

# 第 11 章 制御系の設計 II

本章では、工場の生産ライン、家電製品、工作機械、ロボット、エレベータ、電車、電気自動車などの制御に利用される電動機制御系の設計と温度や圧力等を制御するプロセス制御の設計および電子回路である PLL 周波数シンセサイザの設計について述べる。

## 11.1 電動機制御系の設計

### (1) モータの速度制御系の構成

DC モータはトルクを発生し、その大きさは電流に比例する。そこで、まず電流をきちんと制御して、その上で速度を制御することを考える。制御の演算は一般にマイクロコンピュータで行われ、その出力である電圧指令を電力変換器で増幅して実際の電圧を作りモータに加える。一般に、電力変換器は単純な比例要素と考えられるので、この部分は電流制御器の一部としてとらえる。なお、交流モータでも同様の設計が可能である。

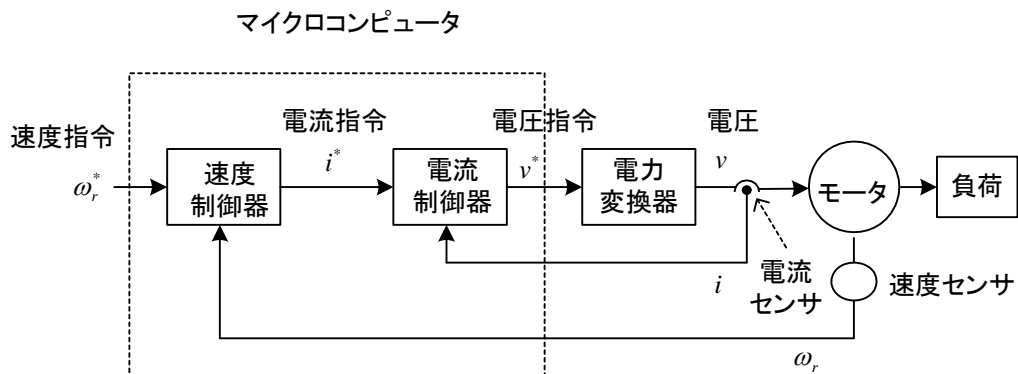


図 11-1 モータの速度制御系

### (2) 電流制御器の設計

電流制御器の設計法について述べる。制御対象のモータは、その電気回路をインダクタンスと抵抗の直列回路として考えることにする。このときのブロック図を図 11-2 に示す。

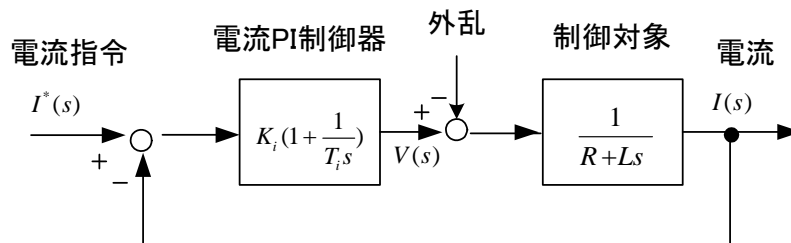


図 11-2 電流制御系のブロック図

モータの誘導起電力は外乱とみなしている。線形システムだから外乱は 0 と考えて設計する。電流制御器としては、PI 制御器を用いることとする。図で、一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{1}{R + Ls} = K_i \frac{T_i s + 1}{T_i s} \frac{1}{R(1 + (L/R)s)} \quad (11-1)$$

となる。いま、

$$T_i \equiv L/R \quad (11-2)$$

と設計すると、(11-1)より極と零点が相殺して（安定な極と零点の相殺は問題ない）

$$G_o(s) = K_i / (T_i R s) = K_i / (L s) \quad (11-3)$$

の積分特性となる。このとき、ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  は  $|G_o(j\omega)|=1$  より次式となる。

$$\omega_c = K_i / L \quad (11-4)$$

この場合の電流制御の閉ループ伝達関数を求めると次式となる。

$$\frac{I}{I^*} = \frac{K_i / (Ls)}{1 + K_i / (Ls)} = \frac{K_i}{Ls + K_i} \equiv \frac{1}{T_{eq}s + 1} \quad (11-5)$$

$$\text{ただし、} T_{eq} = L / K_i = 1 / \omega_c$$

このとき、閉ループ伝達関数の折点角周波数は  $\omega_c$  と一致する。

設計法としては、ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  を決めて、(11-2)より  $T_i$ 、(11-4)より  $K_i$  を求めればよい。 $R = 1.3\Omega$ 、 $L = 0.0098\text{H}$  の場合、 $\omega_c = 1000\text{rad/s}$  に設定すると、

$$K_i = L\omega_c = 0.0098 \times 1000 = 9.8, T_i = \frac{L}{R} = \frac{0.0098}{1.3} = 0.00754 \quad (11-6)$$

となる。 $\omega_c$  を種々設定した場合の一巡伝達関数のボード線図を図 11-3 に示す。

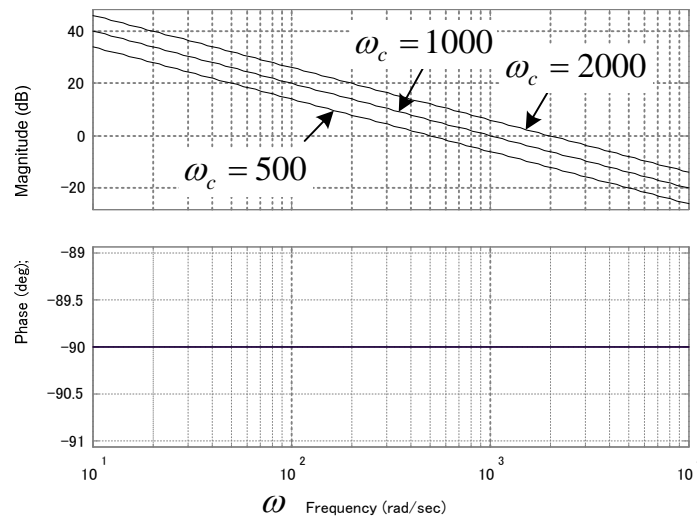


図 11-3 一巡伝達関数 ((11-3) 式) のボード線図

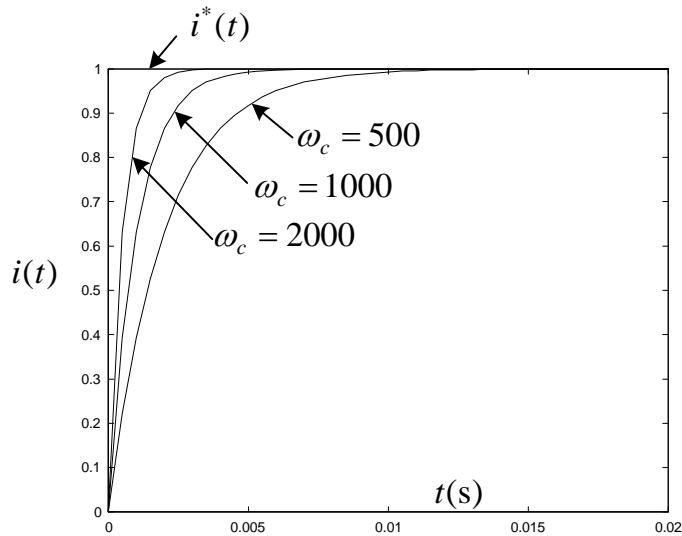


図 11-4 ステップ応答 ((11-5) 式)

また、図 11-4 は図 11-3 の  $\omega_c$  の設定値に対応した閉ループ系のステップ応答である。 $\omega_c$  を大きく設定するほど、速応性にすぐれていることが判る。 $\omega_c$  を大きく設定すると、(11-6) より PI 制御のゲイン  $K_i$  は大きな値となる。実際には、電圧を作る電力変換器の容量と性能、ノイズの問題、デジタル制御の問題などで  $\omega_c$  には上限がある。

### (3) 速度制御器の設計

次に、速度 PI 制御器の設計法について述べる。電流制御系が(11-5)で与えられるとき、速度制御系のブロック図は図 11-5 のように表せる(文献(7))。

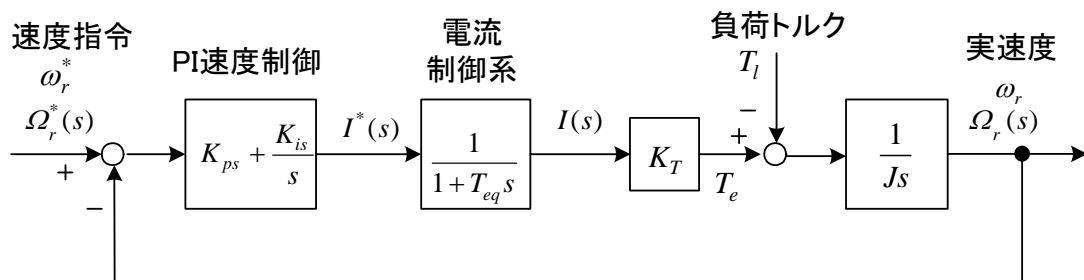


図 11-5 速度制御器設計のためのシステムのブロック図

DC モータの発生トルクは電流に比例し、次式で与えられる。なお DC モータについては例題 3-6 を参照のこと。

$$T_e = K_T i \tag{11-7}$$

このブロック図より速度制御系の一巡伝達関数は次式で表せる。

$$G_o(s) = \left(K_{ps} + \frac{K_{is}}{s}\right) \frac{1}{1+T_{eq}s} \frac{K_T}{Js} \quad (11-8)$$

これを基に、PI速度制御系を設計するためのボード線図を図11-6に示す(文献(7))。

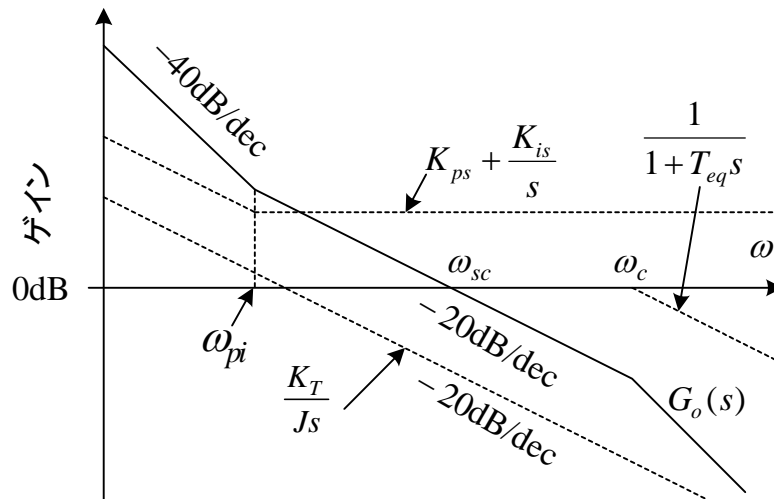


図 11-6 PI速度制御系の一巡伝達関数  $G_o(s)$

設計の基本的考え方として、速度制御系のゲイン交差角周波数  $\omega_{sc}$  付近では、 $-20\text{dB/dec}$  の特性を持つようにして安定性を確保する。これは $-20\text{dB/dec}$  の特性が長く続けば位相遅れが  $90$  度近くになり、 $180$  度に達しないので不安定とはならないからである。速度制御系の  $\omega_{sc}$  が電流制御系の折れ点角周波数  $\omega_c = 1/T_{eq}$  に近いとオーバシュートを生じやすくなるため、 $\omega_c$  は  $\omega_{sc}$  より数倍高く設計する。このため、 $\omega$  が  $\omega_{sc}$  付近では、電流制御の伝達関数は  $1$  と考えてよい。また、PI制御の折れ点角周波数  $\omega_{pi}$  は、 $s = j\omega$  とおき実部と虚部が等しいと置くことで、

$$\omega_{pi} = K_{is} / K_{ps} \quad (11-9)$$

であるが、 $\omega_{sc}$  において $-20\text{dB/dec}$  の傾きを確保するためには、 $\omega_{pi}$  は  $\omega_{sc}$  の  $1/5$  以下にする。この結果、 $\omega_{sc}$  付近ではPI制御の伝達関数は  $K_{ps}$  で電流制御系の伝達関数は  $1$  である。従って、交差角周波数  $\omega_{sc}$  は以下のように求まる。

$$\left| \frac{K_T K_{ps}}{J j\omega_{sc}} \right| = 1 \quad \therefore \omega_{sc} = \frac{K_T K_{ps}}{J} \quad (11-10)$$

従って、PI速度制御器の比例ゲインは、 $\omega_{sc}$  を与えて

$$K_{ps} = \frac{J\omega_{sc}}{K_T} \quad (11-11)$$

とする。積分ゲインは、

$$\omega_{pi} \leq \omega_{sc} / 5 \quad (11-12)$$

のように  $\omega_{pi}$  を選んで、(11-9)より次式で設計する。

$$K_{is} = \omega_{pi} K_{ps} \quad (11-13)$$

$\omega_{sc}$  の目安としては、サイリスタレオナード速度制御系で 30rad/s が限界、誘導モータの可変速ドライブで 50rad/s 以上（速度範囲 1:100 以上）、誘導モータのサーボシステムで 200rad/s 以上と言われている。また、800W の PM 同期モータのサーボシステムを 500rad/s で設計した例もある。また、電流制御については、PWM 制御のキャリア周波数が 10kHz (IGBT 使用) の場合に、 $\omega_c = 2000 \text{ rad/s}$  とした例がある。

次に、具体的に(11-8)の一巡伝達関数のボード線図を描き、さらに速度指令のステップ変化に対する応答を計算して、制御パラメータの影響を調べてみよう。図 11-6 の角周波数  $\omega_{pi}, \omega_{sc}, \omega_c$  の3つの値をいろいろと変えてみる。 $K_{ps}, K_{is}$  はそれぞれ(11-11), (11-13)で設定する。また、トルク定数  $K_T = 0.926 \text{ Nm/A}$  , 慣性モーメント(モータ+負荷)  $J = 0.0126 \text{ kgm}^2$  としている。

図 11-7 は、ゲイン交差角周波数  $\omega_{sc}$  をパラメータとした場合のボード線図である。このとき速度指令  $\omega_r^* = 1$  に対する速度  $\omega_r$  のステップ応答を図 11-8 に示す。 $\omega_{sc}$  が大きいほど速応性に優れていることが判る。図 11-9, 図 11-10 は、 $\omega_{pi}$  を  $\omega_{sc}$  の 1/5 より大きく選んだ場合である。 $\omega_{pi} = \omega_{sc}$  の場合には位相余裕が小さくなり、応答に大きなオーバーシュートが見られる。これにより、(11-12)の条件が望ましいことが判る。

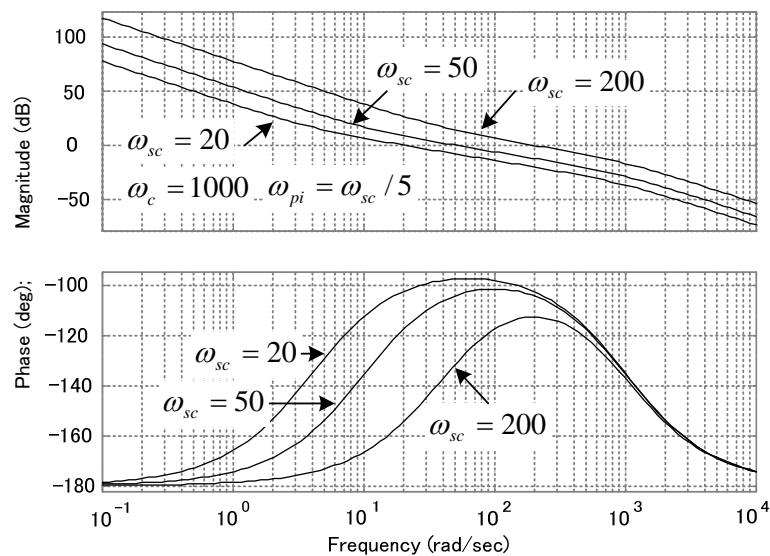


図 11-7 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

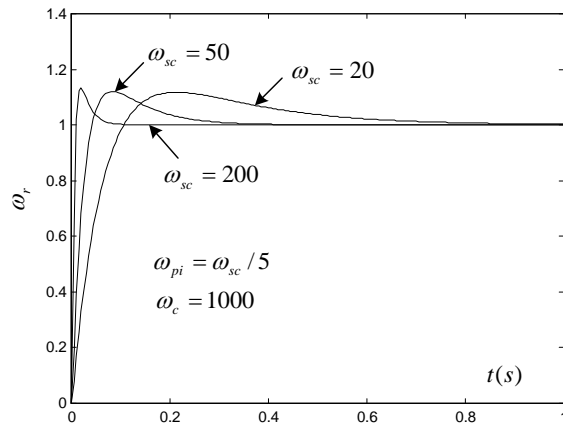


図 11-8 速度指令のステップ変化に対する応答

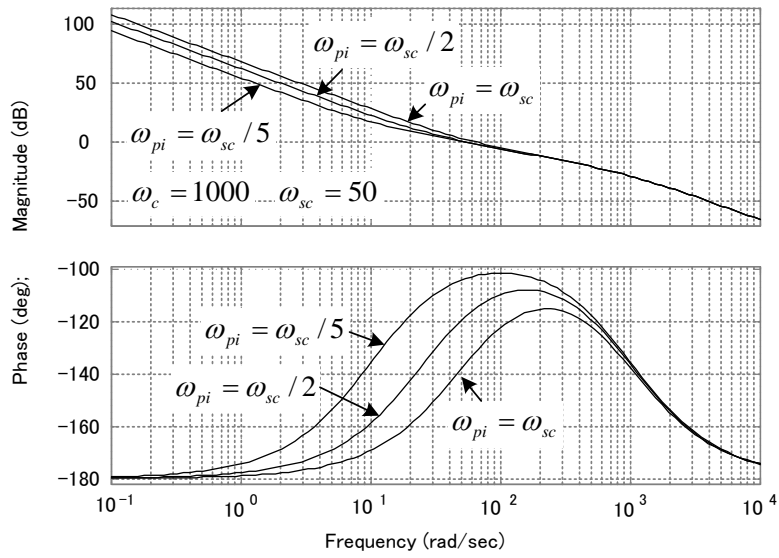


図 11-9 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

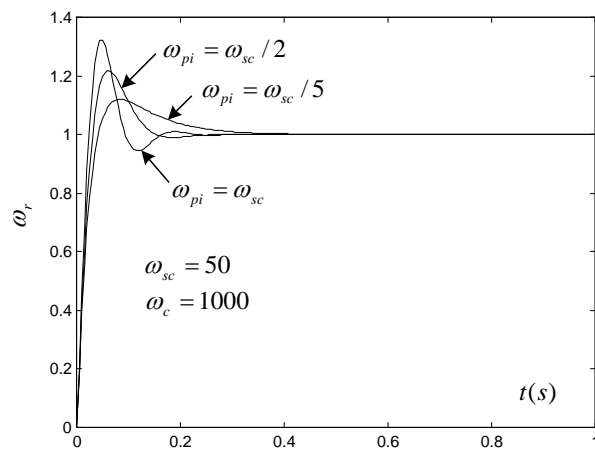


図 11-10 速度指令のステップ変化に対する応答

図 11-11, 図 11-12 は,  $\omega_c$  を  $\omega_{sc}$  の 1 倍, 2 倍, 20 倍と選んだ場合である。  $\omega_c = \omega_{sc}$  の場合には位相余裕が小さくなり, 応答に大きなオーバーシュートが見られる。これにより,  $\omega_c$  を  $\omega_{sc}$  の数倍以上に選ぶことが望ましいと言える。

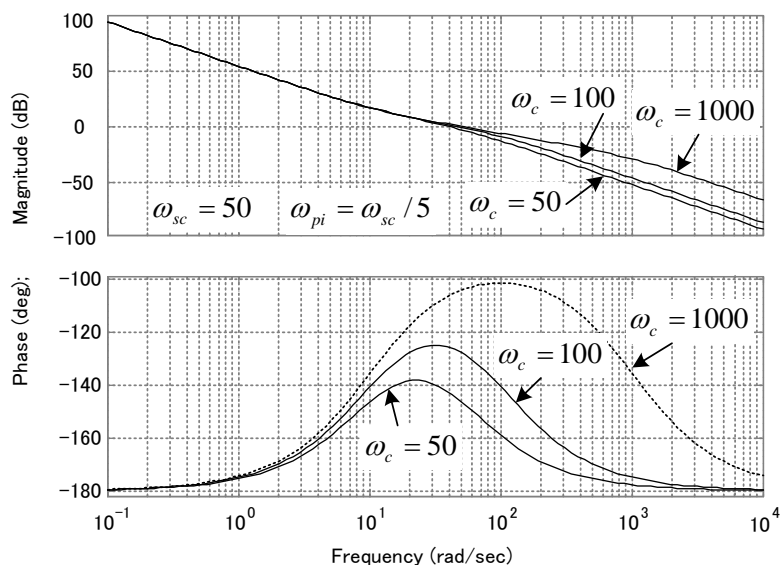


図 11-11 一巡伝達関数 ((11-8)式) のボード線図

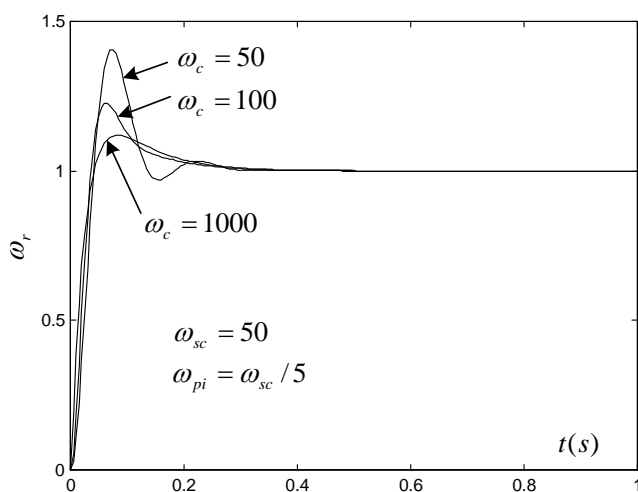


図 11-12 速度指令のステップ変化に対する応答

物体を動かしてその位置や姿勢を制御するフィードバック制御システムは一般に**サーボ系**(servo system)と言われる。サーボ系は速度制御ループの外側に位置制御ループを追加することで実現できる。ロボットや工作機械はサーボ系の代表的なものである。このときのシステム図を図 11-13 に示す。位置は速度の積分であり, 制御対象の中に積分器が含まれるので, 位置制御としては比例制御でもステップ応答に対し定常偏差を生じない。よって, 比例制御が良く用いられる。図 11-15 のように近似すると, 閉ループ伝達関数は 2 次遅れ要素

になるので、減衰係数（オーバシュートがないようにするには1以上）を与えて  $K_p$  が設計できる。図 11-14 で速度フィードバックを行うことは位相進み補償を行うことに匹敵する。

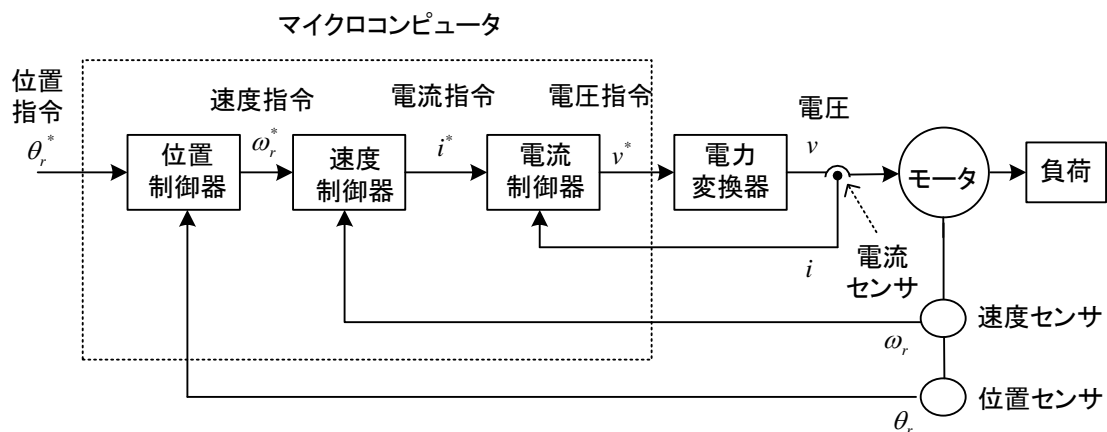


図 11-13 サーボ系の基本構成

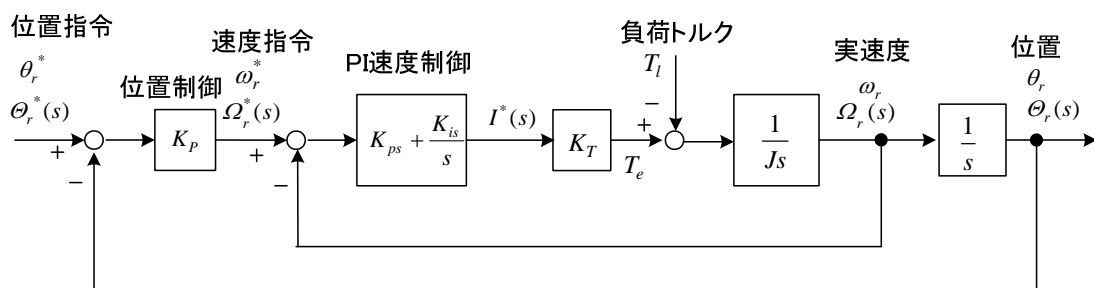


図 11-14 位置制御系のブロック図（電流制御系を理想的と考えた場合）

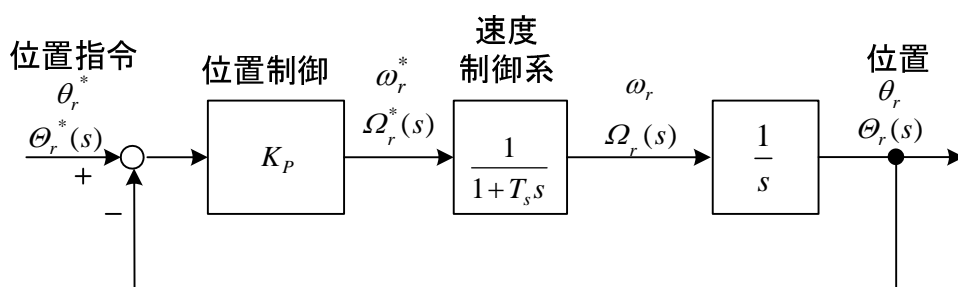


図 11-15 位置制御系の簡易ブロック図（速度制御系の一次遅れ近似）

## 11.2 プロセス制御系の設計

温度・圧力・流量・レベルなどの制御を行うプロセス制御系の設計法を述べる。制御対象の伝達関数を、



$$G(s) = e^{-Ls} \frac{A}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (11-14)$$

としたとき、どのような制御器が適するかの目安を図 11-16 に示す(文献(10))。なお、制御系は図 10-1 に示した構成とする。

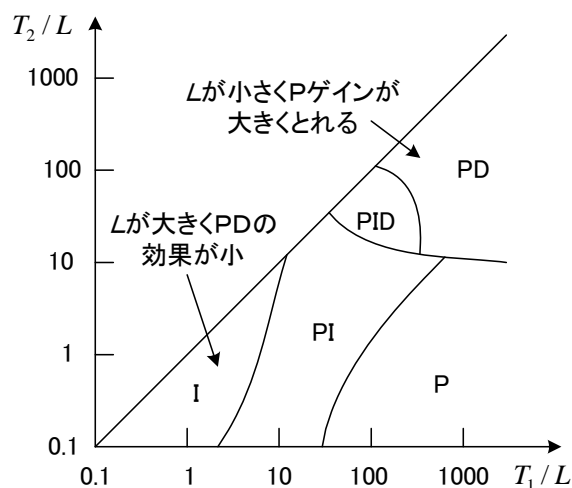


図 11-16 PID 制御器の選択基準

図中の制御器の代わりに、一般的な PID 制御器を用いても問題ないが、その分制御は複雑になる。図の意味は、それ以外の調節器があまり有効でないことを意味する。例えば、I の部分は、無駄時間の影響が大きく P や D の効果が期待できず、積分動作のみでもよい。

PID 制御の伝達関数を

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (11-15)$$

としたとき、制御パラメータの決定法は多く提案されているが、2つの方法を紹介する。

### (1) 限界感度法(ultimate sensitivity method)

ジューグラ(Ziegler)とニコルス(Nichols)が提案した方法で、まず P 制御だけを用いて  $K_p$  を少しずつ大きくする。安定限界に達して、閉ループ系が一定振幅の持続振動をしたときの比例ゲイン  $K_c$  と振動の周期  $T_c$  を求める。制御対象のモデルが得られていないことが多いので、実験により求めることになる。このとき、PID パラメータを表 11-1 のように決める。

表 11-1 限界感度法による PID パラメータ(文献(8)より)

	$K_p$	$T_I$	$T_D$
P 制御	$0.5K_c$		
PI 制御	$0.45K_c$	$0.83T_c$	
PID 制御	$0.6K_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

## (2) ステップ応答に基づく方法

制御対象のステップ応答を実験により測定して、その波形から PID パラメータを決定する方法が幾つか提案されている。図 11-17 のようにステップ応答が観測されたとする。

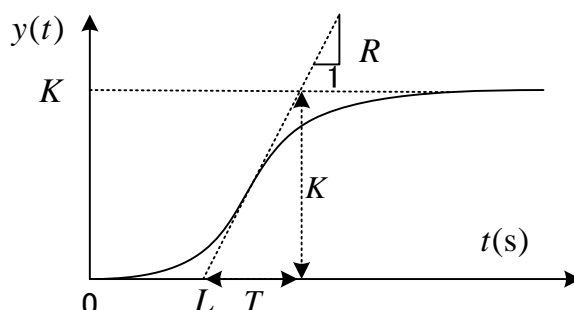


図 11-17 制御対象のステップ応答

立ち上がりの勾配が最も急になっている点で接線を引き、その傾きを  $R$ 、 $y=0$  との交点を  $L$  とする。また、定常値を  $K$  とする。Chien らは、行き過ぎなしで応答時間を最小にする表 11-2 のパラメータ決定法を提案している。

表 11-2 Chien らによる PID パラメータ (文献(8)より)

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P 制御	$0.3/(RL)$		
PI 制御	$0.35/(RL)$	$1.17T$	
PID 制御	$0.6/(RL)$	$T$	$0.5L$

この方法は、制御対象を

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-Ls} \quad \text{ただし, } T = K/R \quad (11-16)$$

で近似していることになる。(11-16)のステップ応答は、むだ時間部分を除くと、

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

で、傾きは  $y'(0) = K/T$  である。

## (3) 設計例

制御対象が

$$G(s) = \frac{1}{1+200s} e^{-20s}$$

で与えられるとする。よって、(11-16) で  $K=1, T=200, L=20$  であり、 $R=1/200$  となる。PI 制御器を用いた図 11-18 の制御系を考える。

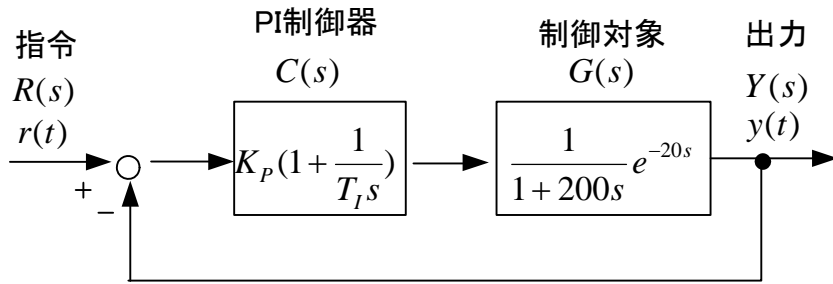


図 11-18 プロセス制御系

Chien の方法で制御パラメータを求めると、

$$K_p = 0.35 \times 200 / 20 = 3.5$$

$$T_i = 1.17 \times T = 234$$

となる。図 11-19 に一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図，図 11-20 に  $r(t) = 1$  に対する  $y(t)$  の応答（ステップ応答）を示す。図には、限界感度法の結果も示しており、この場合、 $C(s) = K_p$  として、いろいろの  $K_p$  に対してステップ応答をシミュレーションより求め、持続振動を起こす  $K_p = 16.3 (= K_c)$  とその時の周期  $T_c = 80.0$  (s) を観測した。この結果、限界感度法のパラメータは、

$$K_p = 0.45 \times 16.3 = 7.315$$

$$T_i = 0.83 \times 80.0 = 66.4$$

となった。図 11-19 より、むだ時間を含む系では、ゲインの傾きだけで位相は決まらないことが判る。従って、ゲインと位相の両方を描いて設計する必要がある。

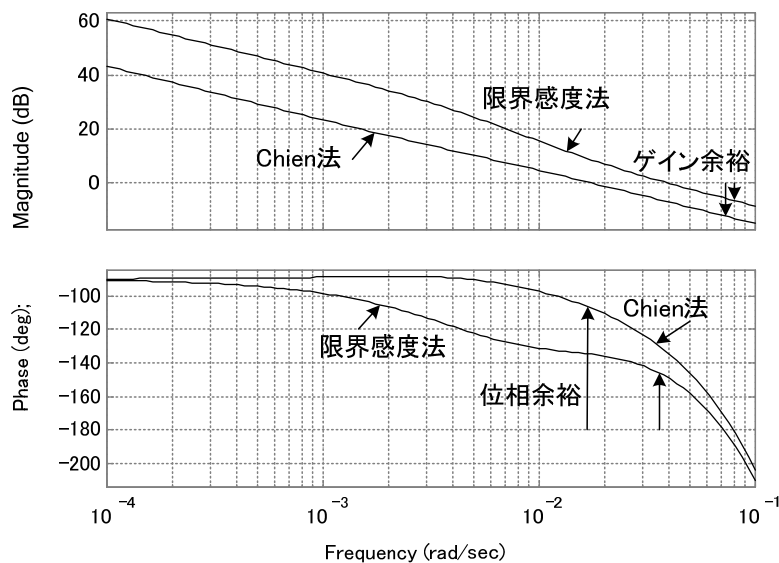


図 11-19 一巡伝達関数  $C(j\omega)G(j\omega)$  のボード線図

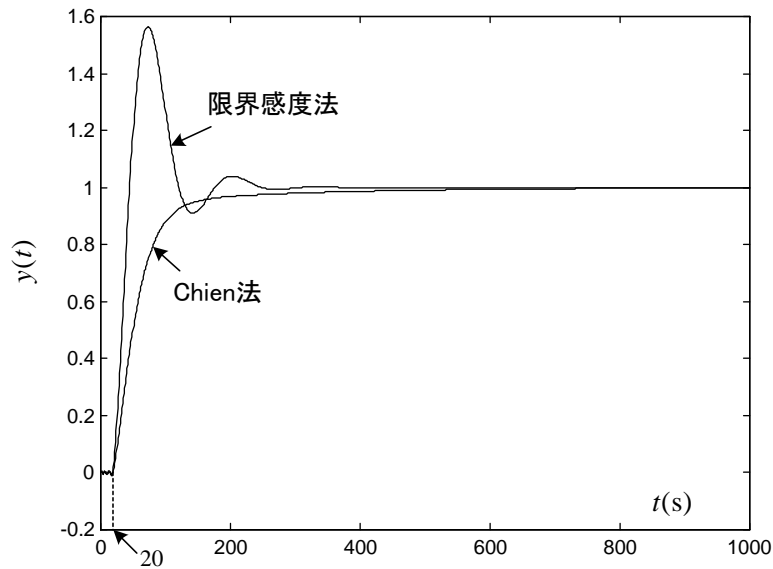


図 11-20 ステップ応答

図より，以下のことが判る。

- ①限界感度法は，比例ゲインが大きく速応性に優れるが，オーバシュートが大きい。これは，ゲイン交差角周波数は Chien 法に比べて高いが，位相余裕やゲイン余裕が小さいことから判る。
- ②Chien 法は，限界感度法に比べ位相余裕やゲイン余裕が大きく安定性に優れ，オーバシュートのない応答が得られている。
- ③周波数が高くなると無駄時間要素の影響で位相が急激に減少し，ゲイン交差角周波数はサーボ系のように高く選ぶことができない。
- ④指令値は  $t = 0$  でステップ変化しているが，無駄時間の影響で 20 秒後から出力が変化し始めている。

位相余裕，ゲイン余裕の値は経験的に次のような値が望ましいとされている（文献(3)）。

	ゲイン余裕	位相余裕	$M_p$
サーボ系	12~20 dB	40° ~60°	1.1~1.5
プロセス制御系	3~10 dB	20° ~70°	1.5~2.5

プロセス制御系では，主として，外乱に対する定常偏差を小さくすることが目的であるため，多少振動的な制御パラメータが用いられる。

### 11.3 PLL周波数シンセサイザの設計

PLL (phase locked loop) の**周波数シンセサイザ** (frequency synthesizer) への応用に関して述べる。周波数シンセサイザとは、水晶発振器の周波数を利用して目的とする任意の基準周波数を作るもので、ラジオ、テレビ、携帯電話など電波を扱う装置の発振器として広く利用されている。この技術がなければ、今日の携帯電話は実現できていないと言われる。

図 11-21 に PLL 周波数シンセサイザの基本ブロック図を示す。

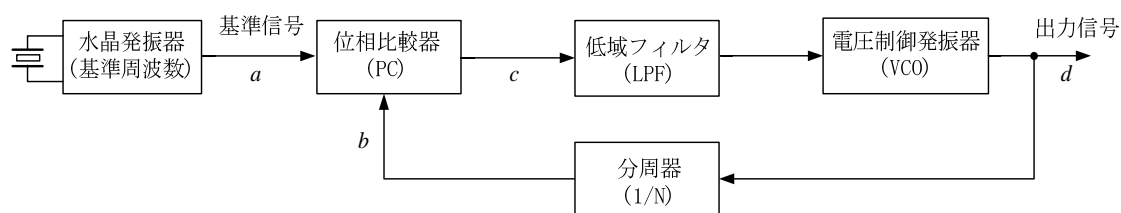


図 11-21 PLL周波数シンセサイザのブロック図

**位相比較器** (phase comparator) で、2つの入力信号の位相差に相当する信号を発生させる。位相比較器は、排他的論理和をとることで構成できる。他にも、掛算器を用いる方法などがある。**低域フィルタ** (low pass filter) は、高周波信号成分を除去し平均電圧の変化(低周波成分)を得るためのものである。**電圧制御発振器** (voltage controlled oscillator) は、電圧に比例した周波数の交流パルスを出力する。PLL の働きにより、基準信号の位相に同期した任意の周波数の出力信号を得ることができる。

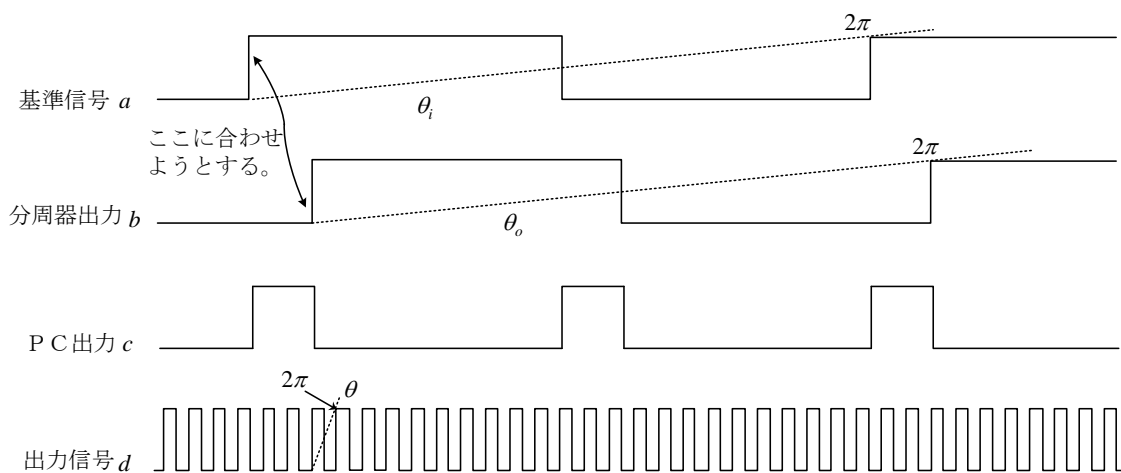


図 11-22 PLL動作イメージ

例えば、基準信号が**1MHz**、分周数  $N = 100$  であれば、基準信号に同期した**100MHz**の出力信号が得られる。基準信号は安定していなければならないが、フィードバック制御に

より VCO は精度の良くない LC 発振器でもよい。

低域フィルタとして、図のアクティブフィルタを考える。

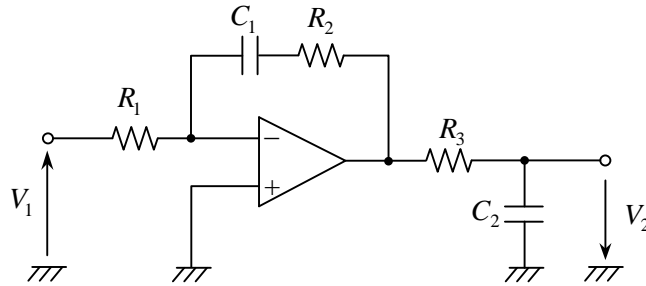


図 11-23 低域フィルタ

図より,

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{\frac{1}{sC_1} + R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1 + sC_1R_2}{sC_1R_1} \cdot \frac{1}{sC_2R_3 + 1} \\ &= \frac{sT_2 + 1}{sT_1(sT_3 + 1)} \end{aligned} \quad (11-17)$$

$$\text{但し, } T_1 = C_1R_1 \quad , \quad T_2 = C_1R_2 \quad , \quad T_3 = C_2R_3$$

PLL 制御回路の等価ブロック図は図 11-24 のようになる。位相は、角周波数を積分することによって得られるので、VCO のブロック図の中に積分器 ( $1/s$ ) が必要となる<sup>(15)</sup>。 $K_p$  [V/rad] は位相比較器のゲイン、 $K_v$  [(rad/s)/V] は VCO のゲインである。 $\theta_o$  が  $\theta_i$  より小さいと  $V_2$  が大きくなって発振周波数が高くなり、その結果、位相  $\theta$  の増え方が急になる。それを  $1/N$  に分周した  $\theta_o$  の増え方も急になって  $\theta_i$  に近づく。(一般には、 $\theta_i$  と  $\theta_o$  は定常状態の位相分を除いた変動分として定義されている。文献 (15) 参照)

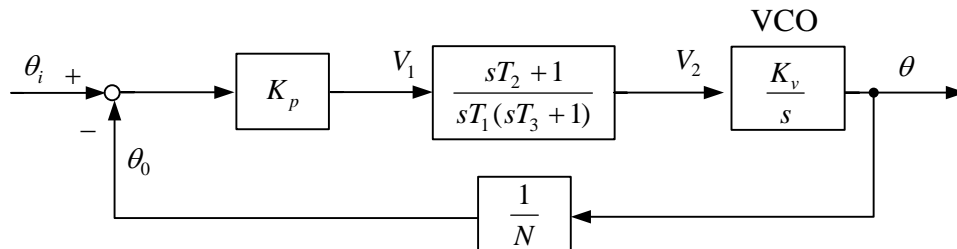


図 11-24 PLL 周波数シンセサイザの等価ブロック図

文献(14)による設計法を以下に示す。まず、一巡伝達関数  $G_0(s)$  は次式のように求まる。

$$G_0(s) = \frac{K_p K_v}{N} \frac{sT_2 + 1}{s^2 T_1 (sT_3 + 1)} \quad \text{①}$$

$G_0(s)$  のボード線図を図 11-25 に示す。

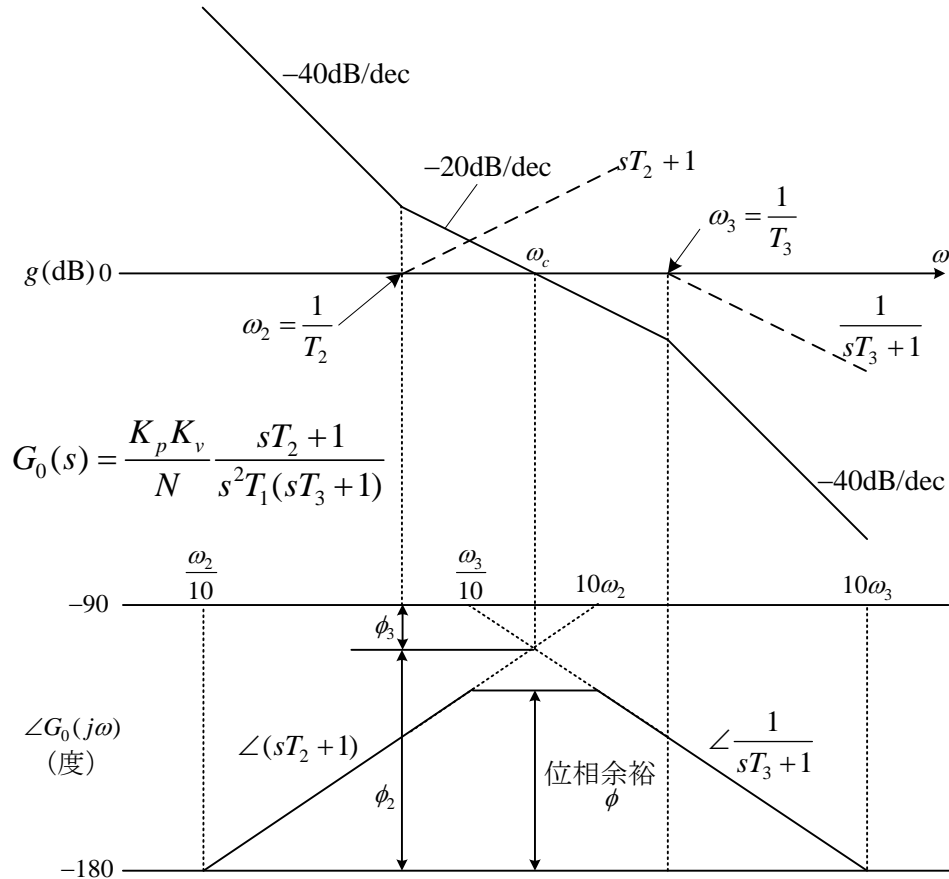


図 11-25  $G_0(s)$  のボード線図

ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  付近を  $-20\text{dB/dec}$  とするとため、位相進み要素  $sT_2 + 1$  を用いて  $\omega_2$  を決め、位相遅れ要素  $1/(sT_3 + 1)$  により  $\omega_3$  を設定する。すなわち、

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} \quad \text{②}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} \quad \text{③}$$

$\omega_2$  と  $\omega_3$  の中間は位相の直線の交点上にある。 $\omega_c$  を  $\omega_2$  と  $\omega_3$  の中間にとることで、位相余裕  $\phi$  を最大にできる。よって、

$$\begin{aligned}\log_{10} \omega_c &= \frac{1}{2}(\log_{10} \omega_2 + \log_{10} \omega_3) && \text{(注) 横軸の長さは } \log_{10} \omega \text{ である。} \\ &= \log_{10} \sqrt{\omega_2 \omega_3}\end{aligned}$$

$$\therefore \omega_c = \sqrt{\omega_2 \omega_3} = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}} \quad \textcircled{4}$$

位相については、以下の式が成立する。

$$\angle(1 + j\omega_c T_2) = \phi_2 \quad \therefore \tan \phi_2 = \omega_c T_2 \quad \textcircled{5}$$

$$\angle \frac{1}{1 + j\omega_c T_3} = -\phi_3 \quad \therefore \tan \phi_3 = \omega_c T_3 \quad \textcircled{6}$$

$$\phi_2 + \phi_3 = 90^\circ \quad \textcircled{7}$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_3 \quad \textcircled{8}$$

⑦式は、 $\omega_c$  の選び方に関係なく交点なら常に成立する。 $\omega_c$  は位相に関係なく制御ゲインを変えれば自由に移動できるが、交点を  $\omega_c$  とすることで、⑤、⑥、⑧が成立する。

⑤、⑦、⑧より、

$$T_2 = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{90^\circ + \phi}{2}\right) \quad \textcircled{9}$$

⑥、⑦、⑧より、

$$T_3 = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{90^\circ - \phi}{2}\right) \quad \textcircled{10}$$

$\omega = \omega_c$  において、ゲインが 0dB であるから、 $sT_2 + 1 \approx sT_2$ 、 $1/(sT_3 + 1) \approx 1$  と近似して

$$|G_0(j\omega_c)| = \frac{K_p K_v T_2}{N \omega_c T_1} = 1$$

$$\therefore T_1 = \frac{K_p K_v T_2}{N \omega_c} \quad \textcircled{11}$$

ゲイン交差角周波数  $\omega_c$  と位相余裕  $\phi$  を設定すると、⑨、⑩より  $T_2$ 、 $T_3$  が求まり、⑪より、 $T_1$  が決まる。⑨、⑩式は④式を満たす。