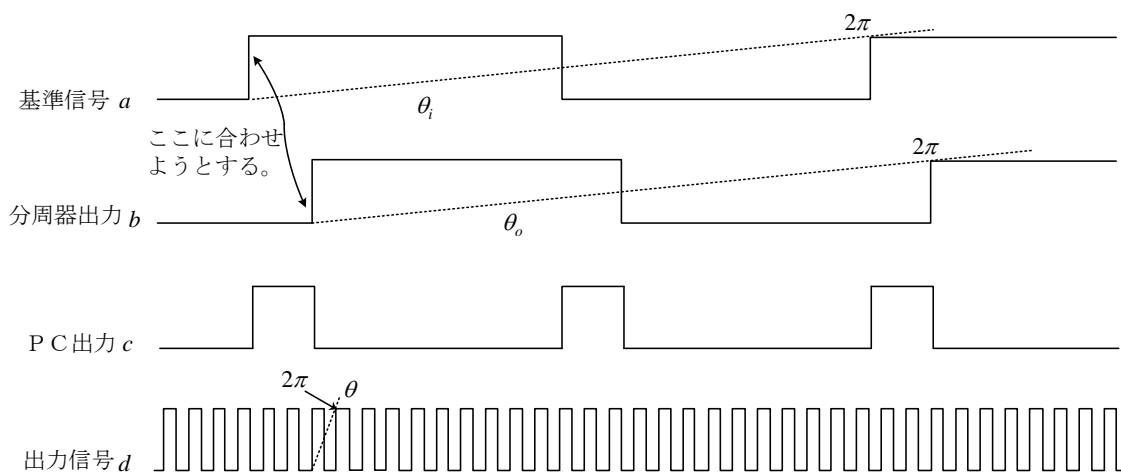


図 11-22 PLL動作イメージ

例えば、基準信号が**1MHz**、分周数  $N = 100$  であれば、基準信号に同期した**100MHz**の出力信号が得られる。基準信号は安定していなければならないが、フィードバック制御に

より VCO は精度の良くない LC 発振器でもよい。

低域フィルタとして、図のアクティブフィルタを考える。

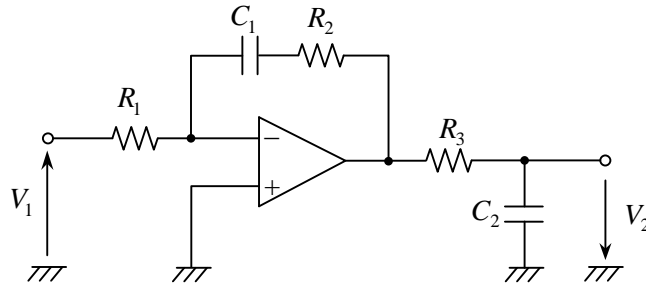


図 11-23 低域フィルタ

図より,

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{\frac{1}{sC_1} + R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1 + sC_1R_2}{sC_1R_1} \cdot \frac{1}{sC_2R_3 + 1} \\ &= \frac{sT_2 + 1}{sT_1(sT_3 + 1)} \end{aligned} \quad (11-17)$$

$$\text{但し, } T_1 = C_1R_1 \quad , \quad T_2 = C_1R_2 \quad , \quad T_3 = C_2R_3$$

PLL 制御回路の等価ブロック図は図 11-24 のようになる。位相は、角周波数を積分することによって得られるので、VCO のブロック図の中に積分器 ( $1/s$ ) が必要となる<sup>(15)</sup>。

$K_p$  [V/rad] は位相比較器のゲイン,  $K_v$  [(rad/s)/V] は VCO のゲインである。 $\theta_o$  が  $\theta_i$  より小さいと  $V_2$  が大きくなって発振周波数が高くなり、その結果、位相  $\theta$  の増え方が急になる。それを  $1/N$  に分周した  $\theta_o$  の増え方も急になって  $\theta_i$  に近づく。(一般には、 $\theta_i$  と  $\theta_o$  は定常状態の位相分を除いた変動分として定義されている。文献 (15) 参照)

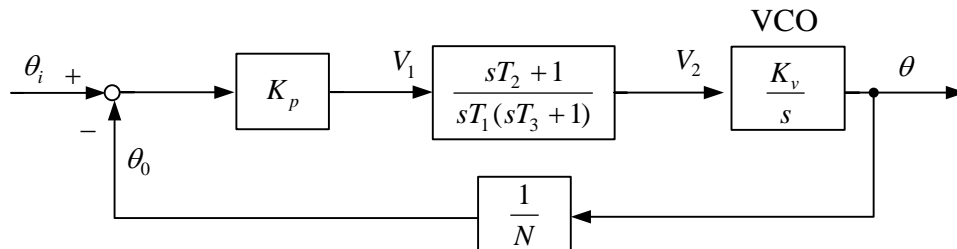


図 11-24 PLL 周波数シンセサイザの等価ブロック図

文献(14)による設計法を以下に示す。まず、一巡伝達関数  $G_0(s)$  は次式のように求まる。

$$G_0(s) = \frac{K_p K_v}{N} \frac{sT_2 + 1}{s^2 T_1 (sT_3 + 1)} \quad \textcircled{1}$$

$G_0(s)$  のボード線図を図 11-25 に示す。

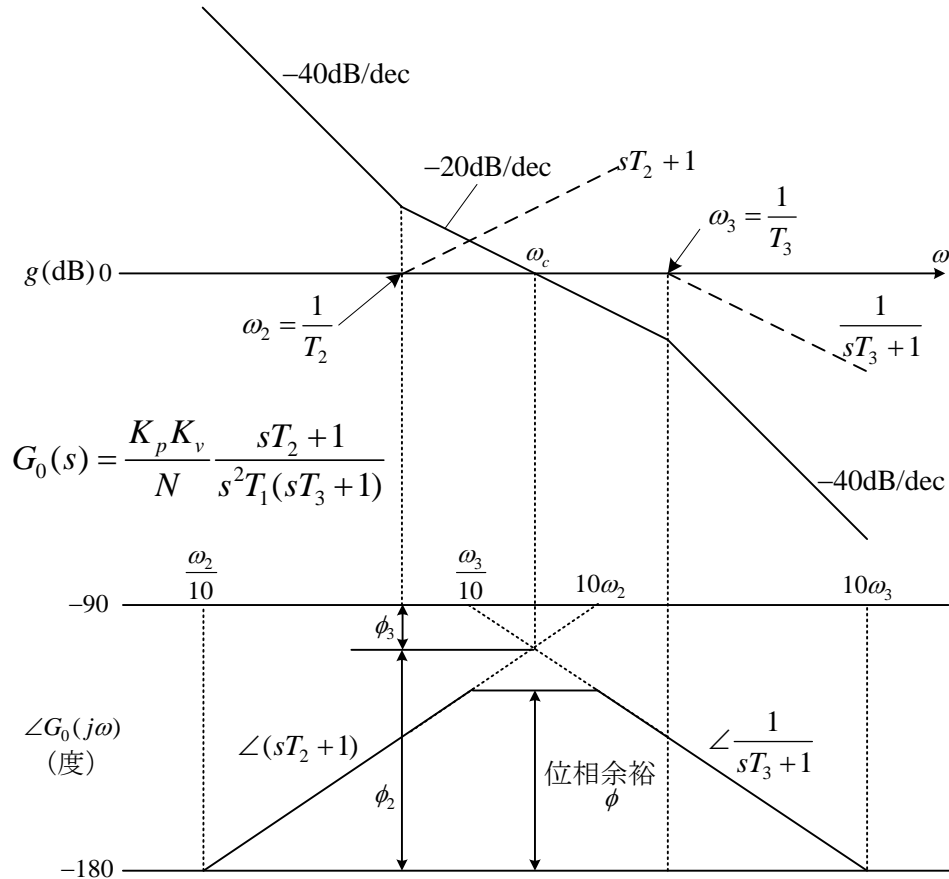


図 11-25  $G_0(s)$  のボード線図

ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  付近を  $-20\text{dB/dec}$  とするとため、位相進み要素  $sT_2 + 1$  を用いて  $\omega_2$  を決め、位相遅れ要素  $1/(sT_3 + 1)$  により  $\omega_3$  を設定する。すなわち、

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} \quad \textcircled{2}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} \quad \textcircled{3}$$

$\omega_2$  と  $\omega_3$  の中間は位相の直線の交点上にある。 $\omega_c$  を  $\omega_2$  と  $\omega_3$  の中間にとることで、位相余裕  $\phi$  を最大にできる。よって、

$$\begin{aligned}\log_{10} \omega_c &= \frac{1}{2}(\log_{10} \omega_2 + \log_{10} \omega_3) && \text{(注) 横軸の長さは } \log_{10} \omega \text{ である。} \\ &= \log_{10} \sqrt{\omega_2 \omega_3}\end{aligned}$$

$$\therefore \omega_c = \sqrt{\omega_2 \omega_3} = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}} \quad \textcircled{4}$$

位相については、以下の式が成立する。

$$\angle(1 + j\omega_c T_2) = \phi_2 \quad \therefore \tan \phi_2 = \omega_c T_2 \quad \textcircled{5}$$

$$\angle \frac{1}{1 + j\omega_c T_3} = -\phi_3 \quad \therefore \tan \phi_3 = \omega_c T_3 \quad \textcircled{6}$$

$$\phi_2 + \phi_3 = 90^\circ \quad \textcircled{7}$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_3 \quad \textcircled{8}$$

⑦式は、 $\omega_c$  の選び方に関係なく交点なら常に成立する。 $\omega_c$  は位相に関係なく制御ゲインを変えれば自由に移動でき、交点を  $\omega_c$  とすることで、⑤、⑥、⑧が成立する。

⑤、⑦、⑧より、

$$T_2 = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{90^\circ + \phi}{2}\right) \quad \textcircled{9}$$

⑥、⑦、⑧より、

$$T_3 = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{90^\circ - \phi}{2}\right) \quad \textcircled{10}$$

$\omega = \omega_c$  において、ゲインが 0dB であるから、 $sT_2 + 1 \approx sT_2$ 、 $1/(sT_3 + 1) \approx 1$  と近似して

$$|G_0(j\omega_c)| = \frac{K_p K_v T_2}{N \omega_c T_1} = 1$$

$$\therefore T_1 = \frac{K_p K_v T_2}{N \omega_c} \quad \textcircled{11}$$

ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  と位相余裕  $\phi$  を設定すると、⑨、⑩より  $T_2$ 、 $T_3$  が求まり、⑪より、 $T_1$  が決まる。⑨、⑩式は④式を満たす。

## 参考文献

本講義ノートを作成するに当たり，以下の文献を特に参考にさせて頂きました。この場を借りて感謝申し上げます。

- (1) Kuo: Automatic Control Systems 2<sup>nd</sup> Edition (Maruzen), 1967
- (2) 堀井：制御工学概論 (コロナ社), 1974
- (3) 相良：基礎自動制御 (森北出版), 1978
- (4) 明石, 今井：詳解制御工学演習 (共立出版), 1981
- (5) 伊藤：ロバスト制御の理論と応用-コンピュータロール 13 (コロナ社), 1986
- (6) 須田：制御工学 (コロナ社), 1987
- (7) 杉本, 小山, 玉井：AC サーボシステムの理論と設計の実際 (総合電子出版), 1990
- (8) 須田：PID 制御-システム制御情報ライブラリー6 (朝倉書店), 1992
- (9) 大須賀：制御工学 (共立出版), 1995
- (10) 堀, 大西：制御工学の基礎 (丸善), 1997
- (11) 正田, 春木：自動制御-アルテ 21 (オーム社), 1998
- (12) 木下：システム制御工学入門 (コロナ社), 2000
- (13) 荒木：古典制御理論[基礎編] (培風館), 2000
- (14) 小宮：PLL 周波数シンセサイザの設計法徹底解説、トランジスタ技術 2007 年 12 月
- (15) 角田：PLL の基本と応用 (東京電機大学出版局), 1979
- (16) 森：制御工学(コロナ社), 2001
- (17) 原田, 二宮, 中野：基礎電子回路 (コロナ社), 1985
- (18) 角田：オペアンプの基本と応用 (東京電機大学出版局), 1977
- (19) 大島：「自動車産業における制御教育」 計測と制御 第 46 巻 9 号, 2007
- (20) 野波, 西村, 平田：MATLAB による制御系設計 (東京電機大学出版局), 2002
- (21) 須田：エース自動制御 (朝倉書店), 2000
- (22) 小坂：s が右半平面を囲うことを前提としないナイキストの安定判別法の証明, 計測自動制御学会論文集, Vol.49, No.4, pp. 497-498 (2013)
- (23) 足立：MATLAB による制御工学 (東京電機大学出版局), 2002
- (24) 杉江, 藤田：フィードバック制御入門 (コロナ社), 1999



索引	ページ				
		固有値	52	伝達関数	3
		根軌跡	110	特性方程式	4
		サーボ系	162	ナイキスト線図	6,59
安定条件	74	最終値の定理	17	内部モデル原理	125
安定多項式	22	最小位相	22	二次遅れ要素	41
位相遅れ補償	145	周波数応答	5	2自由度制御	151
位相, 位相角	7,60	周波数応答	59	PID制御	121,148
位相交差角周波数	139	出力方程式	34	非線形システム	87
位相進み補償	142	状態推移行列	51	微分要素	63
位相余裕	139	状態変数	35	フィードフォワード制御	
一次遅れ要素	38	状態方程式	34		153
一巡伝達関数	73	ステップ応答	4,38	フーリエ変換	19
位置偏差定数	124	ステップ関数	12	負帰還	1,28
インパルス応答	49	正帰還	1,28	部分分数展開	11,14
インパルス関数	12	制御対象	2	フルビッツ多項式	
演算増幅器	24	制御量	2		22
オーバシュート	112	整定時間	112	プロセス制御系	163
オペアンプ	24	積分要素	62	ブロック線図	27
折点角周波数	61	零点	22	プロパー	22
外乱抑圧特性	136	零点の影響	46	閉ループ伝達関数	
型	125	線形モデル	87		4,21,73
片対数グラフ	7, 61	操作量	2	ベクトル軌跡	59
感度関数	137	相乗定理	17	偏差	2
逆行列	37	速応性	136	ボード線図	6,59
極	22	速度偏差定数	124	むだ時間要素	47
極-零点相殺	47	ダイポール	47	目標値	2
ゲイン	6	畳込み積分	49	有理関数	22
ゲイン交差角周波数		立ち上り時間	112	余因子行列	37
	139	低域通過フィルタ	61	ラウスの安定判別	77
ゲイン余裕	139	DCモータ	31	ラプラス変換	10
限界感度法	164	定常位置偏差	124	利得(ゲイン)	60
減衰係数	43	定常状態の解析	127	ロバスト安定性	136
減衰振動	43	定常速度偏差	124	時定数	38,39
高域通過フィルタ	62	定常偏差	121		
固有角周波数	43	デシベル値	6		