第３章　システムの表現 −伝達関数とブロック線図−

システムの入力と出力の関係は伝達関数で表され，この結果，システムはブロック線図で表現できる。ブロック線図の作り方と簡単化の方法を理解して欲しい。

3.1　線形システムの伝達関数

制御対象の物理現象を数学的に表現すると，一般に線形常微分方程式となる。例えば，電気回路の式，運動方程式はその代表である。

入力を$u(t)$，出力を$y(t)$とする図 3-1 のシステムで，本書では次式の線形定係数常微分方程式で表せる**線形時不変システム**(linear time-invariant system: **LTI システム**)を対象とする。

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\ \ y}{dt}+a_n y$$
$$=b_0\frac{d^m u}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du}{dt}+b_m u \qquad (n\geq m) \qquad \text{(3-1)}$$

ここで，すべての係数は定数である。線形とは重ね合わせが成り立つことで，2 種類の入力を同時に入れたときの出力がそれぞれを単独に入れたときの出力の和になるという性質である。時不変とは，同じ波形の入力を時間 0 からとτから加える場合，後者の出力はτだけ遅れた同じ波形が出るという性質である。係数が時間の関数なら時不変とは言えない。

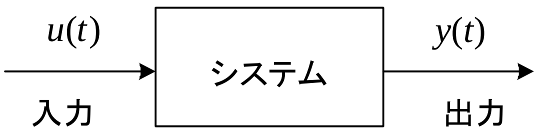


図 3-1　システムの入力と出力

線形時不変システムの解析・設計に極めて重要な**伝達関数**(transfer function)$G(s)$の求め方（定義）を述べる。

① システムに関する微分方程式をたてる。(3-1)の様に変形する必要はない。

② ラプラス変換して，全ての初期値を 0 とおく。

③ 入力$u(t)$と出力$y(t)$のラプラス変換をそれぞれ$U(s)$，$Y(s)$とすると，

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \text{(3-2)}$$

ただし，$L[u(t)]=U(s), L[y(t)]=Y(s)$

②より，$\dfrac{d^n}{dt^n}\to s^n$，$\int_{-\infty}^{t}dt$ or $\int_0^t dt \ \to \dfrac{1}{s}$ と置き換え，時間関数（小文字でtの関数）

をラプラス変換した変数（大文字で s の関数）に置き換えると良い。これは，交流理論のフェーザで $j\omega$ を s とおいた形であるから覚えやすい。伝達関数＝出力/入力で求める。
図 3-1 のシステムの伝達関数を求める。(3-1)をラプラス変換して，初期値を 0 と置くと，

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s)$$

$$= b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \cdots + b_{m-1} s U(s) + b_m U(s)$$

よって，伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \tag{3-3}$$

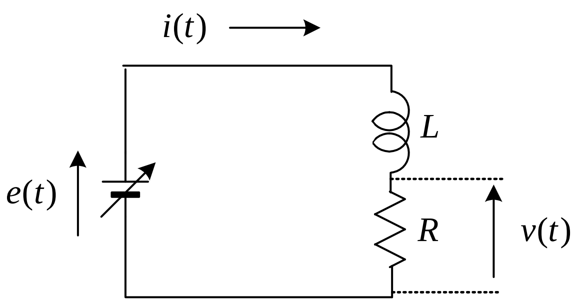
(3-3)の形は**有理関数**(rational function)と呼ばれる。$n \geq m$ のとき**プロパー**(proper)，$n > m$ とき**真にプロパー**または**厳密にプロパー**(strictly proper)呼ばれる。分母，分子は多項式と呼ばれる。$G(s)$ の分母を 0 と置いたときの根 s を**極**(pole)，分子を 0 と置いたときの根 s を**零点**(zero)という。

極は次式から求まる。

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

極や零点は一般に複素数であるが，それらの実部が全て負であるとき（**安定多項式**(stable polynomial)または**フルビッツ多項式**），伝達関数は**最小位相**(minimum phase)と言われる。

(例題 3-1)　電源電圧を入力，抵抗の両端の電圧を出力とする制御対象の伝達関数を求めよ。



(解)　回路の微分方程式をたてると

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t),\ \ v(t) = Ri(t)$$

である。これをラプラス変換して初期値を 0 と置くと，

$$L\,s\,I(s) + R\,I(s) = E(s),\ \ V(s) = R\,I(s)$$

ただし，$L[i(t)] = I(s),\ L[e(t)] = E(s),\ L[v(t)] = V(s)$

よって，伝達関数は次のように求まる。

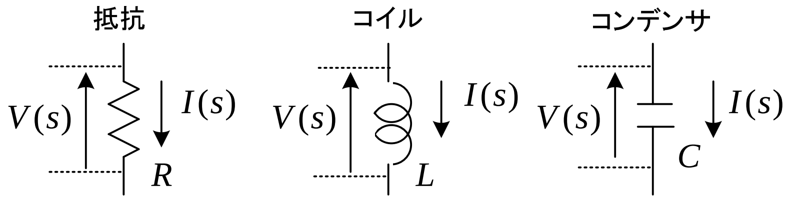
$$G(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R}{Ls + R}$$

交流回路のフェーザの公式（分圧または分流）を用いると，簡単に答えが求まる。もし，

電源が交流ならば,

$$\frac{\dot{V}}{\dot{E}} = \frac{R}{R + j\omega L} \qquad （この式を思って \quad \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R}{R + sL} \quad と書け）$$

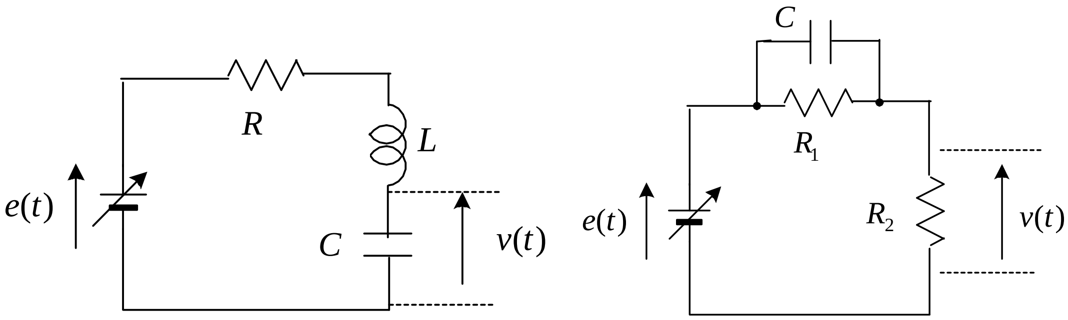
であり，フェーザ$\dot{V}, \dot{E}$をラプラス変換した$V(s), E(s)$に代えて，$j\omega = s$と置くと良い。しかし，フェーザとラプラス変換は同じではないので，両者を混在させてはいけない。伝達関数を求める場合の回路素子の式を図 3-2 に示す。この式は初期値を 0 として得られている。矢印の向きは，電圧$V(s)$，電流$I(s)$の測定の向きを表わし，自分の好きに決めてよいが，同じ向きのときマイナスがつく。フェーザの計算と同様に分圧や分流の公式も利用できる。



$$V(s) = R\,I(s) \qquad V(s) = s\,LI(s) \qquad V(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

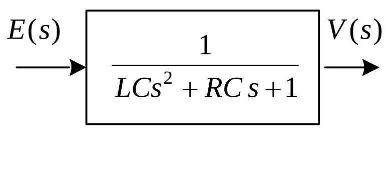
図 3-2　伝達関数を求める場合に利用する回路素子の式

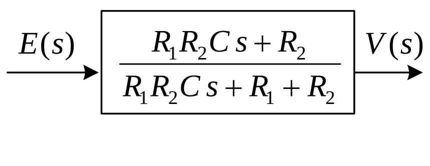
（問題 3-1）図の回路で，電源電圧$e(t)$を入力，$v(t)$を出力とするとき，伝達関数を求め，ブロック線図を書け。



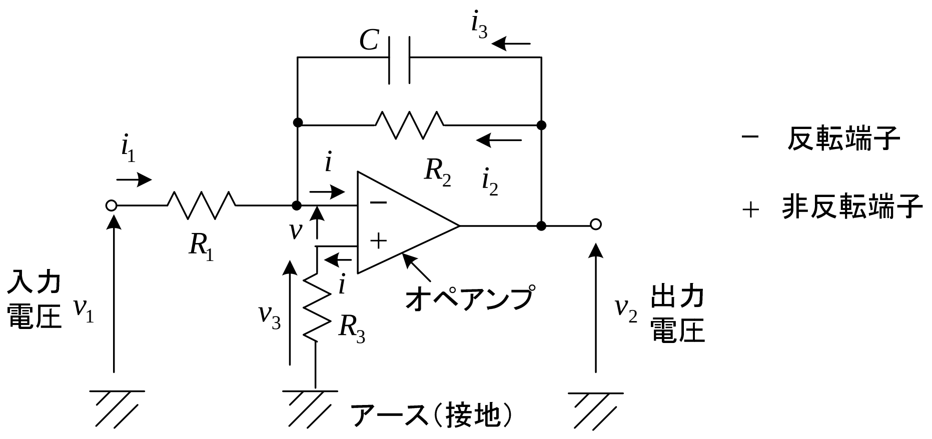
（ａ）　　　　　　　　　　　　（ｂ）

(解)（ａ）$\dfrac{V(s)}{E(s)} = \dfrac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$　　（ｂ）$\dfrac{V(s)}{E(s)} = \dfrac{R_1R_2C\,s + R_2}{R_1R_2C\,s + R_1 + R_2}$





(例題 3-2)　図のオペアンプの回路で，v_1 を入力，v_2 を出力としたときの伝達関数を求めよ。



一般に**オペアンプ（演算増幅器）**(operational amplifier)が理想的とすると，次式が成立する。

（１）$v=0$　：オペアンプだけの増幅度が無限大で，出力端から反転端子への**負帰還**がある場合（C，R_2 がつながっている）に成立する。しかし，v を短絡してはいけない。

（２）$i=0$　：オペアンプの入力インピーダンスが無限大だから入力端子に電流は流れない。この結果，オームの法則より $v_3=0$ である。

(注意)　オペアンプは差動増幅回路などを構成する幾つかのトランジスタを用いて作られたアナログ IC である。オペアンプの出力電圧は，出力端（v_2 のところ）に何をつないでも変わらない。R_3 は実際のオペアンプのオフセット電圧を小さくするのに役立つ。

(解)　v，v_3 が 0 であるから，C，R_2 に加わる電圧は共に v_2 である。

$$i_1=\frac{v_1}{R_1},\ i_2=\frac{v_2}{R_2},\ i_3=C\frac{dv_2}{dt}$$

$i\ =0$ であるから，

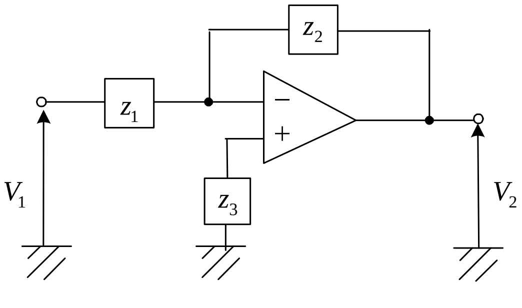
$$i_1+i_2+i_3=0 \qquad \therefore\ 0=\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}+C\frac{dv_2}{dt}$$

ラプラス変換して，初期値を 0 と置くことにより，次式を得る。

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+CR_2\,s}$$

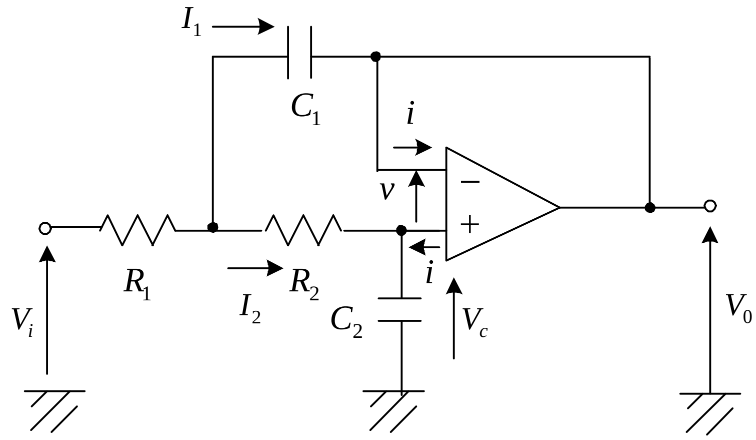
(別解)　次の公式を使うともっと簡単に求まる。一般に，

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=-\frac{z_2}{z_1}$$



ただし，z_1, z_2 はインピーダンスの $j\omega$ を s に置き換えた式。

（例題 3-3）図のオペアンプの回路で，$V_i(s)$ を入力，$V_0(s)$ を出力としたときの伝達関数を求めよ。



(解)　オペアンプが理想的とすると，$i = v = 0$　である。

図の様にラプラス変換した電圧，電流を大文字で定義する。

コンデンサ C_2 の電圧 V_c は，出力 V_0 と等しい。

図より，$V_0 = \dfrac{I_2}{sC_2}$　①

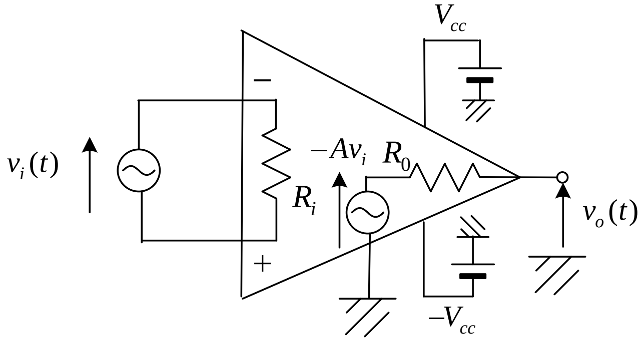
$R_2 I_2 = \dfrac{I_1}{sC_1}$　②

$V_i = R_1(I_1 + I_2) + R_2 I_2 + V_0$　③

①,②より，I_1, I_2 を求めて，③に代入し

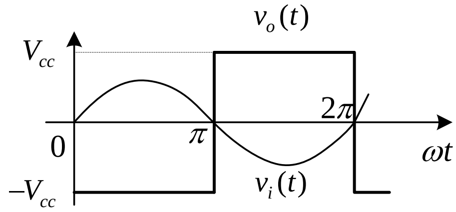
$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1 + R_2)C_2s + 1}$$

オペアンプの等価回路と負帰還がないときの動作



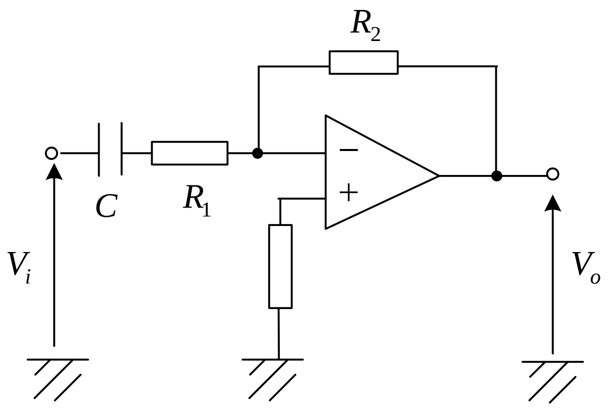
μA 741形演算増幅器

$A = 2\times10^5, R_i = 2\mathrm{M}\Omega, R_0 = 75\Omega$



R_i が大きいので入力電流は流れない．増幅度 A は十分大きいので，負帰還がないと出力電圧は無限大になるところであるが，電源電圧以上にはならず飽和した電圧が出る。

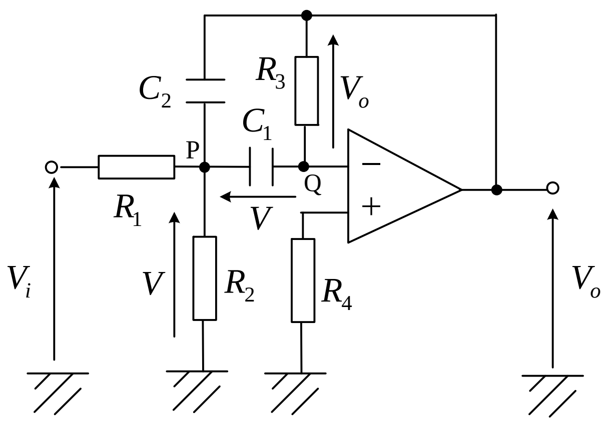
（問題 3-2）図のオペアンプの回路で，$V_i(s)$ を入力，$V_o(s)$ を出力としたときの伝達関数を求めよ。



（答） $\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\dfrac{sCR_2}{sCR_1+1}$

$R_1 = 0$ のとき純粋な微分回路となるが，ノイズの影響が大きく実用的(practical)でない。R_1 を入れることで高周波ノイズが除去でき実用的な微分回路となる。

（問題 3-3）図のオペアンプの回路で，$V_i(s)$ を入力，$V_o(s)$ を出力としたときの伝達関数を求めよ。これは帯域通過フィルタ(band-pass filter)の一つである。



(答)　Q 点の電位が 0 だから，図のように電圧が定義できる。

P 点にキルヒホッフの電流則を適用して

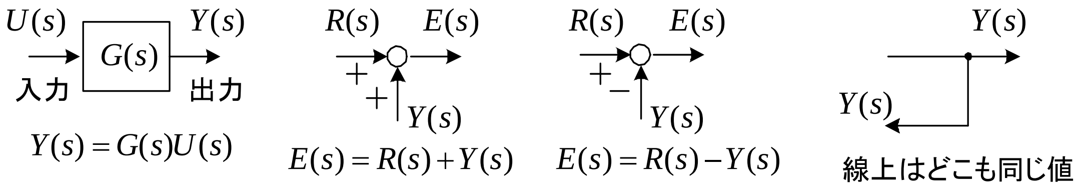
$$\frac{V_i - V}{R_1} = \frac{V}{R_2} + sC_1V + sC_2(V - V_o) \qquad ①$$

R_3 について，　$V_o = -sC_1R_3V$ 　　②

①，②より　$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\dfrac{1}{R_1C_2}s}{s^2 + \dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2R_3}s + \dfrac{1}{C_1C_2R_3}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)}$$

3.2 ブロック線図

　システムの入出力は伝達関数によって表されるので，これを利用して**ブロック線図**(block diagram)を描くことが良く行われる。図 3-3 にブロック線図の基本記号を示す。図中の矢印は入力と出力を区別し信号の流れを示す。



(a)ブロック　(b)加え合わせ点(summing point)　(c)引き出し点(takeoff point)

図 3-3　ブロック線図の基本記号

一般のシステムは，要素が集まって作られる。この場合ブロック線図は非常に便利である。これは，もともと伝達関数により代数方程式(algebraic equation)に直して計算していることが役立っている。図 3-4 にブロックの直列結合(series coupling)からなるシステムを示す。全体のシステムの伝達関数は，

$$Y(s) = G_3(s)X_2(s) = G_3(s)G_2(s)X_1(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)U(s) \tag{3-4}$$

となる。単純に掛け合わせるだけでよく覚えやすい。

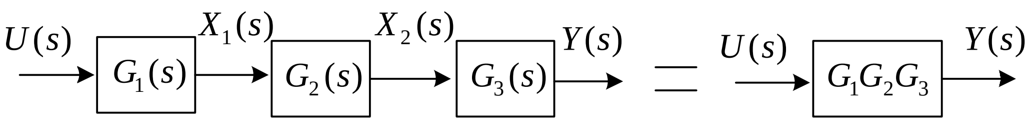


図 3-4　ブロックの直列結合からなるシステム

表 3-1 にブロック線図の簡略化や変形の際に役立つ等価な変換を示す。どれも，図 3-3 のブロック線図の定義より明らかであろう。入力と出力の関係が同じになれば両者は等価と考えてよい。ここでは，フィードバック結合だけ説明しよう。図より，

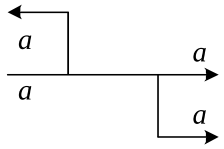
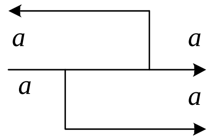
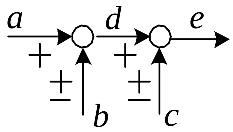
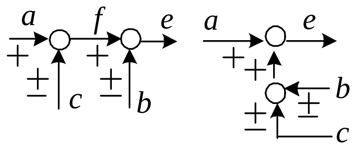
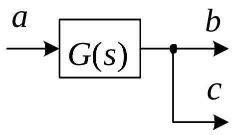
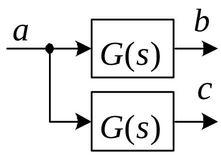
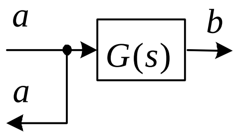
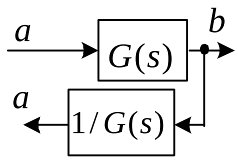
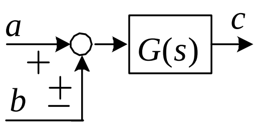
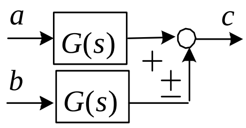
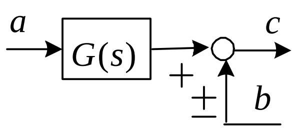
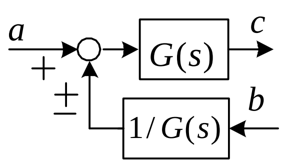
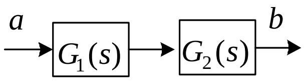
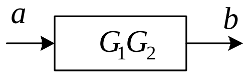
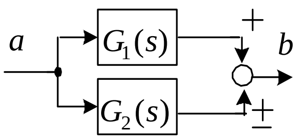
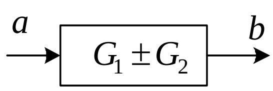
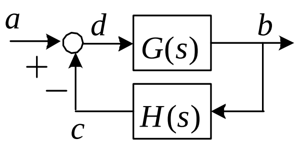
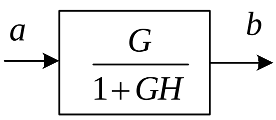
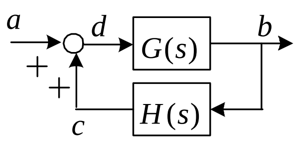
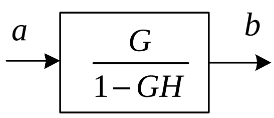
$a - c = d$，$b = Gd$，$c = Hb$

であり，c, d を消去して，

$$a - Hb = \frac{b}{G} \quad \therefore \frac{b}{a} = \frac{G}{1+GH} \tag{3-5}$$

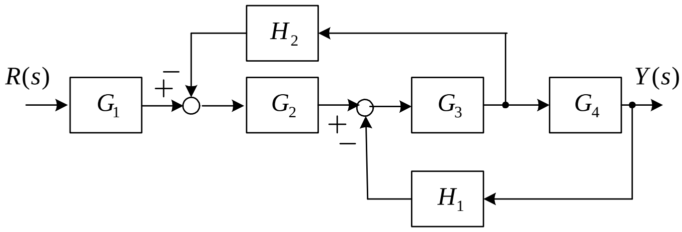
を得る。正帰還は $H \to -H$ として負帰還に変形。H がないなら，$H = 1$ とする。

表 3-1　ブロック線図の等価変換

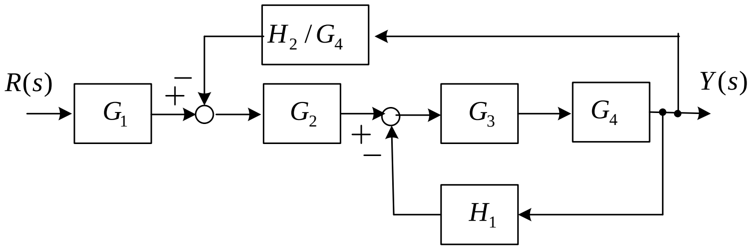
引出し点の交換		
加合せ点の交換		
引出し点と要素間の移動Ｉ		
引出し点と要素間の移動Ⅱ		
加合せ点と要素間の移動Ｉ		
加合せ点と要素間の移動Ⅱ		
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合（負帰還）		
フィードバック結合（正帰還）		

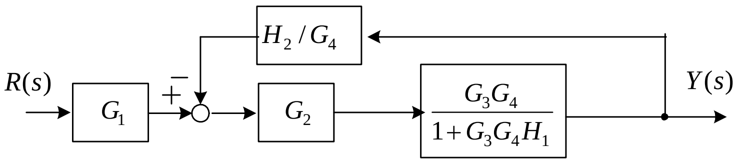
是非覚えておこう！

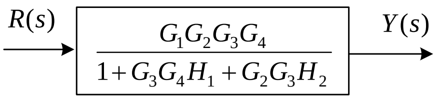
（例題 3-4）図のブロック線図で，変換公式を利用して，$R(s)$ と $Y(s)$ の間の 1 つのブロックに変換せよ。



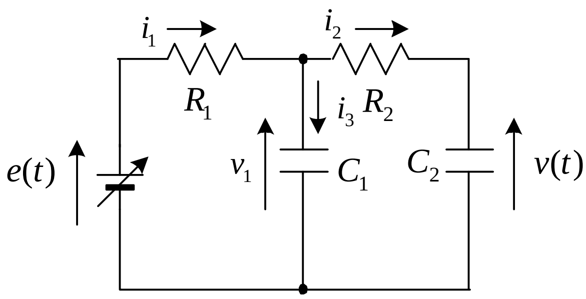
（解）以下の様に変換できる。







（例題 3-5）図の制御対象で, 電源電圧 $e(t)$ を入力, コンデンサ電圧 $v(t)$ を出力とするとき, 各変数を全て含んだブロック線図を書け。また，そのブロック線図を簡略化して，１つのブロックにせよ。



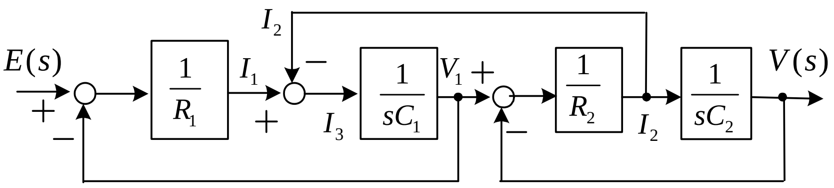
(解)　ラプラス変換した変数を大文字で表すと，図より以下の関係式が得られる。

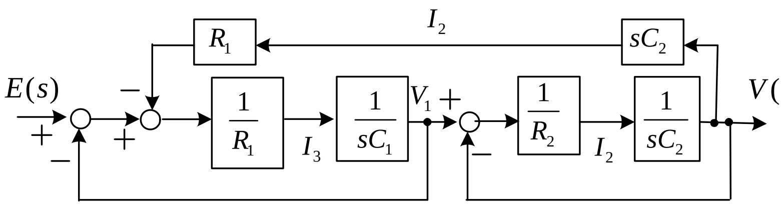
$$I_1 = \frac{1}{R_1}(E - V_1),\ \ I_2 = \frac{1}{R_2}(V_1 - V)$$

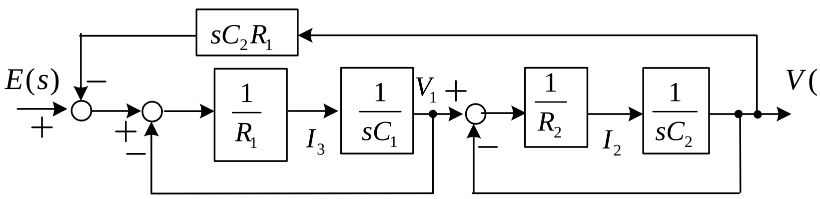
$$V_1 = \frac{1}{sC_1} I_3,\ \ V = \frac{1}{sC_2} I_2$$

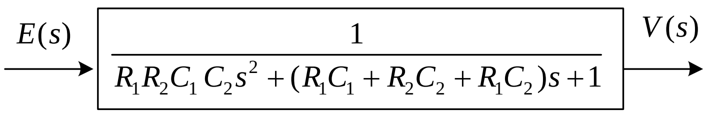
$$I_1 = I_2 + I_3$$

これらの関係式から次のブロック線図が得られる。









（例題 3-6）DC モータは，図に示す等価回路で表される。回路の式は，

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\Phi\omega_m \qquad ①$$

ここで，v：電源電圧[V]，i_a：電機子電流[A]，$e_a = K\Phi\omega_m$：誘導起電力[V]

K：定数，Φ:界磁磁束[Wb] (一定)

R_a：電機子巻線の抵抗[Ω]，L_a：電機子巻線のインダクタンス[H]

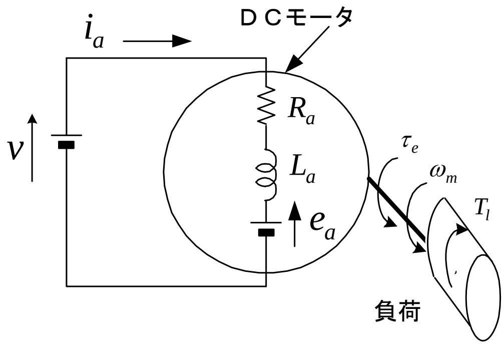
$\omega_m = 2\pi \frac{N}{60}$：回転角速度[rad/s]，$N$：1 分間の回転数[r/m]

モータの負荷としてはいろいろあるが，モータと負荷が一体となって回転すると考えることが多い。この場合，運動方程式が以下の様に表される。

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = K\Phi i_a - R_m \omega_m - T_l \qquad ②$$

ここで，$\tau_e = K\Phi\, i_a$ ：発生トルク[Nm]，J ：慣性モーメント$[\mathrm{kgm}^2]$（DC モータ＋負荷）

R_m ：制動係数$[\mathrm{Nms}]$，　T_l ：負荷トルク$[\mathrm{Nm}]$



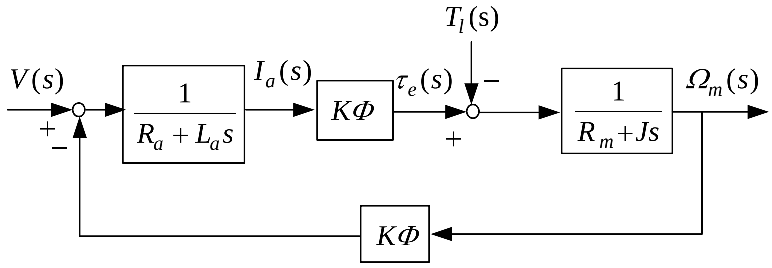
この制御対象のブロック図を描き，電源電圧に対する回転角速度の伝達関数を求めよ。

（解）①，②式をラプラス変換して初期値を零と置くことにより，以下の式が得られる。

$$V(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + K\Phi\Omega_m(s)$$

$$Js\Omega_m(s) = K\Phi I_a(s) - R_m\Omega_m(s) - T_l(\mathrm{s})$$

これより，ＤＣモータのブロック図は次のようになる。

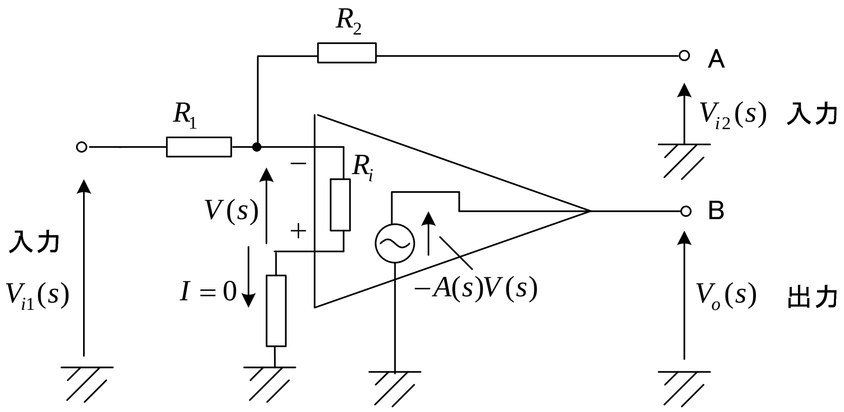


ここで，負荷トルクT_lは外乱と考えられ，これを０と置いて伝達関数を求める。

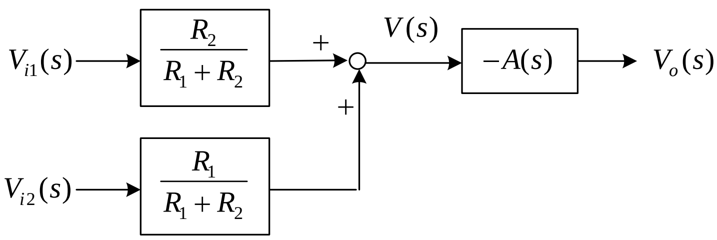
$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{KF}{R_a + L_a s}\dfrac{1}{R_m + Js}}{1 + \dfrac{KF}{R_a + L_a s}\dfrac{KF}{R_m + Js}} = \frac{K\Phi}{L_a Js^2 + (R_a J + R_m L_a)s + R_a R_m + (K\Phi)^2}$$

DC モータ自体にフィードバックループがあり，端子電圧に見合った速度に落ち着くことになる。磁束Φ（界磁電流）を小さくすると速度は非常に大きくなるので危険である。

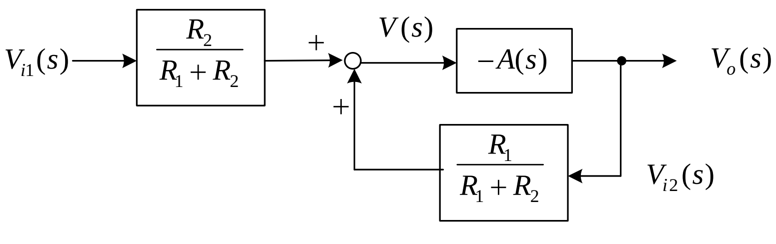
（例題 3-7）（<u>理想オペアンプでない場合</u>）図はオペアンプの等価回路である。入力抵抗 R_i は十分大きく，そこに流れる電流 I は 0 とする（$V(s)$ は 0 でないとする）。$A(s)$ はオペアンプ内部の伝達関数で，$V_o(s) = -A(s)\,V(s)$ の関係がある。図のように 2 つの入力電圧 $V_{i1}(s), V_{i2}(s)$ と出力電圧 $V_o(s)$ を考えるとき，ブロック線図を書け。また，A 点を B 点に接続するとき（負帰還），ブロック線図を示して，$V_{i1}(s)$ と $V_o(s)$ 間の伝達関数を求めよ。



(解)　$\dfrac{V_{i1}(s)-V(s)}{R_1}+\dfrac{V_{i2}(s)-V(s)}{R_2}=0$ ，$V_o(s)=-A(s)\,V(s)$ 　より



(a)　2 つの入力電圧 $V_{i1}(s), V_{i2}(s)$ と出力電圧 $V_o(s)$ のブロック線図



(b)　回路の A 点と B 点を接続した場合のブロック線図

$$\frac{V_o(s)}{V_{i1}(s)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\;\frac{-A(s)}{1+\dfrac{R_1A(s)}{R_1+R_2}}=-\frac{R_2A(s)}{R_1+R_2+R_1A(s)}\;\to -\frac{R_2}{R_1}\qquad (A(s)=\infty)$$

(注)　加え合わせ点では＋であるが，$A(s)$ の前に－があり，実質的に負帰還である。

$A(s)\to\infty$ 　とすれば，$V(s)=-V_0(s)/A(s)=0$ だから，理想オペアンプとなる。

（例題 3-8）図の制御対象で，電圧 $v(t)$ を検出して，電源電圧 $u(t)$ を次式で制御する。

$$u(t) = K_p(v^*(t) - v(t)) + K_i\int_0^t (v^*(t) - v(t))\,d\,t$$

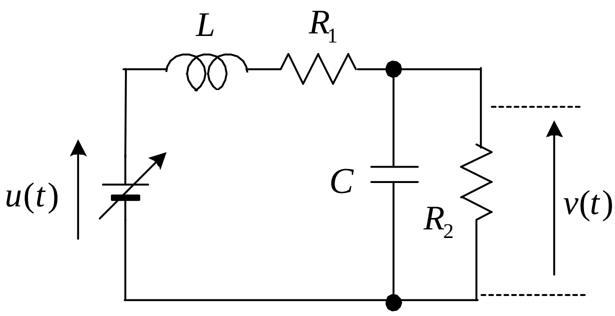
ここで，K_p, K_i は定数，$v^*(t)$ は

電圧指令値である。

（１）制御対象の伝達関数を求めよ。

（２）制御系全体のブロック線図を書け。

（３）閉ループ伝達関数を求めよ。



(解)（１）回路の分圧の考え方を利用して

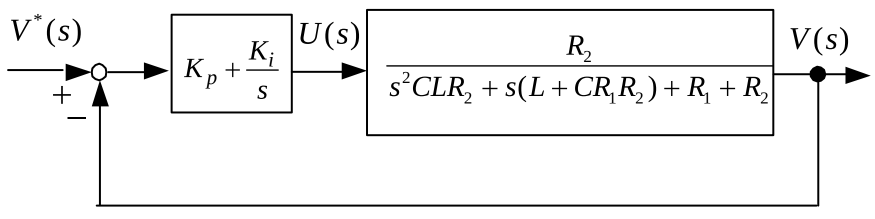
$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{R_2/(sC)}{1/(sC)+R_2}}{sL + R_1 + \dfrac{R_2/(sC)}{1/(sC)+R_2}} = \frac{\dfrac{R_2}{1+sCR_2}}{sL + R_1 + \dfrac{R_2}{1+sCR_2}} = \frac{R_2}{s^2CLR_2 + s(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}$$

（２）制御の式をラプラス変換して

$$U(s) = K_p(V^*(s) - V(s)) + \frac{K_i}{s}(V^*(s) - V(s))$$

$$= (K_p + \frac{K_i}{s})(V^*(s) - V(s))$$

よって，制御系全体のブロック線図は図の様になる。



（３）$$\frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{(K_p + \dfrac{K_i}{s})\dfrac{R_2}{s^2CLR_2 + s(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}}{1 + (K_p + \dfrac{K_i}{s})\dfrac{R_2}{s^2CLR_2 + s(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}}$$

$$= \frac{(sK_p + K_i)R_2}{s^3CLR_2 + s^2(L + CR_1R_2) + s(R_1 + R_2 + K_pR_2) + K_iR_2}$$

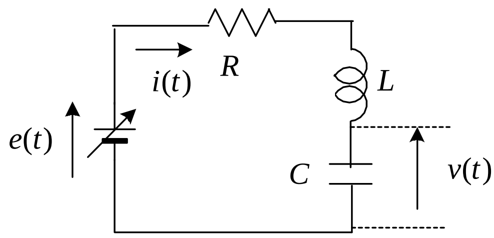
3.3 状態方程式

制御対象やフィードバック制御システムを連立微分方程式で記述してシステムの解析や設計を行うことがある。これは応答の計算や現代制御理論などで用いられる。

図の制御対象で説明しよう。入力は電源電圧 $e(t)$ であるが，出力をコンデンサの電圧 v としよう。微分方程式は，

$$e(t) = R\,i + L\frac{d\,i}{d\,t} + v \tag{3-6}$$

$$i = C\frac{d\,v}{d\,t} \tag{3-7}$$



となる。**状態方程式**(state equation)は，次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \tag{3-8}$$

連立微分方程式で，微分を左辺におき，右辺は左辺の変数と入力だけを使って表す。

入力は自由に変えることができる量で，電気回路では電源である。一方，出力は，目的で異なるが，通常センサで検出する量である。電圧 v を出力とする場合，**出力方程式**(output equation)は次式で与えられる。

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

出力方程式は状態方程式の変数を使って表すもので，それ以外の変数を使ってはいけない。この様に，システムは，状態方程式

$$\frac{d\,\boldsymbol{x}}{d\,t} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \tag{3-10}$$

成分表示：
$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

出力方程式

$$y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} \tag{3-11}$$

成分表示：　$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

により記述できる。$\boldsymbol{x}$ は**状態変数ベクトル**(state variable vector)と呼ばれ，この成分を**状態変数**という。状態変数は(3-10)の様に整理できるなら，何を選んでも良い。電気回路のシステムでは，コイルの電流とコンデンサの電圧（または電荷）を選ぶと良い。状態変数の選び方やその順序は決らないので，状態方程式の書き方は人により異なる。入力 u は，我々が直接自由に変えることができる量であるが，状態変数は入力を変えることで間接的に変化する量であり全く異なる。

例題 3-6 の状態方程式を求めると，以下の様になる。

状態方程式：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a / L_a & -K\Phi / L_a \\ K\Phi / J & -R_m / J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J \end{bmatrix} T_l \tag{3-12}$$

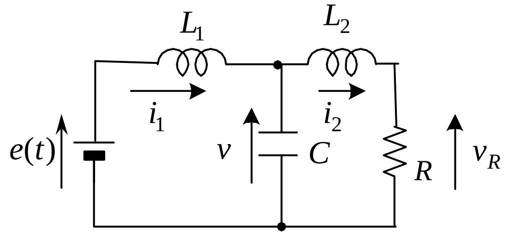
ここで，負荷トルク T_L の項は，一種の入力であるが，制御には利用できないので，外乱と考えればよい。

出力方程式：

$$\omega_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

となる。

（例題 3−9）　図の制御対象の状態方程式，出力方程式を求めよ。ただし，出力は，v_R とする。



（解）状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

出力方程式

$$v_R = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{bmatrix}$$

次に，伝達関数の求め方につき述べる。

状態方程式： $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$

出力方程式： $y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$

につき考える。$\boldsymbol{A}$ は**システム行列**と呼ばれる。上式をラプラス変換して（ベクトルのラプラス変換は各成分のラプラス変換である），

$$s\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s) \tag{3-14}$$

ただし， $\boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$

$$Y(s) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(s) \tag{3-15}$$

を得る。初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ を 0 とおいて，(3-14)より。

$$(s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s) \quad \therefore \boldsymbol{X}(s) = (s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B}U(s)$$

伝達関数 $G(s)$ は， $Y(s) = \boldsymbol{C}(s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B}U(s)$ より

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \\ &= \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}}{\left| s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \right|} \end{aligned} \tag{3-16}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

:単位行列

となる。ここで， $\boldsymbol{I}$ は単位行列， adj は，**余因子行列**(adjoint matrix)を示す。

◎　**行列式**(determinant)，**逆行列**(inverse matrix)の公式

$\boldsymbol{A}$ の第 i 行と第 j 列を省いてできた $(n-1)\times(n-1)$ 次元の行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを $M_{i\,j}$ とする。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

のとき，例えば，

$$M_{2\,1}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

このとき，

行列式：

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\,M_{i\,j}=\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\,M_{i\,j}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underbrace{a\,d-b\,c}_{|\boldsymbol{A}|}}\overbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}^{\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})}$$

逆行列：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|}$$

余因子行列：

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & M_{i\,j} & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{n\,n} \end{bmatrix}^{T}$$

T は，**転置行列**(transposed matrix)を意味する。

(3-8), (3-9)の状態方程式については，

$$|s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s+R/L \end{vmatrix}=s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}$$

$$\boldsymbol{C}\ \mathrm{adj}(s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathrm{adj}\begin{bmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s+R/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{LC}$$

よって，

$$\frac{V(s)}{E(s)}=\frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}}{|s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{LC\,s^2+RC\,s+1} \qquad (3\text{-}17)$$