

# 第1章 自動制御で何をするのか？

制御(control)とは、我々が望むとおりの運転状態にすることである。例えば、エアコンで部屋の温度を一定に保つこと、自動的にドアが開閉すること、エレベータがきちんと床面と同じ高さに止まること、電源の周波数や電圧を一定に保つこと、ロボットが決められた位置に動くこと、飛行機が安定に飛行することなど。人手で行う制御を**手動制御(manual control)**といい、コンピュータや機械を使って行う制御を**自動制御(automatic control)**という。上記の例は全て自動制御である。一方、自動車の運転は、手動制御である（自動車そのものには多くの自動制御装置が使われている）。

エアコンを例にとり、自動制御をもう少し詳しく考えてみよう。我々は温度の設定を行うが、エアコンには温度センサが付いていて実際の部屋の温度を計測している。エアコンは温度の設定値と実際値との差を基に熱の量を加減して部屋の温度を一定に保っているのである。図 1-1 に信号の流れを示す。矢印の方向に信号が伝わっていく。このように、センサからの情報を利用する制御を、**閉ループ制御(closed loop control)**または**フィードバック制御(feedback control)**という。閉ループとは、エアコンが加えた熱が部屋に行き渡り、それがセンサから検出されてエアコンに戻ることでループを形成していることを意味する（図 1-1 参照）。フィードバックとは、目標と結果に差があるとき、この差を小さくするように働く機能のことで、厳密には**負帰還(negative feedback)**をさす。**正帰還(positive feedback)**は、差を益々大きくする機能で、普通は望ましくない。

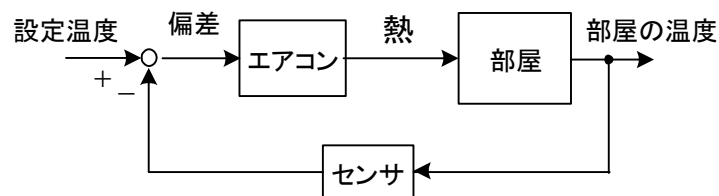


図 1-1 エアコンによる温度制御の信号の流れ

一方、**開ループ制御(open loop control)**と呼ばれるものもある。開ループ制御ではセンサからの情報を使用しない。これには時間や条件によってスイッチを切り替える**シーケンス制御**と、結果を予測して制御対象に何らかの量を加える**フィードフォワード制御(feed-forward control)**がある。シーケンス制御には、信号機、ネオンサイン、洗濯機などがある。信号機は決められた時間に点滅するもので、交通情報を検出している訳ではない。フィードフォワード制御は、図 1-1 でセンサのないエアコンを考えればよく、正確ではないが経験や数式モデルにより、ある程度の目的は達成できる。フィードフォワード制御はフィードバック制御と組み合わせて利用されることもある。この講義では主として閉ループ制御を対象とする。

図 1-2 に示す電気回路の電流フィードバック制御を考えることで、自動制御の概要をつかんで欲しい。完全に分る必要はありません。まず、言葉の定義をしておこう。

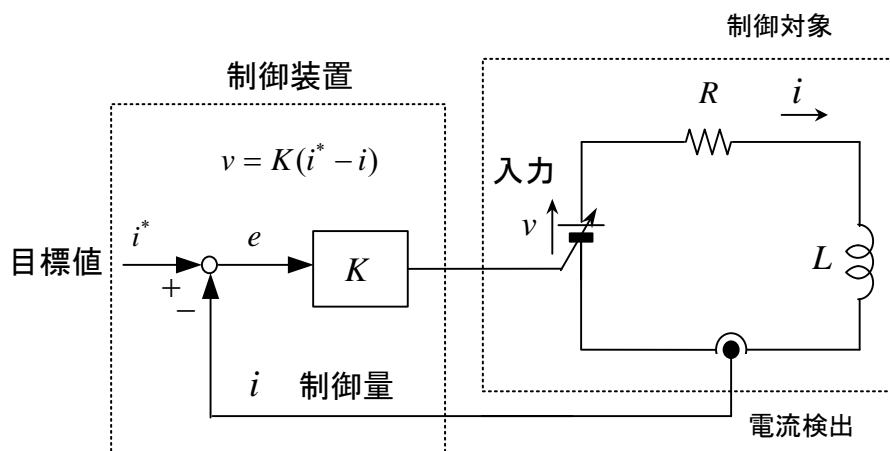


図 1-2  $RL$  回路の電流制御システム

**制御対象**(controlled system)：制御されるもの。

**制御装置**(controller)：制御対象を制御する装置で、コンピュータや電子回路で組み立てられる部分と制御対象の入力部分（**操作部**:final control element）よりなる。しかし、本テキストでは操作部（ここでは電源）は制御対象に含めて考えることとする。

**制御量**(controlled variable)：制御すべき量でセンサを用いて測定される。制御対象の出力なので、単に**出力**(output)と言うこともある。（ここでは、電流  $i$  である）

**操作量**(manipulated variable)：制御を行うため制御対象に加える量。制御対象の入力なので、単に**入力**(input)と言うこともある。（ここでは、電源電圧  $v$  である。直流電圧源の記号で書いているが自由に電圧を変えられるものとする。）

**目標値**(desired value)：制御量の目標値として外部から与えられる量。**設定値**とか**指令値**と言われることもある。（ここでは、電流指令  $i^*$ ）

**フィードバック信号**(feedback signal)：制御装置にフィードバックされる信号（ここでは、電流  $i$ ）。制御量以外もフィードバックされることがある。

**偏差**(error)：目標値と制御量の差（ここでは、 $e = i^* - i$ ）

### 1.1 制御システムの数学的表現（モデリング）

制御対象は一般に常微分方程式で記述される。この例では、次式となる。

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (1-1)$$

制御装置は、目標値とフィードバック信号を基に制御のための演算を行い、操作量を可変電圧電源より出力する。演算は、アナログまたはデジタルの電子回路で行われる。ここでは、最も簡単な比例制御を考える。 $i^* > 0$ 、 $i^* > i$  の場合には電流の偏差が大き

いほど、電源電圧を高くして電流を増やさないといけないから

$$v(t) = K(i^*(t) - i(t)) \quad (1-2)$$

としよう。 $i^*(t) > i(t)$  なら  $v(t) > 0$ ,  $i^*(t) < i(t)$  なら  $v(t) < 0$  とすべきなので、物理的に  $K > 0$  でないと制御はうまくいかない。指令値  $i^*(t)$  が負の場合も(1-2)でよい。

## 1.2 ブロック線図

ラプラス変換して、初期値を零と置くことにより得られる関係式から、ブロック線図を書くことができる。初期値が0の場合のラプラス変換は、大変容易で、

$$f(t) \rightarrow F(s), \quad \frac{df(t)}{dt} \rightarrow sF(s), \quad \frac{d^2f(t)}{dt^2} \rightarrow s^2F(s)$$

と機械的に置き換えるだけでよい。これは、交流回路のフェーザ表示で  $j\omega$  を  $s$  と置き換えたものと同じ形である。 $L[f(t)] = F(s)$  と書き、 $L$  はラプラス変換を表す。

(1-1)をラプラス変換して、初期値を0と置くと

$$V(s) = LsI(s) + RI(s) \quad (1-3)$$

$$\therefore \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls} \quad (1-4)$$

ラプラス変換した量で、出力/入力は**伝達関数**(transfer function)と呼ばれ、(1-4)は制御対象の伝達関数である。(1-2)をラプラス変換して、制御装置の式は

$$V(s) = K(I^*(s) - I(s)) \quad (1-5)$$

となる。(1-4), (1-5)を基に次の**ブロック線図**が得られる。

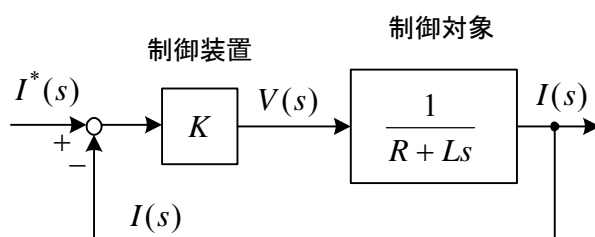


図 1-3 図 1-2 のブロック線図

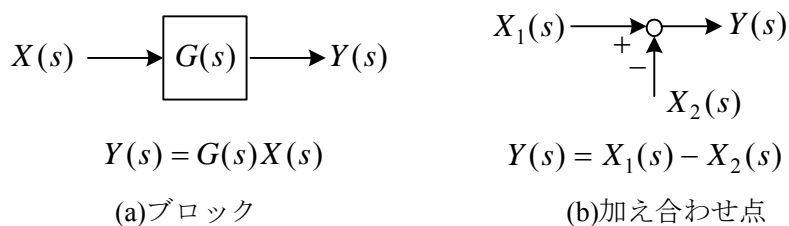


図 1-4 ブロック線図の基本

(注) 線上の値はちょうど電圧のようにどこでも等しい。図 1-3 の  $I(s)$  を見よ。

(1-3),(1-5)より，出力/目標値である**閉ループ伝達関数**(closed loop transfer function)が次のように得られる。

$$G_{cl}(s) = \frac{I(s)}{I^*(s)} = \frac{K}{R + K + Ls} \quad (1-6)$$

閉ループ伝達関数の分母を零と置いたものは，**特性方程式**(characteristic equation)と呼ばれ，安定性を知る上で極めて重要である。

$$\text{特性方程式： } R + K + Ls = 0 \quad (1-7)$$

(1-7)を解いて，**特性方程式の根**(characteristic root)  $s$  は次式となる。

$$s = -\frac{R + K}{L} \quad (1-8)$$

一般に，特性方程式の全ての根の実部が負であれば（全ての根が複素平面の左半平面内にあれば）制御系は安定である。この場合， $L > 0$  だから，安定条件は次式で与えられる。

$$R + K > 0 \quad (1-9)$$

抵抗  $R$  は正なので， $K$  が正であれば十分に安定であるが， $K$  が  $K < -R$  の場合には不安定になる。

### 1.3 時間応答

図 1-2 の制御系で，設定値（指令値） $i^*$ を  $t=0$  で 0 から 1 に階段状に変化させたときの実際の電流  $i$  を求めてみよう。これを**ステップ応答**(step response)と言う。この求め方には，2つの方法が考えられる。1つは微分方程式を直接解く方法，もう1つはラプラス逆変換より求める方法である。ここでは，ラプラス逆変換による方法を述べる。

$i^* = 1$  であるから，そのラプラス変換  $I^*(s)$  は次式で与えられる。

$$I^*(s) = \frac{1}{s} \quad (1-10)$$

(1-6)より，

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{K}{R + K + Ls} I^*(s) = \frac{K}{s(R + K + Ls)} \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b}{R + K + Ls} \quad (\text{部分分数展開}) \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b/L}{s + \frac{R + K}{L}} \end{aligned} \quad (1-11)$$

$s$  についての恒等式を解いて,

$$K = a(R + K + Ls) + bs \quad \therefore a = \frac{K}{R + K}, b = -\frac{LK}{R + K} \quad (1-12)$$

(1-11)を, ラプラス逆変換して,

$$i = \frac{K}{R + K}(1 - e^{-(R+K)t/L}) \quad (1-13)$$

を得る。なお, 電流の初期条件は伝達関数(1-6)を求めるときに  $0$  としていたので, これが仮定されている。 $L > 0$  であるから  $R + K > 0$  であれば,  $t \rightarrow \infty$  のとき,

$$i(\infty) = \frac{K}{R + K}$$

に収束する(安定である)。しかし,  $R + K < 0$  であれば,  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $i \rightarrow -\infty$  となって発散する(不安定である)。(1-8)の特性方程式の根で過渡応答が決まるので, この実部が全て負であれば安定となることが理解できる。実根の場合には, 実部という表現は適さないが, 一般の複素共役根の場合も含め, 一般にこのことが言える。 $K < -R$  の場合には,  $i^* > i$  であるとき, 電流を増やすには正の電圧を加えないといけないが,  $K$  が負だから負の電圧を加えることになりますます電流が減ってしまい不安定となる。

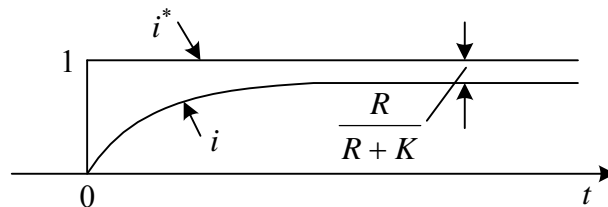


図 1-5 電流のステップ応答(安定な場合)

$t=0$  で  $i^* = 0$  から  $1$  への変化に対する電流のステップ応答を図 1-5 に示している。この場合, 定常値が偏差  $R/(R + K)$  を持ち, これは比例制御の欠点である。ただし,  $K$  を大きく選ぶと偏差も小さくなる。

#### 1.4 周波数応答

これまでに, 制御対象の伝達関数や閉ループ伝達関数を紹介した。他にも, いろんな伝達関数がある。これらは, ラプラス変換された入出力の比であり, 入出力の選び方でいろんな伝達関数が作れるからである。ただ, それらには共通の物理的意味がある。

ここでは,  $s = j\omega$  ( $\omega$  は角周波数 (rad/s)) とおくことにより,  $\omega$  に対する伝達関数のグラフを書いて, その意味を考えてみる。最も簡単な, 制御対象だけの伝達関数(1-4)を取り

上げる。

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls} \quad (1-14)$$

$s = j\omega$  とおくと,

$$G(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} \quad (1-15)$$

となる。この場合、 $G(j\omega)$  は、回路のインピーダンスの逆数（アドミタンス）となっていることが判る。 $G(j\omega)$  は複素数であり、大きさと位相に分けて極形式で書ける。 $\angle$  は  $\arg$  と同じ意味で使う。 $|G(j\omega)| \equiv r$ ,  $\angle G(j\omega) \equiv \theta$  とおく。 $\equiv$  は定義を意味する。

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \equiv r e^{j\theta} \quad (1-16)$$

$\omega$  を変化させて  $G(j\omega)$  の軌跡をそのまま複素平面上に描いたものを**ナイキスト線図(ベクトル軌跡)**という。 $\omega$  を横軸に対数目盛りで取り、縦軸に大きさ(ゲインという)と位相角を書いたグラフを**ボード線図**という。このとき、**ゲイン  $g$**  は次式に示す**デシベル値(dB)**を用いる。

$$g \equiv 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad [\text{dB}] \quad (1-17)$$

(1-15)の場合,

$$g = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad [\text{dB}] \quad (1-18)$$

上式より、ゲインは次のように近似できる。

$$g \begin{cases} \approx 20 \log_{10}(1/R) & (\omega \ll R/L) \\ \approx 20 \log_{10}(1/R) - 10 \log_{10} 2 & (\omega = R/L) \quad (\text{折点角周波数}) \\ \approx 20 \log_{10}(1/(\omega L)) & (R/L \ll \omega) \end{cases} \quad (1-19)$$

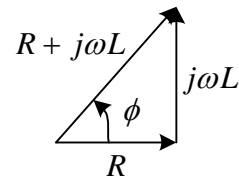
$10 \log_{10} 2 \approx 3 \text{ dB}$  であるから、 $\omega = R/L$  では 3 dB 小さくなる。 $R/L \ll \omega$  では、 $\omega$  が 10 倍になれば、ゲインは 20 dB 低下する。なぜなら、

$$20 \log_{10} \frac{1}{10\omega_0 L} = 20 \log_{10} \frac{1}{10} + 20 \log_{10} \frac{1}{\omega_0 L} = -20 + 20 \log_{10} \frac{1}{\omega_0 L} \quad [\text{dB}] \quad (1-20)$$

であるから。これを、 $-20 \text{ dB/dec}$  と書く。dec は decade (デカード) の略で、10 の 1 組の意味がある。

一方、**位相**は、次式のように近似できる。 $\angle G(j\omega) = \theta = -\phi$  である。

$$\angle G(j\omega) \begin{cases} \approx 0 & (\omega \ll R/L) \\ = -45^\circ & (\omega = R/L) \\ \approx -90^\circ & (R/L \ll \omega) \end{cases} \quad (1-21)$$



これから、ボード線図の概略図が以下のように書ける ( $R < 1$  の場合)。ナイキスト線図は半円になる。

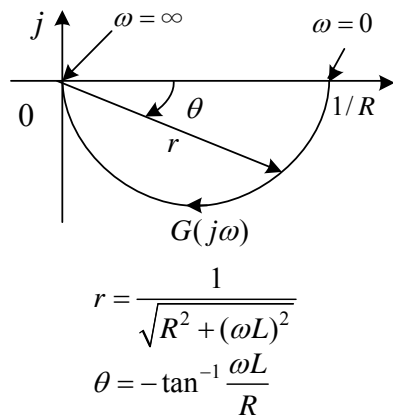


図 1-6 ナイキスト線図

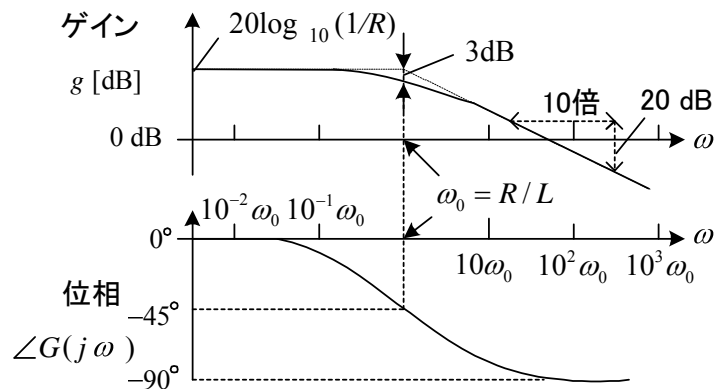
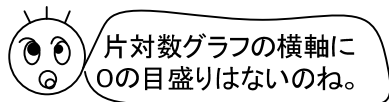


図 1-7 ボード線図



$x = \log_{10} \omega$  として、 $x$ で横軸の目盛をつけると等間隔

図 1-6 のナイキスト線図や図 1-7 ボード線図は、以下のことを表している。

- (1) 入力（この場合電源電圧  $v$ ）として正弦波を加えたとき、出力（この場合電流  $i$ ）も正弦波となるが、伝達関数の絶対値  $r$  やゲイン  $g$  は入出力の振幅の比、 $\angle G = \theta$  は入出力の位相のずれを表す。ナイキスト線図やボード線図は、いろいろの角周波数  $\omega$  の正弦波を別々に回路に加えたときの出力がどのようになるかを一点一点表わしている。
- (2) 角周波数  $\omega$  が高い正弦波入力の場合、 $\omega L$  が大きくなり、電流が流れにくくなって、ゲイン  $g$  は低下する。すなわち、入力の振幅に対する出力の振幅が小さく、信号が伝わらない。ゲインが 0dB のとき、入力と出力の振幅の比が等しく  $r = 1$  である。
- (3) 角周波数  $\omega$  が高い正弦波入力の場合には、出力の位相が  $90^\circ$  遅れるようになる。これは、コイルの影響が強くなって電圧に対し電流の位相が  $90^\circ$  遅れるようになるということを意味する。逆に、角周波数  $\omega$  が低い正弦波入力の場合にはコイルの影響は小さく抵抗だけの回路とみなせる。

## 1.5 制御工学の歴史

	年	事項
古典制御理論	1788	Watt 蒸気機関の遠心调速機の発明 1868年 電磁気学で有名な Maxwell (マクスウェル) が安定性を調べ、特性方程式の根の実部が負であればシステムは安定であることを示した。
	1877	Routh (ラウス) 安定判別法 一般的な安定判別法の開発は、懸賞問題となっていた。これに勝利したのがケンブリッジ大学でマクスウェルと同級生であったラウスである。
	1892	Lyapunov (リアプノフ) 安定判別法 非線形システムにも使用可能
	1895	Hurwitz (フルビッツ) 安定判別法 ラウスの安定判別法と本質的に同じもの。
	1932	Nyquist (ナイキスト) 安定性 (ナイキスト線図) フィードバック増幅回路
	1936	Callender (カレンダー) PID 制御 現在でも大活躍している制御法
	1940	Bode (ボードまたはボーデ) 周波数領域の理論 (ボード線図)
	1942	Ziegler-Nichols (ジエグラ-ニコルス) PID 制御の調整法 (限界感度法)
	1947	Nichols (ニコルス) ニコルス線図
	1948	Evans (エバンズ) 根軌跡法
現代制御理論	1954	Bellman (ベルマン) 動的計画法
	1956	Pontryagin (ポントリャーギン) 最大原理
	1960	Kalman (カルマン) 最適制御理論, カルマンフィルタ 現代制御理論の中心的存在で、システムの微分方程式 (状態方程式) をラプラス変換しないで、直接時間領域で解析・設計する理論である。制御の性能を表すのに状態変数の 2 乗積分である評価関数を設定し、それを最小にするような制御系を設計する。全ての状態量をセンサで検出してフィードバックすることが前提となっている。
	1964	Luenberger (ルーエンバーガ) オブザーバ理論 システムの微分方程式 (状態方程式) を利用して、センサで検出された状態量から検出できない状態量を推定する。一部の状態量しか検出できないシステムを最適制御する場合などに利用できる。
	1965	Astrom 同定法 同定とは未知のパラメータを推定すること。
	1965	Zadeh (ザデー) ファジィ集合
	1965	Butchart リアプノフの安定論を用いた適応制御
ポスト現代制御理論	1973	Carroll 適応観測器
	1989	Doyle (ドイル) $H_\infty$ 制御 (ロバスト制御) $H$ 無限大と読む。 $H$ は Hardy 空間のことで、この無限大次数ノルムを用いることに由来している。ロバスト(robust)は頑丈なとか強いとかの意味があり、制御対象のパラメータ変動が起こっても制御性能を所定の値または範囲に保つように補償器を設計する理論である。これは、古典制御でも行われていたことであるが、 $H_\infty$ 制御ではこれをシステムティックに (系統的に) 行う。理論は難解であるが、Matlab などの市販ソフトで設計できる。
	現在	ロバスト制御をはじめ、2 自由度制御、モデル予測制御、非線形制御、LMI (線形行列不等式) に基づく制御、学習・適応制御、AI (人工知能)、現代及びポスト現代制御理論の実システムへの応用などの研究が進展している。

文献 (10), (13) 参照



### 蒸気機関の遠心调速機（ガバナー）

蒸気が蒸気機関に多く流入すると蒸気機関が出すトルクが大きくなって回転速度を上昇させようとする。いま負荷が軽くなって、回転が速くなると遠心力によって遠心錘（振り子）が上昇して蒸気弁は閉じる向きに動く。この結果トルクが低くなるので、速度の上昇を抑えようとする。逆に負荷が重くなって、回転が遅くなると、遠心錘が下降して蒸気弁を開き、回転速度を上昇させようとする。このようにガバナーは自動的に速度を一定に制御しようとするもので、これはフィードバック制御である。精度を上げるために遠心錘の感度をあげると振動的になり、ついに不安定になることがしばしばあった。

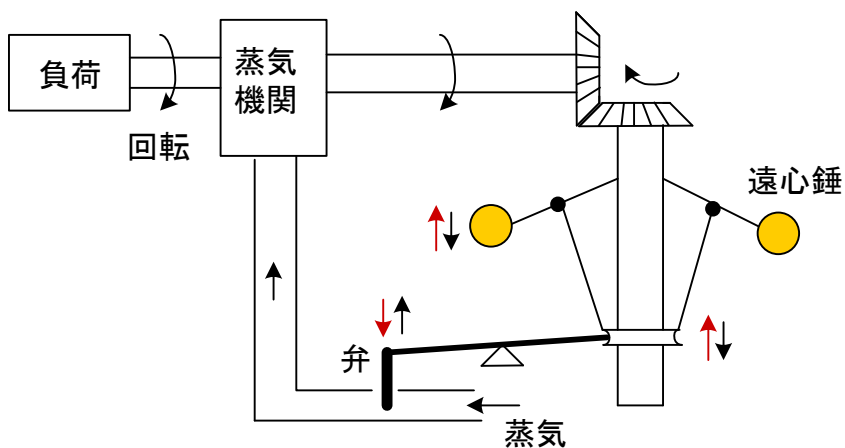


図 1-8 遠心调速機