第２章　ラプラス変換

ラプラス変換は，微分方程式を解いて応答を求める場合や伝達関数を求める場合に必要となる。自動制御では欠くことのできない数学であり，本書ではその基本公式を述べる。

2.1　ラプラス変換の定義

$f(t)$ が時間 t の関数で $t<0$ のとき $f(t)=0$ とし，

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2-1}$$

が存在するものとする。このとき，$F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**(Laplace transform)と呼び，$f(t)$ から $F(s)$ にラプラス変換するという。ここで，s は $s=\sigma+j\omega$ なる複素数である。(2-1)を

$$F(s)=L[f(t)] \tag{2-2}$$

と略記することがある。

(例題 2-1)　$f(t)=1$ のラプラス変換を求めよ。

（解）$L[1]=\int_0^\infty e^{-st}dt=[-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^\infty=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}e^{-st}$

となる。ここで，$s=\sigma+j\omega$ で，積分が収束するように σ を選ぶ。

$$e^{-st}=e^{-(\sigma+j\omega)t}=e^{-\sigma t}(\cos\omega t-j\sin\omega t)$$

であるから，$\sigma>0$ とすればよい。このとき，次式となる。

$$L[1]=\frac{1}{s}$$

＊　以上の様に，σ は積分が収束するように選ばれるが，実際にラプラス変換を利用する場合には，変換表を用いるので σ を意識することはないであろう。

（例題 2-2）$f(t)=\sin at$ のラプラス変換を求めよ。

（解）$e^{jat}=\cos at+j\sin at$ であるから，$\sin at=\dfrac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}$

である。ゆえに

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}e^{-st}dt=\frac{1}{2j}(\left[\frac{e^{(ja-s)t}}{ja-s}\right]_0^\infty-\left[\frac{e^{-(ja+s)t}}{-ja-s}\right]_0^\infty)$$

$$=\frac{1}{2j}(\frac{1}{s-ja}-\frac{1}{s+ja})=\frac{a}{s^2+a^2}$$

（問題 2-1） $L[e^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}$ を証明せよ。収束条件も求めよ。

（答）収束条件は $\mathrm{Re}[a+s]>0$ （$\mathrm{Re}[z]$ は z の実部を表す。）

（問題 2-2） $L[t]=\dfrac{1}{s^2}$ を証明せよ。収束条件も求めよ。

（答） $L[t]=\int_0^\infty t e^{-st}dt=\left[-t\dfrac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\dfrac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\dfrac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty=\dfrac{1}{s^2}$

部分積分を利用する。収束条件は $\mathrm{Re}[s]>0$

表関数 $f(t)$ と裏関数 $F(s)$ とは 1 対 1 に対応していると考えて良く， $F(s)$ から $f(t)$ を求めることを**ラプラス逆変換**(inverse Laplace transform)といい，これは一般に，

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds \qquad c>0 \tag{2-3}$$

で求められる。L^{-1} はラプラス逆変換を表す。しかし，通常の有理関数の場合は(2-3)を用いる必要はなく， $F(s)$ を**部分分数展開**(partial fraction expansion)して求める方法が簡単である。下記の $F(s)$ の例で説明する。 $F(s)$ の分母は因数分解して，次式で表せるとする。

$$F(s)=\frac{as^3+bs^2+cs+d}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)^2} \tag{2-4}$$

a,b,c,d は， 0 でもよい。 $s_1=0$ や s_1,s_2 が共役複素数の場合もよい。

$F(s)$ の**部分分数展開は次式となる。**重根の場合はそれより次数の低い項も有り得る。

$$F(s)=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}+\frac{C}{(s-s_3)^2}+\frac{D}{s-s_3} \tag{2-5}$$

A,B,C,D は以下のようにして求める。先に $\Big|$ の左の演算をした後で根を代入する。例えば，(2-5)の両辺に $(s-s_1)$ を掛けると，右辺の A の項だけが約分でき，後で $s=s_1$ を代入したら，それ以外は 0 となるので，結局右辺は A となる。 D は微分した後で $s=s_3$ を代入する。

$$A=(s-s_1)F(s)\Big|_{s=s_1}, \quad B=(s-s_2)F(s)\Big|_{s=s_2}$$

$$C=(s-s_3)^2F(s)\Big|_{s=s_3}\ ,\quad D=\frac{d}{ds}\left\{(s-s_3)^2F(s)\right\}\Big|_{s=s_3} \tag{2-6}$$

後述のラプラス変換表を用いて，(2-5)の逆変換は次式となる。

$$f(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+Cte^{s_3t}+De^{s_3t} \tag{2-7}$$

分母が$(s-s_3)^2$の代わりに$(s-s_3)^3$となっていたら，

$$F(s)=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}+\frac{C}{(s-s_3)^3}+\frac{D}{(s-s_3)^2}+\frac{E}{s-s_3}$$

となる。Cは$(s-s_3)^3F(s)$を求め$s=s_3$とおいて，Dは$(s-s_3)^3F(s)$を s で微分して$s=s_3$とおいて，Eは$(s-s_3)^3F(s)/2!$をsで2階微分し$s=s_3$とおいて求められる。

重根がなければ計算は容易である。なお，係数は**恒等式**(identical equation)から求めることもできる。基本的な関数のラプラス変換表を表 2-1 に示す。これらの表を利用すると必ずしも部分分数に分ける必要がない場合もある。表中，

単位ステップ関数(unit step function)は

$$U(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{2-8}$$

で定義される。ラプラス変換は$0\leq t\leq\infty$で積分するため，実質的に 1 のラプラス変換と同じものとなる。(2-1)の定義では，厳密には 1 は許されず$U(t)$に統一すべきだが，簡単のため良く使用される。

また，**単位インパルス関数**(unit impulse function)は

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases} \tag{2-9}$$

かつ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$ (2-10)

で定義される。

$$\delta(t)=\frac{dU(t)}{dt} \tag{2-11}$$

の関係がある。制御ではδ関数を$t\geq 0$側で考える(回路では-0 から＋0 の範囲)。

単位インパルス関数のラプラス変換は次式で求まる。

$$L[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)\,e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\delta(t)\,e^{0}dt=\int_0^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

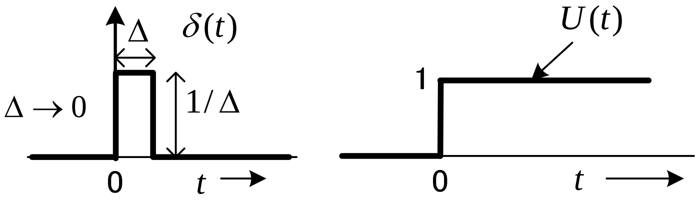


図 2-1　単位インパルス関数$\delta(t)$と単位ステップ関数$U(t)$

表 2-1　ラプラス変換表 (table of Laplace transforms)

（厳密には，$f(t)$は$t<0$で0でなくてはならないから，$f(t)U(t)$と書くべきである。）

時間関数 $f(t)$	ラプラス変換$F(s)$
単位インパルス関数　$\delta(t)$	1
単位ステップ関数$U(t)$ または 1	$\dfrac{1}{s}$
e^{-at},　$t\,e^{-at}$ （aは複素数でもよい）	$\dfrac{1}{s+a}$,　$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
t,　t^2 ,　t^n	$\dfrac{1}{s^2}$,　$\dfrac{2}{s^3}$,　$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\theta)$	$\dfrac{\omega\cos\theta + s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}[c\cos\beta t + (d+\alpha c)\dfrac{1}{\beta}\sin\beta t]$ $\alpha = -\dfrac{a}{2}$,　$\beta = \dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$	$\dfrac{cs+d}{s^2+as+b}$　$(a^2<4b)$ 極　$\alpha \pm j\beta$
$ce^{\alpha t} + (d+\alpha c)\,t\,e^{\alpha t}$	$\dfrac{cs+d}{s^2+as+b}$　$(a^2=4b)$ 極　α　（重根）
$(\dfrac{c}{2}+\dfrac{d+\alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha+\gamma)t} + (\dfrac{c}{2}-\dfrac{d+\alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha-\gamma)t}$ $\gamma = \dfrac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$	$\dfrac{cs+d}{s^2+as+b}$　$(a^2>4b)$ 極　$\alpha \pm \gamma$

(例題 2-3)　$F(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$ としたとき，$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$ を求めよ。

（解）**部分分数展開**して

$$F(s)=\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{s+3}$$

とおける。

　a は，$F(s)$ の両辺に，その項の分母である s を掛けることで求まる。

$$\frac{s+2}{\cancel{s}(s+1)(s+3)}\cancel{s}=\frac{a}{\cancel{s}}\cancel{s}+\frac{b}{s+1}s+\frac{c}{s+3}s$$

両辺で $s=0$ とおいて，$\dfrac{2}{1\times 3}=a$　　$\therefore$　$a=\dfrac{2}{3}$

　b は，$F(s)$ の両辺に，その項の分母である $s+1$ を掛けることで求まる。

$$\frac{s+2}{s\cancel{(s+1)}(s+3)}\cancel{(s+1)}=\frac{a}{s}(s+1)+\frac{b}{\cancel{s+1}}\cancel{(s+1)}+\frac{c}{s+3}(s+1)$$

両辺で $s=-1$ とおいて，$\dfrac{1}{(-1)\times 2}=b$　　$\therefore$　$b=-\dfrac{1}{2}$

　同様に，c は $F(s)$ の両辺に，その項の分母である $s+3$ を掛け，極 $s=-3$ を代入して

$$c=\frac{-1}{(-3)\times(-2)}=-\frac{1}{6}$$

以上により，

$$F(s)=\frac{2}{3s}-\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{6(s+3)}$$

逆ラプラス変換して，

$$f(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}$$

＊　部分分数展開の係数は恒等式で求めることもできるが，s 以外に数字しかない場合には上記の方法が簡単である。要するに，係数はその極（分母を 0 にする値）を左辺に代入するだけで求まる。その際，0 となる項は省く。

（例題 2-4）$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$ のとき，ラプラス逆変換して $f(t)$ を求める。

部分分数展開して，

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s+1}+\frac{d}{s+2} \qquad ①$$

a は，(2-6)の公式を利用して

$$a=\frac{d}{ds}\left\{s^2F(s)\right\}\Big|_{s=0}=\frac{-(s+1)-(s+2)}{(s+1)^2(s+2)^2}\Big|_{s=0}=-\frac{3}{4}$$

b は，両辺に s^2 を掛けて， $s=0$ を代入することで

$b=1/2$

c は，両辺に $s+1$ を掛けて， $s=-1$ とおいて　$c=\dfrac{1}{(-1)^2\times 1}=1$

d は，両辺に $s+2$ を掛けて， $s=-2$ とおいて　$d=-\dfrac{1}{4}$

逆変換して $f(t)$ が，以下のように求まる。

$$f(t)=-\frac{3}{4}+\frac{t}{2}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$$

(例題 2-5)　$F(s)=\dfrac{cs+d}{s^2+as+b}$ としたとき， $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$ を求めよ。

（解）（ⅰ） $a^2-4b<0$ のとき

分母を 0 とした根は， $s=\dfrac{-a\pm j\sqrt{4b-a^2}}{2}\equiv\alpha\pm j\beta$　とすると，部分分数展開して

$$F(s)=\frac{A}{s-\alpha-j\beta}+\frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

ここで， $A=(s-\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha+j\beta}=\dfrac{cs+d}{s-\alpha+j\beta}\Bigg|_{s=\alpha+j\beta}=\dfrac{c(\alpha+j\beta)+d}{2j\beta}$

$$B=(s-\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha-j\beta}=\frac{cs+d}{s-\alpha-j\beta}\Bigg|_{s=\alpha-j\beta}=\frac{c(\alpha-j\beta)+d}{-2j\beta}$$

逆変換して， $f(t)=Ae^{(\alpha+j\beta)t}+Be^{(\alpha-j\beta)t}$

$$=e^{\alpha t}(A\cos\beta t+jA\sin\beta t+B\cos\beta t-jB\sin\beta t)$$

$$=e^{\alpha t}\left\{(A+B)\cos\beta t+j(A-B)\sin\beta t\right\}$$

$$=e^{\alpha t}\left\{c\cos\beta t+\frac{d+\alpha c}{\beta}\sin\beta t\right\}$$

（ⅱ） $a^2-4b=0$ のとき

分母を 0 とした根は， $s=-a/2\equiv\alpha$　（重根）であり，部分分数展開して

$$F(s)=\frac{A}{s-\alpha}+\frac{B}{(s-\alpha)^2}$$

とおける。恒等式を利用して， $cs+d=A(s-\alpha)+B$

$\therefore\ A = c,\ B = \alpha c + d$

逆変換して， $f(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} = ce^{\alpha t} + (d + \alpha c)te^{\alpha t}$

（問題 2-3） (例題 2-5)で， $a^2 - 4b > 0$ のとき $f(t)$ を求めよ。

（解）表 2-1 を参照のこと。

2.2 ラプラス変換の性質

ラプラス変換の演算に関しては以下のような性質がある。ただし,

$$L[f(t)] = F(s),\ \ L[g(t)] = G(s)$$

とする。

（ｉ）ラプラス変換および逆変換は**重ね合わせ**(superposition)が成り立ち線形変換である。定数は前に出せる。加算減算のラプラス変換は分けてよい。 a, b を定数とすれば,

$$L[af(t) + bg(t)] = a\,L[f(t)] + b\,L[g(t)] \tag{2-12}$$

また,

$$L^{-1}[aF(s) + bG(s)] = aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[G(s)] \tag{2-13}$$

（ⅱ）時間推移(time delay)

$$L[f(t - T)] = e^{-sT}F(s) \tag{2-14}$$

ただし， T：定数

（ⅲ）相似定理 (time scaling)

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{2-15}$$

ただし， a：定数

（ⅳ）導関数 (differentiation)

$$L[\frac{d\,f(t)}{dt}] = sF(s) - f(0) \tag{2-16}$$

$$L[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = s^2F(s) - s\,f(0) - f\,'(0) \tag{2-17}$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{2-18}$$

ただし，　$f^{(k)}(0)$ は，　$f(t)$ を k 回微分した導関数の $t=0$ での値である。

（ｖ）積分関数 (integration)

$$L[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \tag{2-19}$$

ただし，　$f^{(-1)}(0) \equiv \int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau$　とおく。$f(\tau)$ が電流なら $f^{(-1)}(0)$ は電荷の初期値。

（ⅵ）相乗定理　(convolution)

$$L[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau] = L[\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau] = G(s)U(s) \tag{2-20}$$

（ⅶ）最終値の定理 (final-value theorem)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s\,F(s)] \tag{2-21}$$

$t\to\infty$ のとき $f(t)$ の極限値が存在するとき，すなわち $sF(s)$ の極の実部が全て負のとき。

（ⅷ）初期値の定理 (initial-value theorem)

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s\,F(s)] \tag{2-22}$$

(例題 2-6)　$L[\dfrac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$　を証明せよ。

（解）$L[\dfrac{df(t)}{dt}] = \int_0^{\infty} \dfrac{df(t)}{dt} e^{-st}dt$

$$= [\,f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

(例題 2-7)　$L[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{f^{(-1)}(0)}{s}$ を証明せよ。

(解)　$L[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = L[\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)d\tau]$

$$= \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau + \int_0^{\infty}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}e^{-st}dt$$

$$= \frac{f^{(-1)}(0)}{s} + [\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t f(\tau)d\tau]_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

（例題 2-8）次式の相乗定理を証明せよ。

$$L[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau] = L[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau] = F(s)G(s)$$

（解） $L[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau] = \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} e^{-st}dt$ 　　定義より

$= \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau\right\}dt$ 　　e^{-st} は τ に関係ないので中に

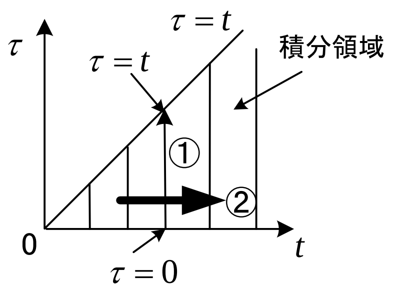
これは，図(a)に示すようにまず①の向きに τ で積分し，それを②の方向に t を変えて集める（積分する）。そこで，図(b)のように順番を変えて，まず①の向きに t で積分し，それを②の向きに τ で集めてもよい。すると

与式 $= \int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}dt\right\}d\tau$

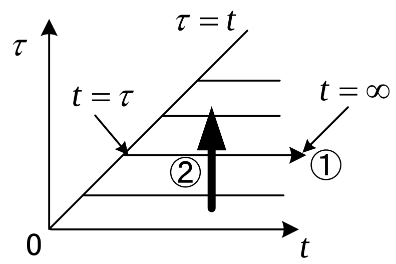
$= \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right\}e^{-s\tau}d\tau$ 　　t に関係ない項を外へ

$= \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_0^\infty g(t')e^{-st'}dt'\right\}e^{-s\tau}d\tau$ 　　$t-\tau = t'$ とおく

$= \int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau}d\tau = G(s)\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = G(s)F(s)$



(a)



(b)

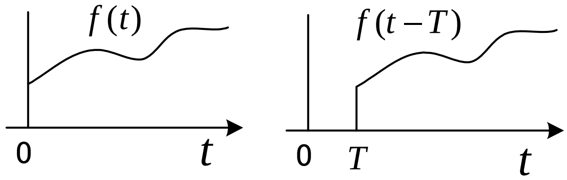
（例題 2-9） $L[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$ を証明せよ。

（解）

$L[f(t-T)] = \int_0^\infty f(t-T)e^{-st}dt$

ここで，$t-T=\tau$ とおくと

$L[f(t-T)] = \int_{-T}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau$



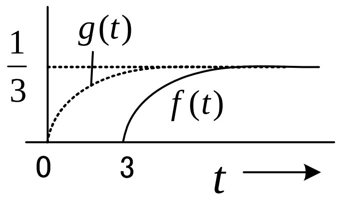
$$= e^{-sT}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad\qquad t<0: f(t)=0 \quad と考える。$$

$$= e^{-sT}F(s)$$

(例題 2-10)　$F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s(s+3)}$　をラプラス逆変換して，$f(t)$ を求めよ。

(解)　$G(s)=\dfrac{1}{s(s+3)}$　のラプラス逆変換を $g(t)$ とすると，$f(t)=g(t-3)$　である。

$$G(s)=\frac{1}{s(s+3)}=\frac{1}{3s}-\frac{1}{3(s+3)}$$



であるから，

$$g(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}$$

よって，　$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<3 \\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-3(t-3)} & 3\le t \end{cases}$

（問題 2－4）次の微分方程式をラプラス変換して解け。

$$\frac{d^2f}{dt^2}+3\frac{df}{dt}+2f=1$$

初期条件は，$f(0)=1,\ f'(0)=2$　とする。

（解）両辺をラプラス変換して，初期値を代入する。

$$s^2F-sf(0)-f'(0)+3sF-3f(0)+2F=\frac{1}{s}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}$$

2.3　ラプラス変換とフーリエ変換の関係

一般に**フーリエ変換** (Fourier transform)は，次式で定義される。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2-23}$$

このとき，$F(\omega)$ が存在するための十分条件(sufficient condition)は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt < \infty \tag{2-24}$$

である。また，フーリエ逆変換は次式で与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{2-25}$$

$s = \sigma + j\omega$ の $\sigma \le 0$ でラプラス変換が収束するとき，$s = j\omega$ と選ぶことで

$$F(j\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad （t < 0 \text{ のとき } f(t) = 0 \text{ の場合}） \tag{2-26}$$

が得られる。この式より，上記の条件を満たす関数 $f(t)$ については，ラプラス変換 $F(s)$ の変数 s を $j\omega$ とおくことによってフーリエ変換が得られることが判る。

例えば，$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & ,t > 0 \\ 0 & ,\ t < 0 \end{cases}$ ただし，$a > 0$ （$\sigma = 0$ でラプラス変換は収束）

のフーリエ変換は $1/(j\omega + a)$，ラプラス変換は $1/(s + a)$ である。
ラプラス変換は

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} (f(t) e^{-\sigma t}) e^{-j\omega t} dt$$

と考えると，$t < 0$ のとき $f(t) = 0$ を満たす関数 $f(t)$ について，$f(t)e^{-\sigma t}$ のフーリエ変換と解釈できる。このようにラプラス変換は変換できる関数の範囲を広げているとみることができる。

ラプラス変換とフーリエ変換は，それぞれに広く応用されている。特にフーリエ変換では, (2-24)を満足しない直流や交流についても超関数である $\delta(t)$ 関数を導入することによって理論の拡張がなされている。これらの場合，(2-24)を満足しないので，例えば直流や sin 関数のラプラス変換を $s = j\omega$ と置くことでフーリエ変換を求めることはできない。また，フーリエ変換では $-\infty < t < +\infty$ の範囲で積分されるが，ラプラス変換では $0 \le t < +\infty$ の範囲で積分される点も異なる。ちなみに，1（$-\infty < t < +\infty$ で）のフーリエ変換は $2\pi\delta(\omega)$ であり，単位ステップ関数 $U(t)$ のフーリエ変換は $\pi\delta(\omega) + (1/j\omega)$ である。意味としては，全範囲で 1 なら $\omega = 0$ の直流分だけが存在するが，$U(t)$ の場合には周波数の低い成分が多く含まれる（ω が小さいときフーリエ変換の絶対値が大きい）ということである。$U(t)$ のラプラス変換 $1/s$ で $s = j\omega$ とした $1/j\omega$ は，フーリエ変換の結果と異なる。

ラプラス変換は，過渡現象の解析や安定解析が容易なことから電気回路や自動制御などで用いられる。フーリエ変換は，主に周波数解析（定常応答解析）が中心で，通信分野，光工学，熱伝導などの分野に広く用いられている。