

## 第 10 章 制御系の設計 I

制御器設計の基本的方針について述べる。3つの周波数領域に分けて制御器の役割を変えることで良好な特性を得る。制御器は一般に直列補償として構成されるが、2自由度制御系という考え方もある。

### 10.1 制御系に要求されるもの

制御系を設計する場合、どんな性能に着目すればよいのであろうか？以下に示すように、いろいろのことが考えられる。

- (1) システムが安定でありオーバシュートやアンダシュートが小さいこと（安定性，減衰性）。制御対象が変動しても安定性が影響されないこと（ロバスト安定性:robust stability）。Robust は“頑健な，強固な”の意味がある。
- (2) 目標値に素早く達すること（速応性 speed of response）。
- (3) 定常偏差がないこと。
- (4) 外乱の影響を受けないこと（外乱抑圧特性）。
- (5) ノイズの影響を受けないこと（雑音除去特性）。
- (6) 制御対象の操作量(入力)が大きすぎて頻繁に制限値(リミッタ)にかからないこと。

速応性，定常偏差は目標値追従特性とよばれることもある。(1)～(6)には，同時に満足することができないものも含まれている。大雑把に言って，制御器のゲインを大きくすると，(2) (3) (4) は満足されるが，逆に(1) (5) (6) は満たされなくなる。もちろん，不安定な制御対象で制御器のゲインを大きくして安定化することもあり，あくまでも“一応”である。

### 10.2 両立できない制御性能

図 10-1 の制御系について，制御性能を満足するには制御器はどうあるべきか考える。目標値に対する偏差の伝達関数を  $G_{re}(s)$  とすると，この場合には外乱と観測雑音を 0 と考えて，

$$\frac{Y}{R} = \frac{CG}{1+CG}, R-Y=E \quad \text{より,}$$
$$G_{re}(s) = \frac{E}{R} = \frac{1}{1+CG} \quad (10-1)$$

となる。  $C = \infty$  のとき  $G_{re} = 0$  となり理想的特性となる。

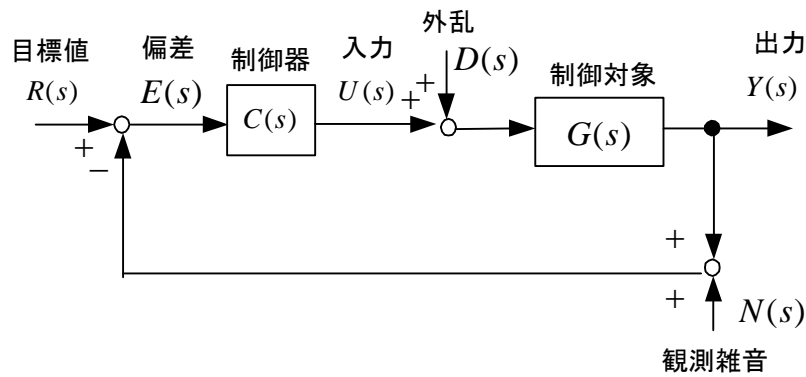


図 10-1 フィードバック制御系

外乱に対する偏差の伝達関数を  $G_{de}(s)$  とすると、この場合には、目標値と観測雑音を 0 と考えて、

$$(EC + D)G = Y, \quad -Y = E \quad \text{より、}$$

$$G_{de}(s) = \frac{E}{D} = -\frac{G}{1 + CG} \quad (10-2)$$

となる。この場合も、 $C = \infty$  のとき  $G_{de} = 0$  となり理想的特性となる。

観測雑音に対する出力の伝達関数を  $G_{ny}(s)$  とすると、

$$ECG = Y, \quad Y + N = -E \quad \text{より、}$$

$$G_{ny}(s) = \frac{Y}{N} = -\frac{CG}{1 + CG} \quad (10-3)$$

となる。この場合には、 $C = 0$  のときすなわち制御しない方が  $G_{ny} = 0$  となり観測ノイズの影響が出力に現れなくなる。(10-1)~(10-3)はいずれも十分に小さくしたい伝達関数であるが、同時に満足する  $C$  は存在できない。一般に、

$$S(s) \equiv \frac{1}{1 + C(s)G(s)}, \quad T(s) \equiv \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (10-4)$$

とおき、 $S(s)$  を**感度関数**、 $T(s)$  を**相補感度関数**と呼ぶ。両者の値には、

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (10-5)$$

の関係がある。 $S(j\omega), T(j\omega)$  は複素数なので、 $|S(j\omega)|, |T(j\omega)|$  共に小さくできるが、 $|S(j\omega)| + |T(j\omega)| \geq 1$  であり、共に小さくすることに限界はある。

次に、ロバスト安定性について考える。いま、制御対象が次式のように変化したとする。

$$G'(s) = (1 + \delta(s))G(s) \quad (10-6)$$

$\delta(s)$  はモデル化誤差(modeling error)である。このときのブロック図を図 10-2 に示す。

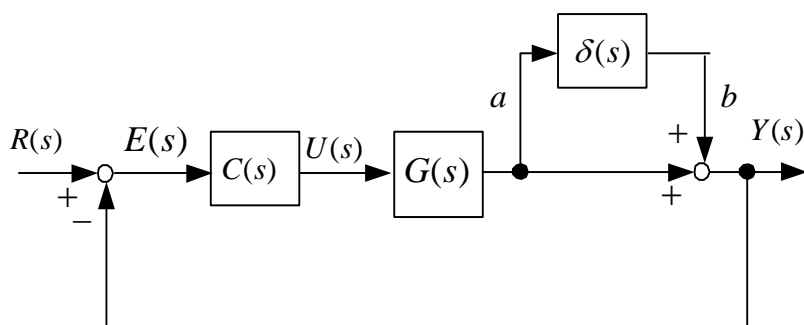


図 10-2 制御対象が変動した場合の制御系(文献(9)より)

$R(s) = 0$  として、 $b$  から  $a$  に至る伝達関数を求める。

$$a + b = -E, \quad ECG = a \quad \text{より,}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{CG}{1 + CG} \quad (10-7)$$

観測雑音に対する出力の伝達関数と等しいことが判る。安定であるためには、ナイキストの安定条件[定理 2]より、一巡伝達関数が  $-1 + j0$  の点を囲まなければよく、

$$\left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| |\delta(j\omega)| = |T(j\omega)| |\delta(j\omega)| < 1 \quad (10-8)$$

であれば十分である。従って、ロバスト安定であるための条件は、相補感度関数  $|T(j\omega)|$  を小さくすることで達成できる。

以上のことから、全ての制御性能を常に満足する制御器は実現不可能で、何らかのトレードオフにより実現する以外方法がないことが明確となった。

### 10.3 制御系の設計指針

目標値追従特性と外乱除去特性を良くするには感度関数  $|S(j\omega)|$  を小さくすべきで、雑音除去特性とロバスト安定性を良くするには相補感度関数  $|T(j\omega)|$  を小さくすべきであって、それらの和は 1 以上だから共に小さくすることには限界がある。そこで、周波数領域によりどちらを重要視するかで、両者の妥協を図る。

制御系設計の基本方針として、低周波領域では目標値追従特性と外乱除去特性を良くし、高周波領域では雑音除去特性とロバスト安定性を良くする。目標値（指令値）をゆっくりと変化させる場合（低周波の指令）には出力が追従してくれないと話にならない。ボード線図でゲイン  $g > 0\text{dB}$  の周波数成分に対しては増幅して応答してくれるので、低周波領域のゲインは大きく選ぶ必要がある。高周波領域までゲインが大きければ指令値を急に変化させてもすぐに追従してくれるが、雑音の影響を受け易くなるのでほどほどで我慢する。すなわち、雑音は高周波成分からなり、モデル化誤差  $\delta(j\omega)$  も高周波領域で大きくなる（低周波特性は無視しないでモデル化することが普通である）から、これらの影響を排除するため高周波領域ではゲインを小さく選び信号を減衰させる。一巡伝達関数のゲインが  $0\text{dB}$  となる中間周波数領域では、制御系が安定になるように位相余裕を確保する。

以上をまとめると、望ましい制御系を構成するためには、一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図が、図 10-3 の斜線で示す領域に入らないようにする。

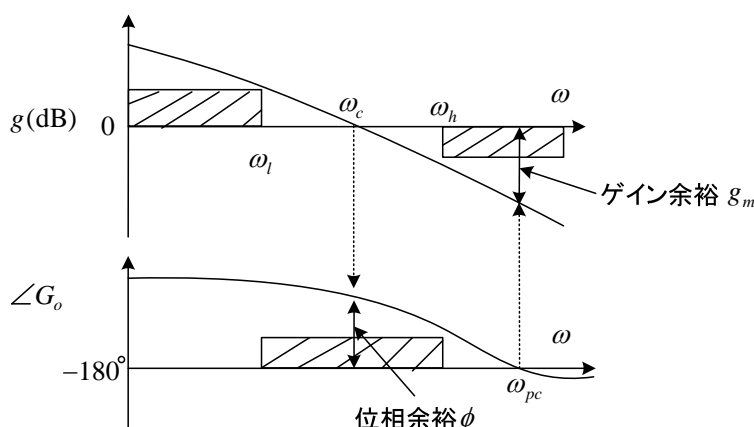


図 10-3 望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$

図で、 $\omega_c$  は**ゲイン交差角周波数**(gain crossover angular frequency)と呼ばれる。 $\omega_c$  が大きい程、目標値の急峻な変化にも追従して速応性を高めることができ、急に変化する外乱も除去できるようになるが、ノイズに影響されやすくまたロバスト安定性も悪くなる。 $\omega_{pc}$  は**位相交差角周波数**(phase crossover angular frequency)と呼ばれる。

望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega)$  のボード線図が与えられると、制御器の伝達関数  $C(j\omega)$  を調節して  $C(j\omega)G(j\omega)$  が図の斜線領域に入らないようにして設計を行う。ボード線図を用いると、ゲインと位相が制御対象のグラフに制御器のグラフを加えるだけで求まるため大変便利である。

基本的な制御系の設計指針は、上述の通りである。以下では、一巡伝達関数  $G_o(s)$  がむだ時間要素を含まないプロパーな有理関数で、極や零点が左半平面上に存在する**最小位相系**(minimum phase system)の場合について設計指針を具体的に述べる。

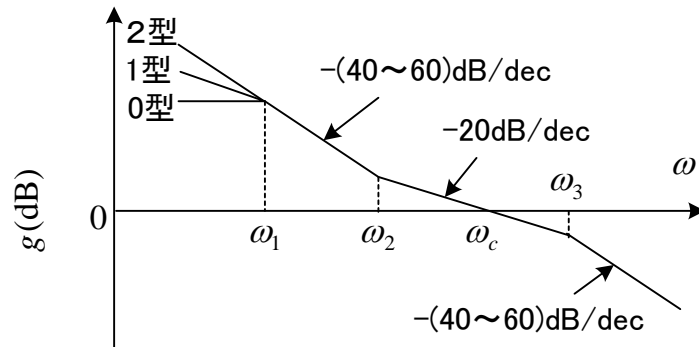


図 10-4 望ましい一巡伝達関数  $G_o(j\omega)$  のゲイン特性 (文献(5)より)

(1) 目標値や外乱の存在する周波数帯域が  $\omega_2$  以下であるとすれば,  $\omega_2$  以下では目標値追従特性と外乱除去特性を良くするため, ゲインを高くする必要がある。この帯域では, PI 補償や位相遅れ補償を行うとゲインを高くできる。特に,  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  では,  $-40 \sim -60\text{dB/dec}$  の部分を作り定常偏差を小さくする。ステップ応答に対する定常偏差を完全に 0 にするには,  $\omega = 0$  のときゲインが  $\infty$  となる必要があるから,  $\omega < \omega_1$  では, 1 型 ( $-20\text{dB/dec}$ ) か 2 型 ( $-40\text{dB/dec}$ ) でなくてはならない。制御対象が  $1/s$  を積の形で含まないとき, PI 制御器を使うと 1 型となる。

(2) ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  付近の位相の遅れは安定性 (減衰性) と関係し, 十分な位相余裕を確保するためには,  $\omega_c$  付近のゲインの傾斜は緩やかであることが必要である。**ボードの定理**によるとゲインと位相の関係は独立でなく,  $-20\text{dB/dec}$  の傾斜が長く続くと位相の遅れは  $90$  度に近くなり, 位相余裕  $90$  度が確保できる ( $G_o(s)$  がプロパーな有理関数で最小位相系の条件が必要で, むだ時間を含む場合は成立しない)。そこで,  $\omega_2 < \omega < \omega_3$  では,  $-20\text{dB/dec}$  の傾斜とする。必要に応じて,  $\omega_2 < \omega < \omega_3$  で位相進み補償や微分 (D) 補償を行って十分な位相余裕が得られれば, 全体のゲインを上げて  $\omega_c$  を大きくできるので, 速応性を増すこともできる。

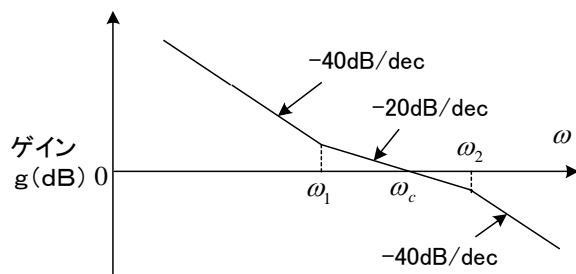
(3)  $\omega_3$  以上の周波数帯は, 雑音やモデル化誤差の影響が大きくなるので, ゲインを十分に落とす。このため, 出力信号を検出するときに低域通過フィルタ (ローパスフィルタ) を用いて, 雑音を除去するのが普通である。低域通過フィルタも一巡伝達関数の一部と成る。しかし, 低域通過フィルタの挿入は位相の遅れを伴うので, 雑音の周波数帯域がゲイン交差角周波数  $\omega_c$  に近いときは, 安定性を損なう恐れがあるので注意が必要である。

(問題 10-1) 図は制御系設計の基本となる一巡伝達関数のボード線図である。以下の問いに答えよ。

(1)  $\omega_c$  は何と呼ばれるか。

(2)  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  の部分を  $-20\text{dB/dec}$  にするのは何故か。位相余裕との関係も含め答えよ。

- (3)  $\omega < \omega_1$  でゲインを大きく選ぶ理由を述べよ。 $\omega = 0$  でゲインを無限大にする利点は？  
 (4)  $\omega_2 < \omega$  で、ゲインを小さく選ぶ理由を述べよ。



## 10.4 補償要素と制御系の設計

ボード線図上では、

### 望ましい一巡伝達関数 = 制御対象の伝達関数 + 制御器の伝達関数

が成り立つので、望ましい一巡伝達関数を決めると制御器の伝達関数が決まってくる。これが制御器の設計である。図 10-3 や図 10-4 の望ましい周波数特性を実現するためには、制御器に以下の補償要素を単独または組み合わせて（掛け合わせて）使用すれば良い。

1) 比例要素  $C(s) = K_c$  (10-9)

2) 積分要素  $C(s) = 1/(sT)$  (10-10)

3) 微分要素  $C(s) = K_c s$  (10-11)

4) PD 要素  $C(s) = K_p(1 + T_D s)$  (10-12)

5) 一次遅れ要素  $C(s) = 1/(1 + sT)$  (10-13)

6) PI 要素  $C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_I s})$  (10-14)

7) 位相進み要素(phase lead element)  $C(s) = K_c \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}$  ( $\alpha > 1$ ) (10-15)

8) 位相遅れ要素(phase lag element)  $C(s) = K_c \frac{\alpha(T s + 1)}{\alpha T s + 1}$  ( $\alpha > 1$ ) (10-16)

9) 位相進み-遅れ要素(phase lead-lag element)

$$C(s) = K_c \frac{\alpha_1 T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \frac{\alpha_2 (T_2 s + 1)}{\alpha_2 T_2 s + 1} \quad (\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1) \quad (10-17)$$

10) PID 要素  $C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$  (10-18)

\* 比例要素は他の要素の中に含まれているものもある。

以下に、位相進み補償、位相遅れ補償、PID 補償に関して述べる。

## ○ 位相進み補償

まず、位相進み要素のボード線図の略図を描く。(10-15)で  $s = j\omega$  とおいて

$$C(j\omega) = K_c \frac{j\omega\alpha T + 1}{j\omega T + 1} = \begin{cases} K_c & : \omega T < \omega\alpha T < 1 \quad (\omega < 1/(\alpha T)) \\ jK_c\omega\alpha T & : \omega T < 1 < \omega\alpha T \quad (1/(\alpha T) < \omega < 1/T) \\ K_c\alpha & : 1 < \omega T < \omega\alpha T \quad (1/T < \omega) \end{cases}$$

と近似して、ボード線図が以下のように描ける。

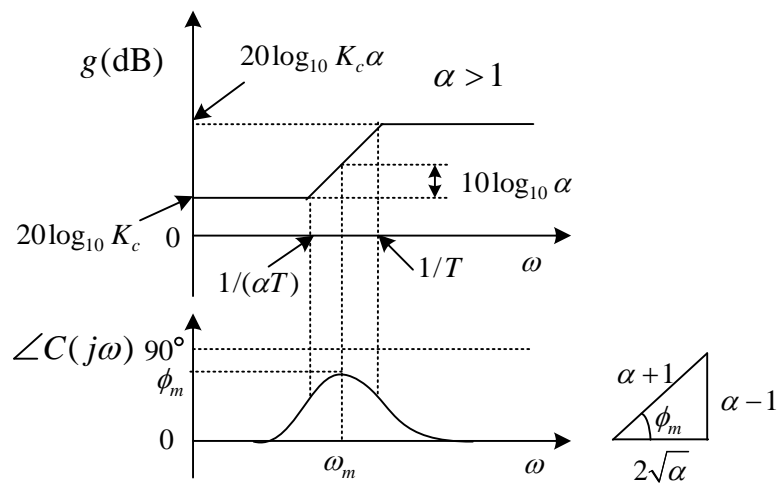


図 10-5 位相進み要素のボード線図

図 10-5 で、位相が最大となる点を求める。

$$\angle C(j\omega) = \angle(1 + j\omega\alpha T) - \angle(1 + j\omega T) = \tan^{-1} \omega\alpha T - \tan^{-1} \omega T \quad (10-19)$$

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{\alpha T}{1 + (\omega\alpha T)^2} - \frac{T}{1 + (\omega T)^2} = 0 \quad \text{より}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}, \quad \phi_m = \tan^{-1} \sqrt{\alpha} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (10-20)$$

(10-20)で  $\tan \phi_m$  を計算すると、 $\tan(\phi_1 - \phi_2) = (\tan \phi_1 - \tan \phi_2) / (1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2)$  だから

$$\tan \phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad \therefore \sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (\text{図 10-5}) \quad \therefore \alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (10-21)$$

$\omega_m$  を位相進み要素を含めた全体の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  と等しくなるように設計すると、位相余裕を大きくできるので安定性が改善できる。進めたい位相  $\phi_m$  が大きいほど  $\alpha$  を大きく選ぶ必要がある ( $g$  が増加する部分が広がる)。ただし、高周波でゲインが高くなるのでノイズの影響を受けやすくなることに注意する必要がある。

図 10-6 の制御系で位相進み補償の設計例を以下に示す。設計仕様は、速度偏差定数  $K_v = 10$ ，位相余裕 40 度以上とする。

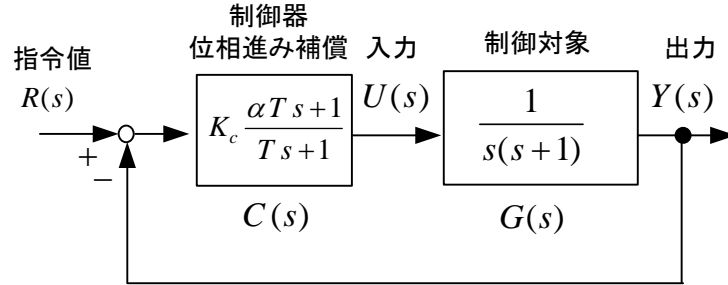


図 10-6 位相進み補償の設計例

一巡伝達関数は、次式で与えられる。

$$G_0(s) = K_c \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} \frac{1}{s(s+1)} \quad (\alpha > 1) \quad (10-22)$$

速度偏差定数  $K_v$  が 10 になるように  $K_c$  を設計する。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0 = K_c = 10 \quad (10-23)$$

そこで、 $10/(s(s+1))$  のボード線図を描くと、図 10-7 の補償なし ( $C(s) = 10$  の比例制御に相当) が得られる。ゲイン交差角周波数  $\omega_c = 3$ ，位相余裕 18 度である。ボード線図やこれらの値は、市販のソフトウェア Matlab が利用できる。

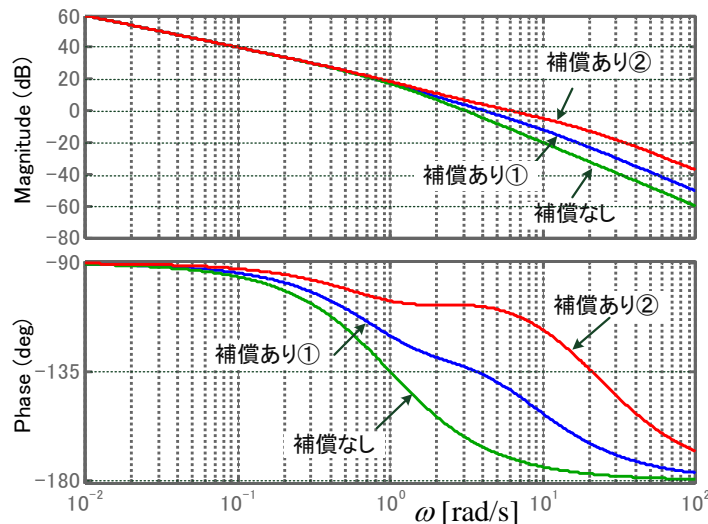


図 10-7 図 10-6 の一巡伝達関数  $G_0(s) = C(s)G(s)$  のボード線図

位相進み補償の最大位相  $\phi_m = 30^\circ$  と設定すると、(10-21)より



$$\alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 3 \quad (10-24)$$

図 10-5 より、 $\phi_m = 30^\circ$  で、ゲインの増加は  $10 \log_{10} \alpha = 10 \log_{10} 3 = 4.77 \text{dB}$  となる。このため位相進み補償を追加するとゲイン交差角周波数は補償なしの場合に比べて増加し、ちょうど  $4.77 \text{dB}$  増える点を、補償後のゲイン交差角周波数とする。補償なしのボード線図でゲインが  $-4.77 \text{dB}$  の角周波数  $\omega_m$  を見つけると、 $\omega_m = 4.1$  が得られる（精密な図か数値計算がないと精度は悪いが）。(10-20)より、

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_m} = \frac{1}{\sqrt{3} \times 4.1} = 0.141 \quad (10-25)$$

この結果、 $\alpha T = 3 \times 0.141 = 0.423$  だから、位相進み補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = 10 \frac{0.423s + 1}{0.141s + 1} \quad (\text{補償あり①}) \quad (10-26)$$

この場合を補償あり①として図 10-7 に示している。図より、ゲイン交差角周波数は 4.1 であるが、位相余裕は  $43.6$  度しかない。 $18$  度  $+ 30$  度より小さくなったのは、最終的なゲイン交差角周波数が補償なしの場合より増えたため、補償なしの位相が  $18$  度より低下したためである。

(10-24)で、 $\phi_m = 60^\circ$  として、同様に設計した位相進み補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = 10 \frac{0.622s + 1}{0.045s + 1} \quad (\text{補償あり②}) \quad (10-27)$$

この場合のボード線図を補償あり②として図 10-7 に示した。このときゲイン交差角周波数は 6.1 であり、位相余裕は  $69$  度である。

フィードバック制御系の  $r(t) = 1$  に対する各場合のステップ応答を図 10-8 に示す。

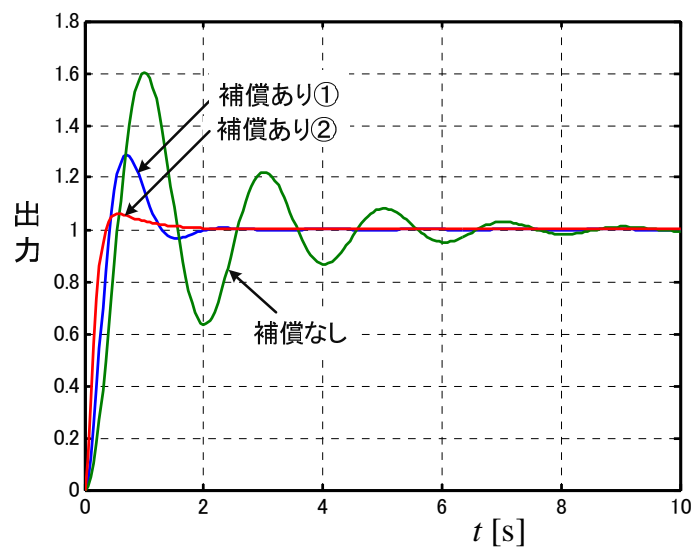


図 10-8 図 10-6 のステップ応答

補償あり②の場合は、ゲイン交差角周波数が最も高いので立ち上がり時間が短く、位相余裕が大きいのでオーバーシュートも小さい。 $\phi_m$ を変えて数回設計を行うと希望する位相余裕の制御器が得られる。図中の“補償なし”は $C(s)=10$ の比例制御の場合である。

## ○ 位相遅れ補償

まず、位相遅れ要素のボード線図の略図を描く。

$$C(j\omega) = K_c \frac{\alpha(j\omega T + 1)}{j\omega\alpha T + 1} = \begin{cases} K_c\alpha & : \omega T < \omega\alpha T < 1 & (\omega < 1/(\alpha T)) \\ 1/(j\omega T) & : \omega T < 1 < \omega\alpha T & (1/(\alpha T) < \omega < 1/T) \\ K_c & : 1 < \omega T < \omega\alpha T & (1/T < \omega) \end{cases}$$

と近似して、ボード線図が図 10-9 のように描ける。

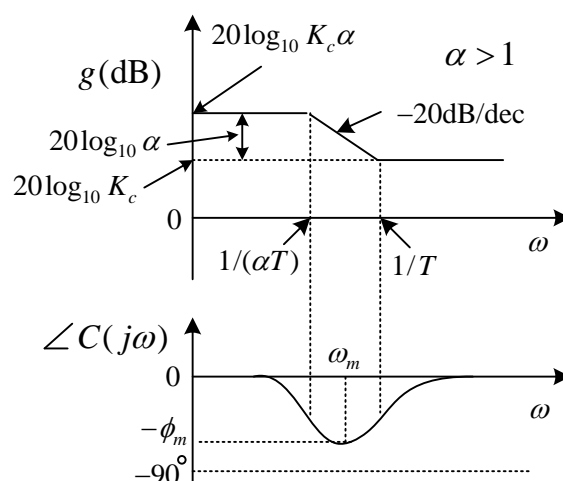


図 10-9 位相遅れ要素のボード線図

図 10-9 で、位相が最小となる点を求める。

$$\angle C(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) - \angle(1 + j\omega\alpha T) = \tan^{-1} \omega T - \tan^{-1} \omega\alpha T \quad (10-28)$$

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega) = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{\alpha T}{1 + (\omega\alpha T)^2} = 0 \quad \text{より}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}, \quad \phi_m = \tan^{-1} \sqrt{\alpha} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -\angle C(j\omega) > 0 \quad (10-29)$$

$\tan \phi_m$  を計算すると

$$\tan \phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad \therefore \quad \sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (\phi_m > 0) \quad (10-30)$$

①  $1/T$  を補償前の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  の  $1/10$  程度に設計すると、補償前の位相余裕に余り影響を及ぼすことなく低周波領域でゲインを大きくでき定常特性が改善される。 $\alpha$  を大きく選ぶとその分ゲインが大きくなる( $g$ が増加する部分が広がる)。た

だし、 $\alpha$ を大きく選ぶと $\phi_m$ （位相遅れ）が大きくなる。② 別の利用法としては、 $K_c < 1$ とし、交差角周波数を低くして位相余裕を増加させることも考えられる。

図 10-10 で①の場合につき位相遅れ補償の設計例を以下に示す。制御対象の伝達関数は位相進み補償などによりゲイン交差角周波数や位相余裕が適切に設計されており、これに影響を及ぼすことなく速度偏差定数  $K_v = 100$  とすることが設計仕様である。

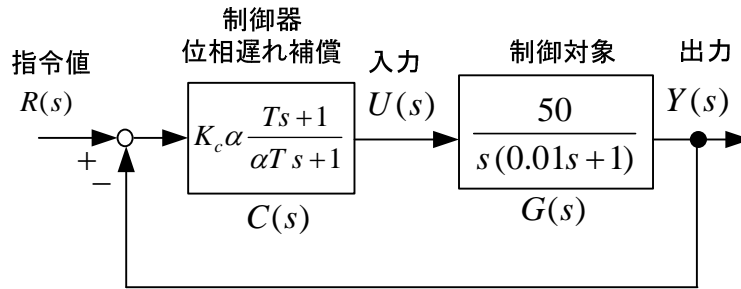


図 10-10 位相遅れ補償の設計例

一巡伝達関数は、次式与えられる。

$$G_0(s) = K_c \frac{\alpha(Ts+1)}{\alpha Ts+1} \frac{50}{s(0.01s+1)} \quad (\alpha > 1) \quad (10-31)$$

ゲイン交差角周波数より高い周波数領域では、題意よりゲインは変えられないので  $K_c = 1$  でなければならない。速度偏差定数  $K_v$  が 10 になるように  $\alpha$  を設計する。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0 = 50K_c\alpha = 100 \quad (10-32)$$

これから、 $\alpha = 2$  が得られる。

次に、制御対象  $G(s)$  のボード線図を描くと、図 10-11 の補償なし ( $C(s) = 1$  の比例制御に相当) が得られる。ゲイン交差角周波数  $\omega_c = 45.5$ ，位相余裕 65.5 度である。ボード線図やこれらの値は、市販のソフトウェア Matlab が利用できる。  $1/T$  を補償前の一巡伝達関数のゲイン交差角周波数  $\omega_c$  の 1/10 に設計すると、

$$\frac{1}{T} = \frac{45.5}{10} \quad \therefore T = 0.22$$

この結果、位相進遅れ補償の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = \frac{2(0.22s+1)}{0.44s+1} \quad (\text{補償あり}) \quad (10-33)$$

この場合の  $G_0(s)$  を補償ありとして図 10-11 に示している。図より、補償前のゲイン交差角周波数や位相余裕にほとんど影響を及ぼすことなく、低周波領域のゲインが増加している。なお、低周波領域で位相の遅れは大きくなっているが線形システムである限り安定性に問

題はない。比較のため、図 10-11 には制御対象のゲインを 2 倍した  $2G(s)$  ( $C(s)=2$  の比例制御に相当) のボード線図も示している。補償前に比べると、位相は同じで、ゲインのみ 6dB 増加している。位相遅れ補償のゲインは、高周波では補償なしの  $G(s)$ 、低周波では  $2G(s)$  と重なる。

フィードバック制御系の  $r(t)=1$  に対する各場合のステップ応答を図 10-12 に示す。補償なしに比べて、位相遅れ補償後は定常値に速く収束していることが判る。 $C(s)=2$  の比例制御の場合には、ゲイン交差角周波数が高くその分位相余裕は減少するので、速く立ち上がるが、オーバーシュートが大きくなっている。

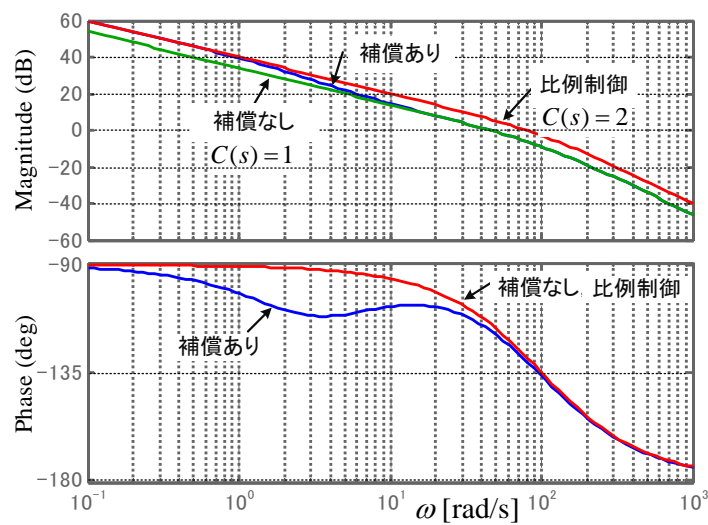


図 10-11 図 10-10 の一巡伝達関数  $G_0(s) = C(s)G(s)$  のボード線図

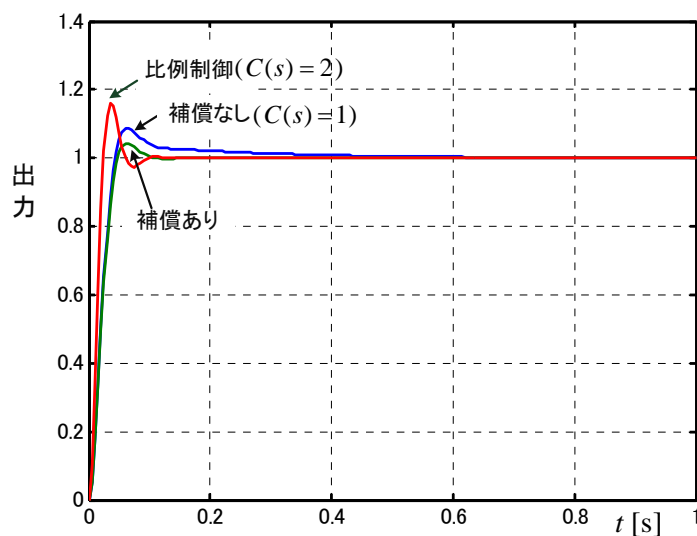


図 10-12 図 10-10 のステップ応答

## ○ PID 補償

比較のため、まず P 制御（比例制御）のボード線図を図 10-13 に示す。比例制御は周波数に無関係に一定だから、ゲイン  $g$  は一定値であり、位相  $\angle G(j\omega)$  は 0 である。

PI 制御（比例積分制御）の場合には、

$$C(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{jT_I \omega}\right)$$

$$= \begin{cases} K_p / (jT_I \omega) & : \omega < 1/T_I \\ K_p(1 - j) & : \omega = 1/T_I \quad (\text{折点角周波数}) \\ K_p & : \omega > 1/T_I \end{cases} \quad (10-34)$$

となる。周波数が低い領域では、積分制御となりゲインは  $\omega \rightarrow 0$  で無限大となる。すなわち直流信号に対しては PI 制御器の出力はいくらでも大きくなり、このことでステップ応答の定常偏差が 0 となる。しかし、位相は遅れるので、位相余裕が低下する原因をもつ。折点角周波数は  $\omega = 1/T_I$  で、実部と虚部を等しいと置くことで求まる。ゲインは、

$$g = 20 \log_{10} |C(j\omega)| = 20 \log_{10} |K_p(1 - j)| = 20 \log_{10} K_p + 10 \log_{10} 2$$

$$\approx 20 \log_{10} K_p + 3 \quad (10-35)$$

となり、図の折れ線近似より約 3dB 増加する。このとき、位相は -45 度となる。これより周波数が高い領域では積分項は無視できて、P 制御となり、ゲインは一定で位相遅れもなくなる。PI 制御は、位相遅れ補償に比べて  $\omega = 0$  でゲインが無限大になる利点があり、制御対象に  $1/s$  が含まれていない場合その効果を発揮する。

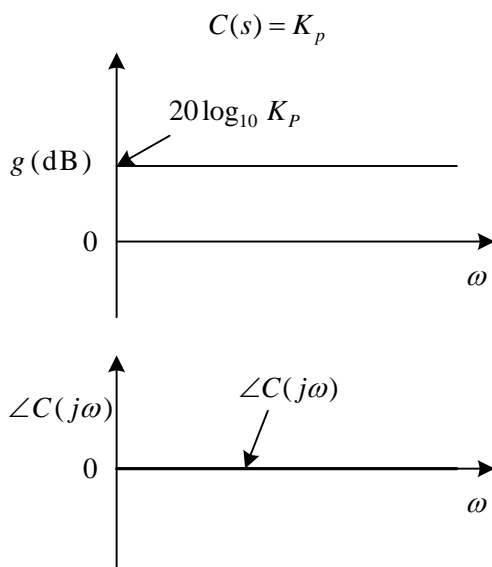


図 10-13 比例 (P) 制御のボード線図

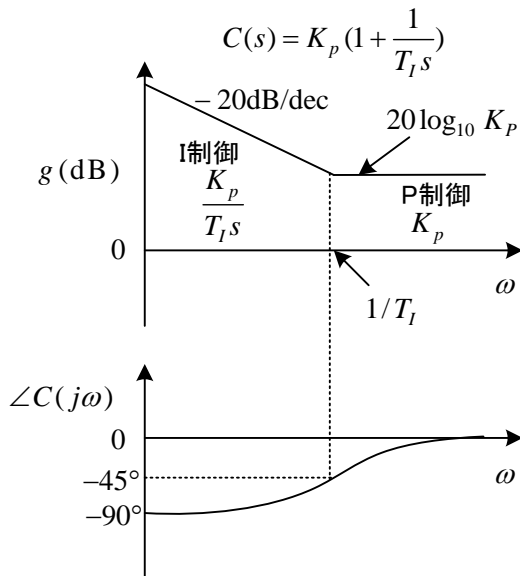


図 10-14 比例積分 (PI) 制御のボード線図

PID 制御の伝達関数は、 $T_D \ll T_I$  とすると周波数領域によって次のように近似できる。

$$C(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{jT_I \omega} + jT_D \omega \right) = \begin{cases} K_p / (jT_I \omega) & : \omega < 1/T_I \\ K_p (1 - j) & : \omega = 1/T_I \\ K_p & : 1/T_I < \omega < 1/T_D \\ K_p (1 + j) & : \omega = 1/T_D \\ jK_p T_D \omega & : 1/T_D < \omega \end{cases} \quad (10-36)$$

このとき、折れ線近似したボード線図を図 10-15 に示す。PI 制御に比べ、周波数の高い領域で微分器として働き、ゲインが増加し位相が 90 度まで進む。微分特性は制御対象の遅れを打ち消し、-40dB/dec の特性を部分的に -20dB/dec にしたいときに利用する。しかし、高周波領域でゲインを大きくすることは、ノイズの影響を受けやすくなるので、センサのノイズ特性、配線方法、電磁的環境などを考慮に入れる必要がある。従って、実際には必要以上に高周波でゲインを大きくしないため、不完全微分が用いられる。この場合の伝達関数は、次式で与えられる。

$$C(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{jT_I \omega} + \frac{jT_D \omega}{1 + j\eta T_D \omega} \right) \quad (10-37)$$

ここで、 $1/\eta$  は通常 1~10 程度が選ばれる。この場合のボード線図を図 10-16 に示す。純粋な PID 制御に比べ、高周波領域でゲインが一定となり P 制御の特性となる。

PID 制御は、位相進み-遅れ補償と類似の特性改善が可能となる。すなわち、低周波領域の定常特性改善とゲイン交差角周波数付近での安定性改善である。制御対象に積分器が含まれていない 0 型の制御対象では、位相進み-遅れ補償はステップ応答の定常偏差を 0 にできないが、PID 制御では 0 にできる利点がある。

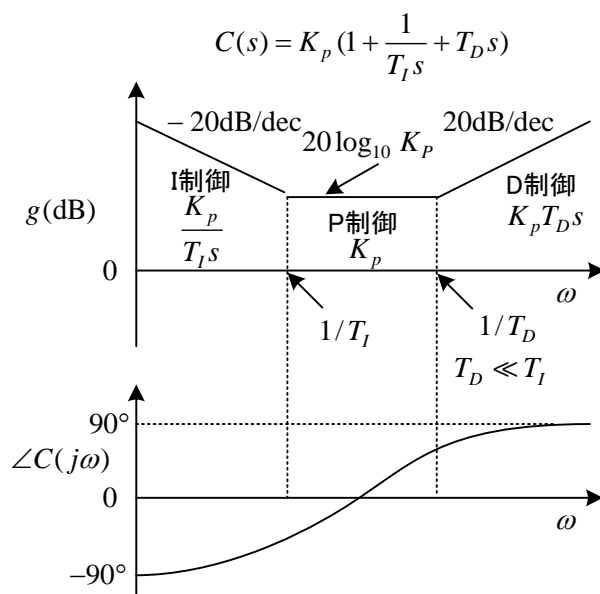


図 10-15 比例積分微分 (PID) 制御のボード線図

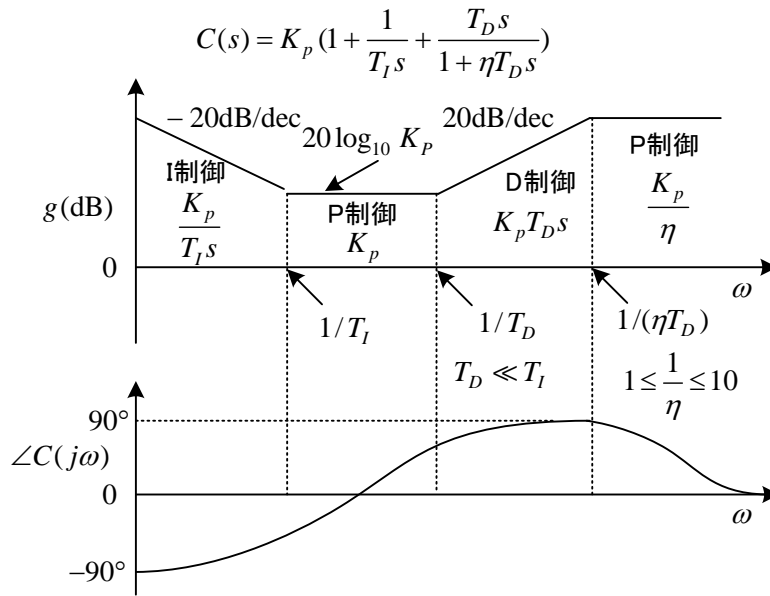
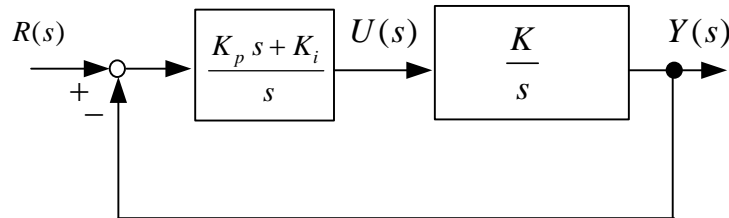


図 10-16 不完全微分を用いた比例積分微分 (PID) 制御のボード線図

(問題 10-2) 図の制御系で、ゲイン交差角周波数が  $\omega_c$ 、位相余裕が  $\phi$  となるように、PI 制御器の比例ゲイン  $K_p$  と積分ゲイン  $K_i$  を設計せよ。



(解) 一巡伝達関数は  $G_0(s) = \frac{K(K_p s + K_i)}{s^2}$   $\therefore G_0(j\omega) = \frac{K(j\omega K_p + K_i)}{(j\omega)^2}$

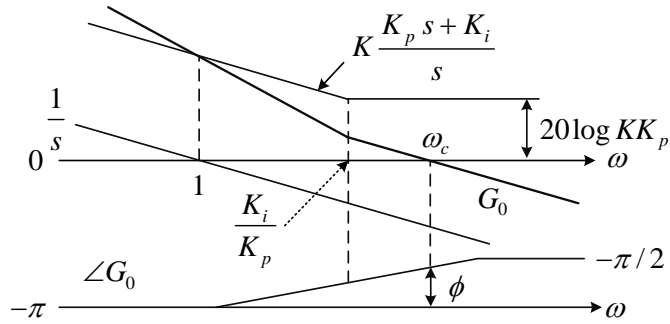
ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  なので  $|G_0(j\omega_c)| = \frac{K\sqrt{(K_p \omega_c)^2 + K_i^2}}{\omega_c^2} = 1$  より

$$\omega_c^4 - (K K_p)^2 \omega_c^2 - (K K_i)^2 = 0 \quad \text{①} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{(K K_p)^2 + \sqrt{(K K_p)^4 + 4(K K_i)^2}}{2}} \quad \text{②}$$

位相余裕  $\phi$  は、 $\phi = \angle G_0(j\omega_c) + \pi$   $\therefore \phi = \tan^{-1} \frac{K_p \omega_c}{K_i}$   $\therefore K_p = \frac{K_i}{\omega_c} \tan \phi$  ③

③を①に代入し  $K_i$  を求めると

$$K_i = \frac{\omega_c^2}{K} \frac{1}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \quad \text{③より} \quad K_p = \frac{\omega_c}{K} \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}}$$



### 10.5 2 自由度制御系

これまで、図 10-17 に示す制御器（この形を直列補償要素という）について考えてきた。この形は 1 自由度制御系と呼ばれ、(10-1), (10-2) に述べたように、目標値追従特性と外乱抑圧特性は独立に設計できない。このとき、ゲイン交差角周波数を高く設計すると、外乱抑圧には適するが、ステップ応答に大きなオーバーシュートが生じるといった問題が生じることが考えられる。

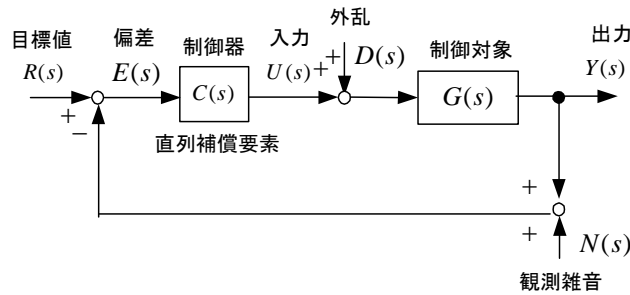


図 10-17 1 自由度制御系

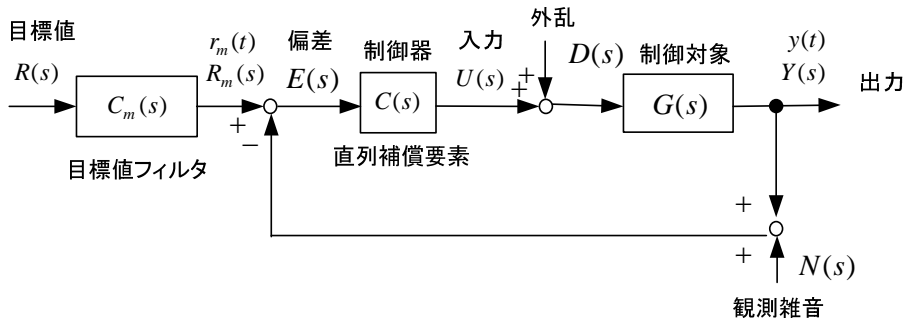


図 10-18 2 自由度制御系（目標値フィルタ形）



図 10-18 に 2 自由度制御系と呼ばれる制御器の構成の一例を示す。図の制御器は、直列補償要素の他に、目標値フィルタと呼ばれるものからなる。大雑把に言うと、外乱を抑制するように  $C(s)$  を設計し、目標値フィルタで比較的ゆっくり変化する指令値  $r_m(t)$  を作り、出力  $y(t)$  をそれに追従させる。図 10-17 でも指令値を  $r_m(t)$  で与えれば同じでことある。

例えば、目標値フィルタ  $C_m(s)$  を一次のローパスフィルタとすると、

$$C_m(s) = \frac{1}{1+sT} \quad (10-38)$$

と書ける。このとき、目標値のステップ変化に対し、 $r_m(t)$  は図 10-19 のようになる。

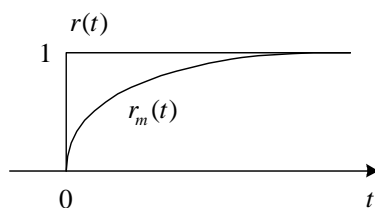


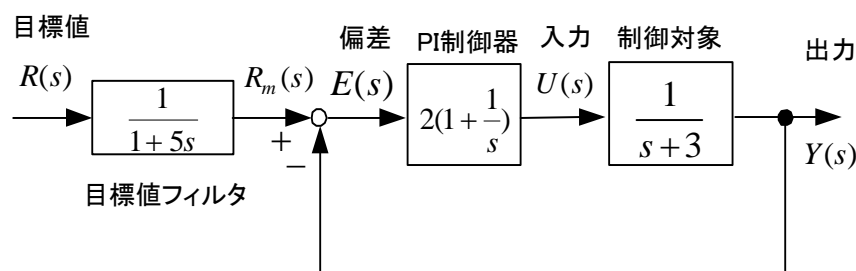
図 10-19 目標値フィルタの出力

目標値に対する出力の閉ループ伝達関数は、

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C_m CG}{1+CG} \quad (10-39)$$

となり、 $C_m$  により応答が変えられる。ただし、制御系の安定性は、特性方程式で決まるから、 $C_m$  によってそれを変えることはできない (不安定な系を安定にすることはできない)。もちろん、 $C_m$  自身は安定な伝達関数 (右半平面に極がない) でなくてはならない。

(問題 10-3) 図の 2 自由度制御系は安定な制御系かどうか判定せよ。



(解) 特性方程式の根は  $s = -\frac{1}{5}, \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$  だから安定である。

(このように、目標値フィルタの伝達関数は元々の特性方程式に影響を与えない)

図 10-20 は目標値フィードフォワード形の 2 自由度制御系である。素早く目標値に追従させる

ため制御対象  $G(s)$  の逆システムを  $C_2(s) = 1/G(s)$  で作り、誤差部分をフィードバックで補償する (文献 (19))。ただ、 $C_2(s)$  は微分器動作になるため、 $C_3(s)$  により目標値応答を指定する。この結果  $C_3(s)C_2(s)$  は微分動作にはならないだろう。安定性や外乱に対する応答は  $C_1(s)$  だけで決る。

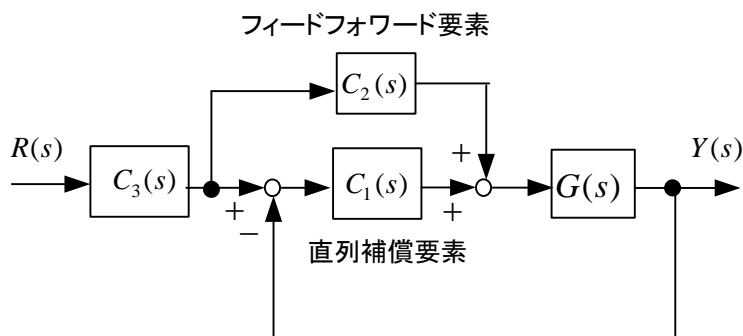


図 10-20 2 自由度制御系 (目標値フィードフォワード形)

図 10-18 と図 10-20 が等価となる条件を求めてみよう。図 10-20 で、加え合わせ点を移動して、図 10-21 の等価ブロック図を得る。

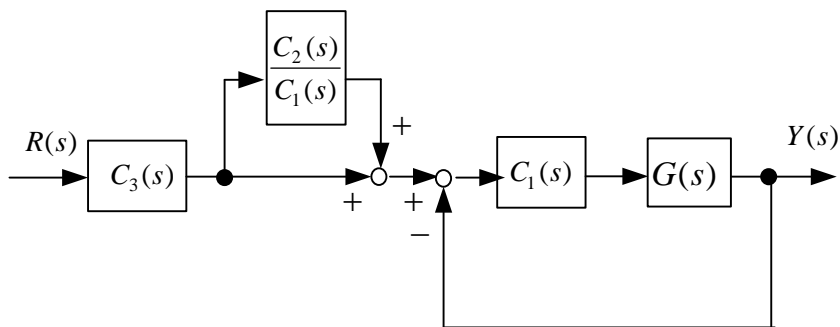


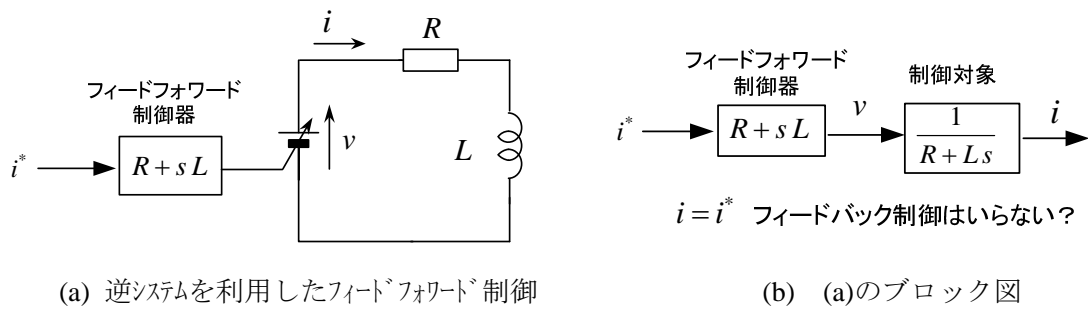
図 10-21 図 10-20 の等価ブロック図

これから、次式が成立すれば、両者は等価である。ただし、図 10-20 には明確な設計思想がある。

$$C_m(s) = C_3(s) \left( 1 + \frac{C_2(s)}{C_1(s)} \right) \quad (10-40)$$

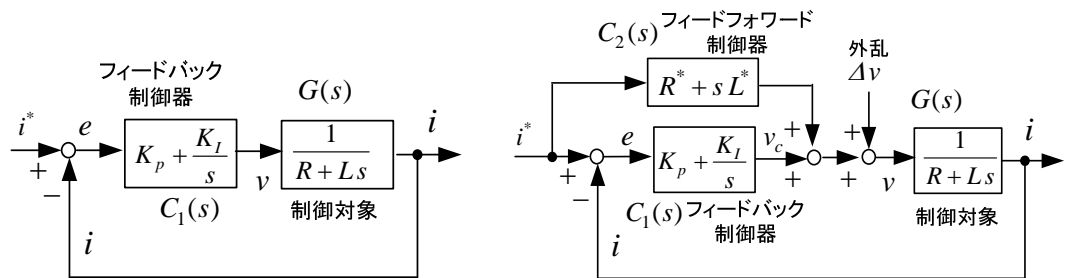
$$C(s) = C_1(s) \quad (10-41)$$

簡単な例を使って、**フィードフォワード制御**( feedforward control)について改めて考えてみよう。図 10-22 (a)は、電流を  $i = i^*$  と制御するため、フィードフォワード制御を行った制御系である。このブロック図は(b)となる。このとき、伝達関数は  $I(s)/I^*(s) = 1$  となり、瞬時に電流が制御できそうである。つまり、フィードバック制御なしで電流が制御できる。



(a) 逆システムを利用したフィードフォワード制御

(b) (a)のブロック図



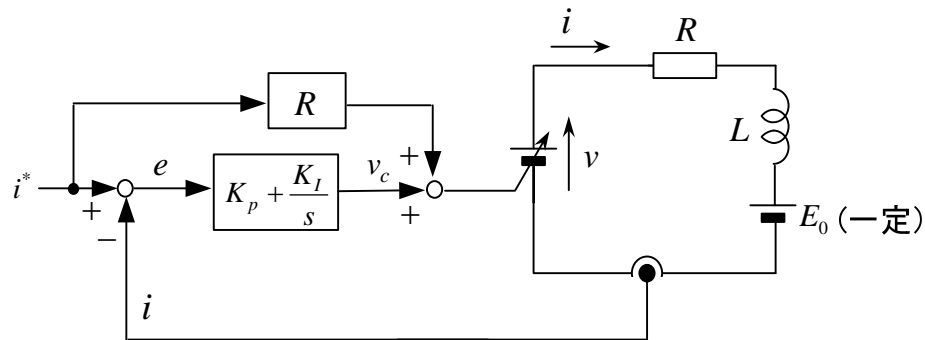
(c) フィードバック制御

(d) 目標値フィードフォワード形2自由度制御

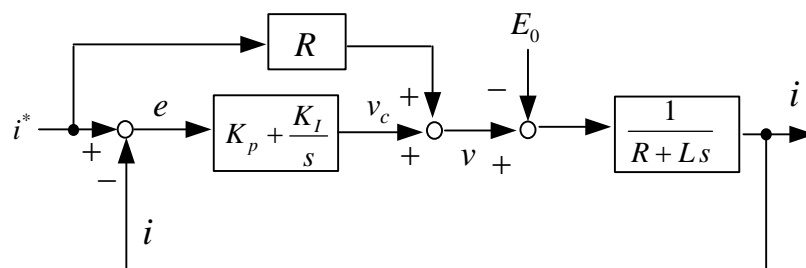
図 10-22 フィードバック制御とフィードフォワード制御

しかし、実際にはうまく制御することは困難である。理由は、抵抗は温度や電流の大きさで値が変化すること、インダクタンスは飽和することがあり厳密には電流の関数であること、電源電圧の精度や最大値に限界があることなどである。このために、実際には、図(c)のフィードバック制御が良く使われている。(d)は目標値フィードフォワード形の2自由度制御である。(b)と(c)を組み合わせた構造になっている。制御器で使う抵抗やインダクタンスは実際と違うので、\*印をつけている。(d)の場合、制御対象のパラメータ変化や外乱をフィードバック制御器  $C_1(s)$  が分担している。仮に、 $R^* = R, L^* = L$ 、外乱  $\Delta v = 0$  であれば、 $v_c = 0$  となって、 $C_1(s)$  の働きはブロック図で考える限りなくなる。(c) に比べて(d)の方が、電流の応答は速くなると考えられる。しかし、電流指令  $i^*$  を急に変化させると、その微分が非常に大きくなって、入力電圧  $v$  も非常に大きな値となる。現実には入力電圧  $v$  には限界があるから、制御器にリミッタを設けて入力電圧を制限するか図 10-20 の  $C_3(s)$  を導入する。この結果、電流の高速応答が制限される。そうすると、ゲインを大きく選んだ場合の(c)の特性と大差がなくなる可能性もある。ただし、(c)は(d)に含まれており、目標値フィードフォワード形は、目標値応答と外乱除去を考えた設計法と見ることができよう。

(問題 10-4) 図は目標値フィードフォワード形の P I 制御系である。電流の指令値  $i^*$  が一定値であるとき、定常状態での、実際の電流  $i$ 、偏差  $e$ 、P I 制御器の出力  $v_c$ 、P I 制御器の中にある積分器の出力  $v_i$ 、電源電圧  $v$  を求めよ。ただし、回路の中の直流電源  $E_0$  (外乱とする) は一定で、 $v = v_c + Ri^*$  である。また、制御システム全体のブロック図を書け。さらに、P I 制御器が P 制御である場合、定常状態での、実際の電流  $i$ 、偏差  $e$ 、P 制御器の出力  $v_c$ 、電源電圧  $v$  を求めよ。



(解) PI 制御の場合： P I 制御の積分器の働きで、電流指令が一定の定常状態では  $i = i^*$  となる。よって、 $e = 0$  となる。また定常状態では電流が一定なのでコイルの電圧は 0 となる。従って回路の式から  $v = Ri^* + E_0$  となる。 $v = Ri^* + v_c$  なので、 $v_c = E_0$  となる。



ブロック図から定常値を求める場合には、指令値や外乱が一定なら  $s = 0$  とおくことで得られる。これは微分が 0 に対応する。積分器の項が  $\infty$  となるが、 $v_c$  が有限であるためには  $e = 0$  と考えればよい。このとき  $i = i^*$  である。P I 制御器の中にある比例制御の出力は 0 であるから、積分器の出力  $v_i = E_0$  となる。

P 制御の場合：ブロック図で  $s = 0$  と置いて求める。

ブロック図より  $\frac{K_p(i^* - i) + Ri^* - E_0}{R} = i$  だから

$$i = i^* - \frac{E_0}{R + K_p}, e = \frac{E_0}{R + K_p}, v_c = \frac{K_p E_0}{R + K_p}, v = Ri^* + \frac{K_p E_0}{R + K_p}$$

比例制御では偏差  $e$  は 0 にならない。