第４章　時間応答

微分方程式を解いて，入力や指令値の変化に対する時間応答を求める。ブロック線図で表されたシステムは，伝達関数を用いているので，ラプラス変換で初期値が０と仮定されている。

4.1　１次遅れ要素の時間応答

１次遅れ要素(first order lag element)の微分方程式は次式のように書くことができる。

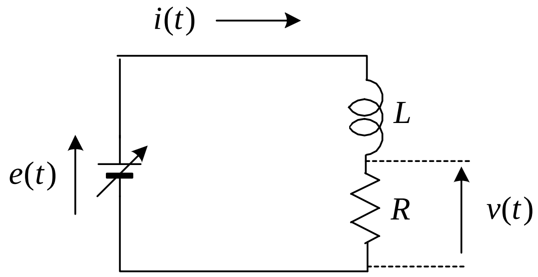
$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K\,u(t) \qquad \text{(4-1)}$$

この伝達関数は,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Ts} \qquad \text{(4-2)}$$

である。 K を**ゲイン定数**(gain constant), T を**時定数**(じていすう)(time constant)と呼ぶ。

この例としては，図の回路を考えるとよい。入力 $u(t)$ は電源電圧 $e(t)$ であり，出力 $y(t)$ には図の電圧 $v(t)$ が相当する。$T = L/R$ である。



時間応答として重要なものは，入力の単位ステップ変化に対する**ステップ応答**(step response)（**インディシャル応答**とも言われる）である。この求め方には２つの方法がある。

（１）　定常項＋過渡項として求める方法

(4-1)より，入力 $u(t)=1$ として次式を得る。

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \qquad ①$$

特性方程式は,

$$Ts + 1 = 0 \qquad ②$$

であり，特性根は

$$s = -1/T \qquad ③$$

よって過渡項は e^{st} である。定常項は $d/dt = 0$ とおいて， $y = K$ である。よって一般解は

$$y(t) = K + k\,e^{-t/T} \qquad ④$$

となる。初期値 $y(0)$ を 0 とすると，$k = -K$ である。よって，ステップ応答は

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}) \qquad ⑤$$

で計算できる。

（２） ラプラス変換による方法

(4-2)より，

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts}U(s) \qquad ①$$

である。入力 $u(t) = 1$ であるから，ラプラス変換して

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad ②$$

よって，①に代入して部分分数展開すると次式となる。

$$Y(s) = \frac{K}{s(1+sT)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1+sT} \qquad ③$$

$$a = sY(s)\Big|_{s=0} = K, \qquad b = (1+sT)Y(s)\Big|_{s=-1/T} = -KT$$

$$\therefore Y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}\right) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1/T+s}\right)$$

逆変換して（表 2-1），

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}) \qquad ④$$

これは先の結果と一致する。初期値については，伝達関数を求める段階で全て 0 としていることに注意すること。④の計算値を図 4-1 に示す。**時定数**T が大きい程応答が遅くなる。RL 回路の例では $T = L/R$ である。$t = T$ で，約 63% (=1-1/e) に増加する。

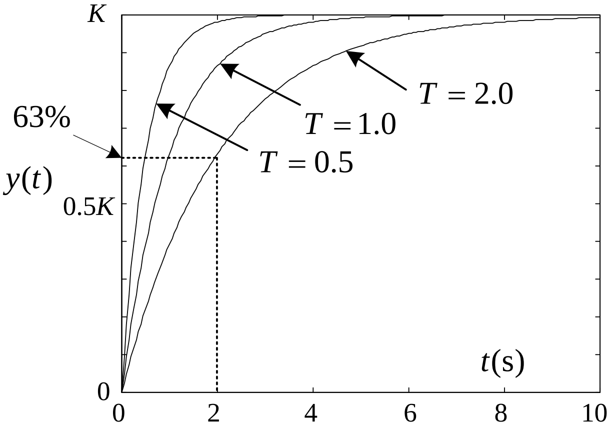
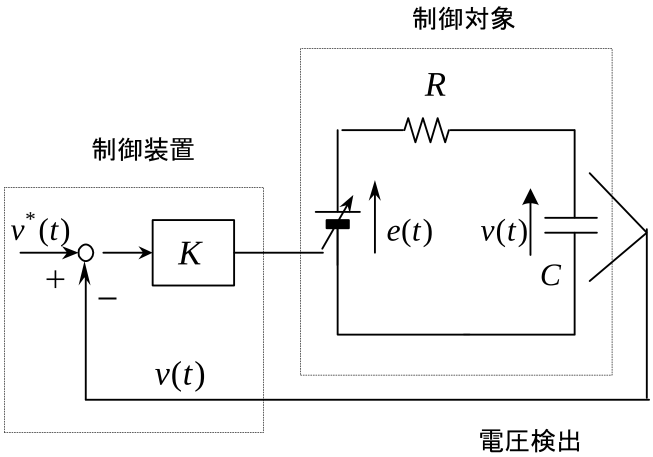


図 4-1　１次遅れ要素のステップ応答

（問題 4-1）　図の制御系は，コンデンサ電圧 $v(t)$ を検出して，それを目標値 $v^*(t)$ に追従させることを目的としている。このとき，電源電圧 $e(t)$ を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$



（１）制御対象の微分方程式を立てて，それをラプラス変換することにより，制御系の全体のブロック線図を書け。ただし，

$V^*(s) = L[v^*(t)]$，　$V(s) = L[v(t)]$，　$E(s) = L[e(t)]$

（２）閉ループ伝達関数　$\dfrac{V(s)}{V^*(s)}$ を求めよ。

（３）$v^*(t) = 1$ に対する $v(t)$ の応答を求めよ。コンデンサ電圧 $v(t)$ の初期値は０とする。

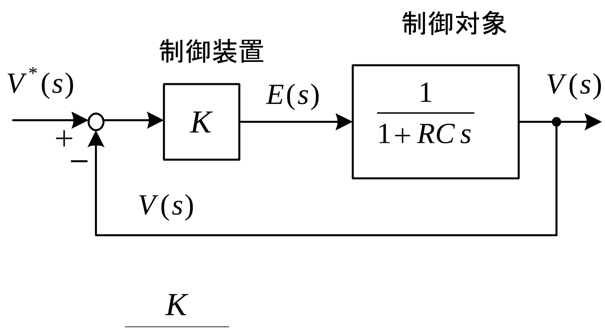
(解)　(1) 成立する式は，$e(t) = Ri(t) + v(t) = RC\dfrac{dv(t)}{dt} + v(t)$　である。

ラプラス変換して初期値を０とおくと，$\dfrac{V(s)}{E(s)} = \dfrac{1}{1 + RCs}$

制御装置についてラプラス変換すると，

$$E(s) = K(V^*(s) - V(s))$$

よって，ブロック図は次のように書ける。



(2) 閉ループ伝達関数は，$G_{cl}(s) = \dfrac{V(s)}{V^*(s)} = \dfrac{\dfrac{K}{1+RCs}}{1 + \dfrac{K}{1+RCs}} = \dfrac{K}{1 + K + RCs}$

(3)$v^*(t)=1$をラプラス変換して，$V^*(s)=1/s$

(2)より，$V(s)=\dfrac{K}{RC\,s+K+1}V^*(s)=\dfrac{K}{K+1}(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\dfrac{K+1}{RC}})$

ラプラス逆変換して，$v(t)=\dfrac{K}{K+1}(1-e^{-\frac{K+1}{RC}t})$

4.2　２次遅れ要素の時間応答

２次の微分方程式は次式のように書くことができる。

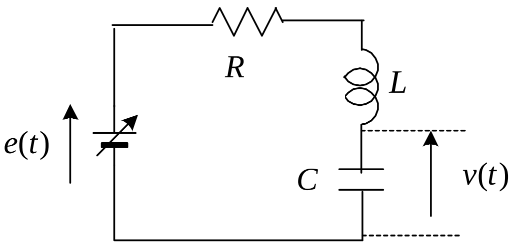
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=cu(t) \tag{4-3}$$

この伝達関数は，

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{s^2+as+b} \tag{4-4}$$

である。

この例としては，図の回路を考えるとよい。



入力$u(t)$は電源電圧$e(t)$に相当し，出力$y(t)$には図の電圧$v(t)$が相当する。
微分方程式は

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v(t)=\frac{1}{LC}e(t) \tag{4-5}$$

である。

入力の単位ステップ変化に対するステップ応答を２つの方法で求めてみよう。

（１）　定常項＋過渡項として求める方法

(4-3)より，入力$u(t)=1$として次式を得る。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=c \quad ①$$

定常項は，微分を０とおいて（直流の定常に相当），

$$y_s=\frac{c}{b} \quad ②$$

特性方程式は，

$$s^2 + as + b = 0 \qquad ②$$

であり，特性根は

$$s = \begin{cases} \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \equiv \alpha \pm \gamma & : a^2 > 4b \\ -\dfrac{a}{2} \equiv \alpha & : a^2 = 4b \\ \dfrac{-a \pm j\sqrt{4b - a^2}}{2} \equiv \alpha \pm j\beta & : a^2 < 4b \end{cases} \qquad ③$$

とおける。一般解は定常項と過渡項の和で与えられるから

$$y(t) = \begin{cases} c/b + k_1 e^{(\alpha+\gamma)t} + k_2 e^{(\alpha-\gamma)t} & : a^2 > 4b \\ c/b + k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} & : a^2 = 4b \\ c/b + k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t & : a^2 < 4b \end{cases} \qquad ④$$

となる。k_1, k_2 は初期条件から求まる。$y(0) = 0, y'(0) = 0$ とすると，次式となる。

$$\begin{cases} k_1 = c(\alpha - \gamma)/(2b\gamma),\ k_2 = -c(\alpha + \gamma)/(2b\gamma) & : a^2 > 4b \\ k_1 = -c/b,\ k_2 = \alpha c/b & : a^2 = 4b \\ k_1 = -c/b,\ k_2 = \alpha c/(b\beta) & : a^2 < 4b \end{cases} \qquad ⑤$$

（２） ラプラス変換による方法

(4-4)より，

$$Y(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} U(s) \qquad ①$$

である。ステップ応答では，入力$u(t) = 1$であるから，ラプラス変換して

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad ②$$

よって，①に代入して部分分数展開すると次式となる。

$$Y(s) = \frac{c}{s(s^2 + as + b)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + as + b} \qquad ③$$

恒等式　$k_1(s^2 + as + b) + k_2 s^2 + k_3 s = c$　を解いて，$k_1 = \dfrac{c}{b}$，$k_2 = -\dfrac{c}{b}$，$k_3 = -\dfrac{ca}{b}$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{c}{b}\left(\frac{1}{s} - \frac{s + a}{s^2 + as + b}\right)$$

ラプラス変換表を利用して逆変換すると，

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{b}\{1+\dfrac{\alpha-\gamma}{2\gamma}e^{(\alpha+\gamma)t}-\dfrac{\alpha+\gamma}{2\gamma}e^{(\alpha-\gamma)t}\} & :a^2>4b\\ \dfrac{c}{b}\{1-e^{\alpha t}(1-\alpha t)\} & :a^2=4b\\ \dfrac{c}{b}\{1-e^{\alpha t}(\cos\beta t-\dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)\} & :a^2<4b\end{cases} \qquad ④$$

これは先の結果と一致する。初期値については，伝達関数を求める段階で全て０としていることに注意すること。

２次遅れ要素(second-order lag element)**の標準形**として，**減衰係数**（げんすいけいすう）ζ (ゼータ, Zeta) (damping coefficient)と**固有角周波数** ω_n (natural angular frequency)を用いた次式が良く用いられる。K は**定常ゲイン**である。

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (4\text{-}6)$$

$K=1$のとき，ステップ応答は，④より以下のように計算できる。

(a) $\zeta>1$のとき（異なる２実根）　**過減衰**(over damping)または**過制動**と呼ばれる。この場合，１次系が乗算の形で結合されているとみなせる。

$G(s)$の極　$s=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\alpha\pm\gamma$

$$y(t)=1-\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}+\frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

(b) $\zeta=1$のとき（重根）　**臨界減衰**(critical damping)または**臨界制動**と呼ばれる。

$G(s)$の極　$s=-\omega_n$

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

(c) $0<\zeta<1$ (共役複素根)　**減衰振動**(damped oscillation)あるいは**不足制動**(under damping)と言われる。

$G(s)$の極　$s=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\alpha\pm j\beta$

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \qquad (4\text{-}7)$$

(d) $\zeta = 0$ (共役複素根) **持続振動**と言われる。(c)の場合に$\zeta = 0$と置いてよい。

$G(s)$の極　$s = \pm j\omega_n$

$y(t) = 1 - \cos\omega_n t$

以上の結果をグラフにすると，図 4-2 が得られる。$G(s)$の極に虚部があれば振動する。

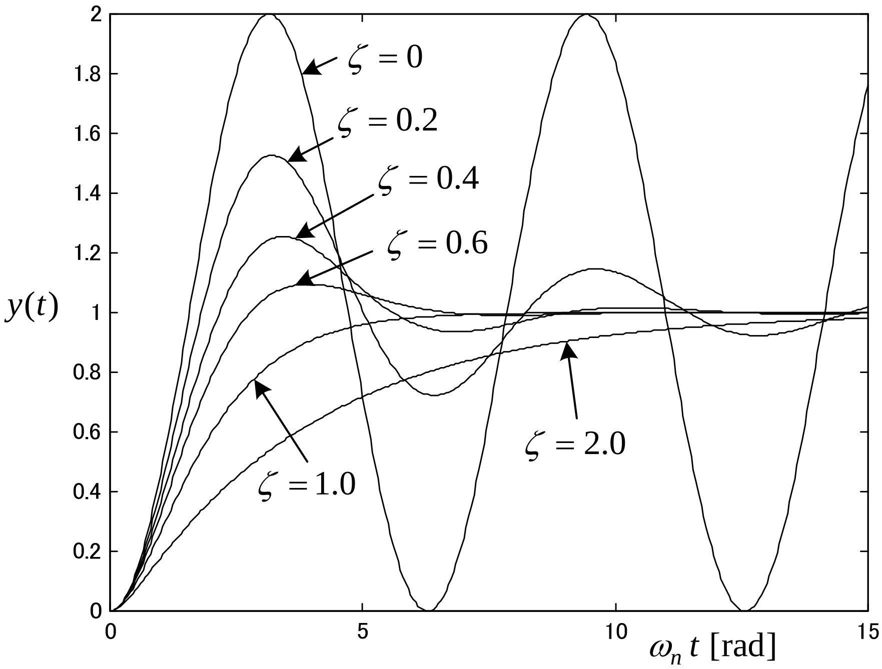


図 4-2　入力$u(t) = 1$に対する 2 次系要素((4-6)式，*K*=1)のステップ応答

(c), (d)の場合の伝達関数の極を図 4-3 に示す。図より，

$$\zeta = \cos\theta \tag{4-8}$$

であることが判る。θが大きいほど応答の減衰が遅く，$\theta = \pi/2$であれば持続振動状態になる。

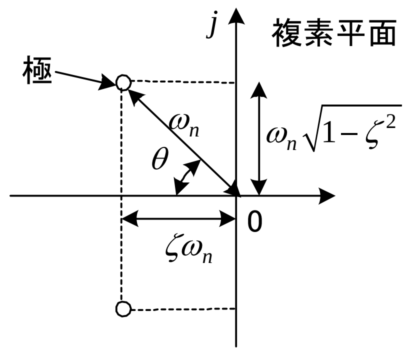
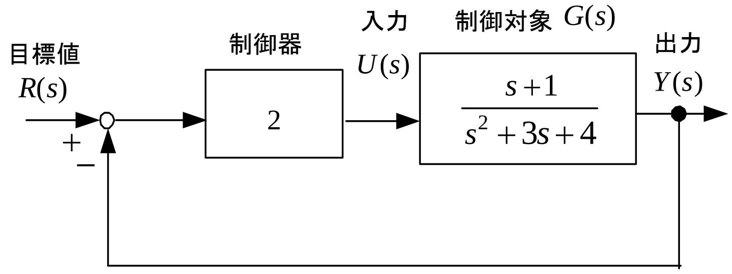


図4-3　伝達関数の極

（例題 4-1）図のブロック線図で示される制御系で，目標値が 0 から 1 に変化したときの出力のステップ応答を求めよ。



（解）目標値 $r(t)=1$ をラプラス変換して，$R(s)=1/s$ である。図より，

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{2s+2}{s^2+3s+4}}{1+\dfrac{2s+2}{s^2+3s+4}}=\frac{2s+2}{s^2+5s+6}$$

出力は

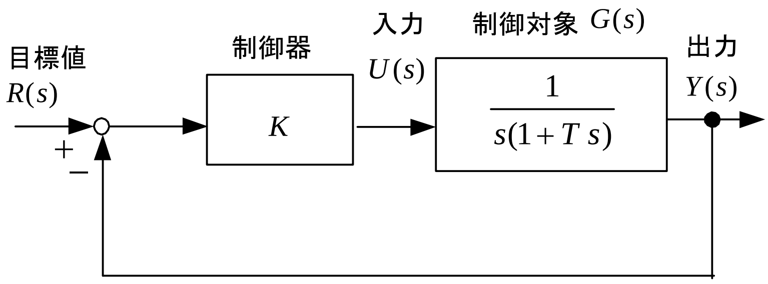
$$Y(s)=\frac{2s+2}{(s+2)(s+3)}R(s)=\frac{2s+2}{s(s+2)(s+3)}$$
$$=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+2}+\frac{c}{s+3}$$

$$a=sY(s)\big|_{s=0}=\frac{1}{3},\ b=(s+2)Y(s)\big|_{s=-2}=1,\ c=(s+3)Y(s)\big|_{s=-3}=-\frac{4}{3}$$

$Y(s)$ を逆変換して，

$$y(t)=1/3+e^{-2t}-(4/3)e^{-3t}$$

（例題 4-2）図のブロック線図で表される制御系で，目標値に対する出力の伝達関数を求めよ。また，$K=25,\ T=0.25$ のとき，減衰係数と固有角周波数の値を求めよ。



(解)　閉ループ伝達関数は，

$$\frac{Y}{R}=\frac{\dfrac{K}{s(1+Ts)}}{1+\dfrac{K}{s(1+Ts)}}=\frac{K}{Ts^2+s+K}$$

$$=\frac{K/T}{s^2+(1/T)s+K/T}$$

題意より，$\dfrac{K}{T}=\omega_n{}^2=100 \quad \therefore \omega_n=10\,\text{rad/s}$ ， $\dfrac{1}{T}=2\zeta\omega_n=4 \quad \therefore \zeta=0.2$

4.3　零点の影響

ステップ応答がある値に収束するかどうかは，伝達関数の極で決る（第 6 章で詳しく述べる）。ここでは，伝達関数の分子を 0 と置いたときの根である**零点**(ぜろてん, れいてん)(zero)が応答に及ぼす影響を考える。

伝達関数が

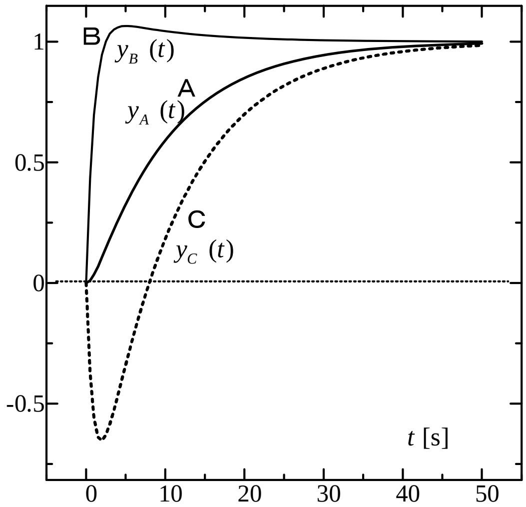
$$G(s)=\frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)} \qquad ：\text{A}$$

で与えられるとき，ステップ応答は次式で計算される。

$$Y(s)=G(s)\,U(s)=\frac{0.1}{s\,(s+1)(s+0.1)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{9(s+1)}-\frac{10}{9(s+0.1)}$$

$$\therefore \quad y_A(t)=1+\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{10}{9}e^{-0.1t}$$



ステップ応答

この結果を図のAに示している。極−0.1 の影響が大きく，応答はこの極に支配されて立ち上がっている。

次に，極−0.1 に近い零点−0.09 を追加した次の伝達関数を考える。

$$G(s)=\frac{0.1(s+0.09)}{0.09\,(s+1)(s+0.1)} \qquad ：\text{B}$$

このときのステップ応答は

$$Y(s)=\frac{0.1(s+0.09)}{0.09\,s\,(s+1)(s+0.1)}=\frac{1}{s}-\frac{1.12}{s+1}+\frac{0.12}{s+0.1}$$

$$\therefore \quad y_B(t)=1-1.12e^{-t}+0.12e^{-0.1t}$$

この結果を図のＢに示している。極－0.1 の影響が小さくなって応答が速く立ち上がっている。これは $y(t)$ の第３項の係数が小さくなっていることからも理解できる。このように近接した位置にある極と零点の組を**ダイポール**(dipole)という。極と零点がダイポールをなしていると，その極による過渡応答の項は一般に非常に小さくなる。完全に一致する場合を**極-零点相殺**(pole- zero cancellation)という。

次に，零点の実部が正の次の場合を考える。

$$G(s)=\frac{-s+0.1}{(s+1)(s+0.1)} \qquad ：C$$

このときのステップ応答は

$$Y(s)=\frac{-s+0.1}{s\ (s+1)(s+0.1)}=\frac{1}{s}+\frac{1.22}{s+1}-\frac{2.22}{s+0.1}$$

$$\therefore \quad y_C(t)=1+1.22\,e^{-t}-2.22\,e^{-0.1t}$$

この結果を図のＣに示している。図のように**逆応答**(inverse response)が現れていることが判る。このように逆応答する制御対象はフィードバック制御が難しいと言われている。極と零点の実部が全て負である**最小位相**であれば逆応答は生じない（十分条件となる）。

Ａ，Ｂ，Ｃいずれの場合も極は同じである。従って，不安定になることはなく応答は収束するが，零点によって項の係数が変わり大きな応答の違いを引き起こすことがある。

4.4　むだ時間要素の時間応答

入力が加わってから L 秒して, 入力と全く同じ信号が出力に現れる制御要素はむだ時間要素と呼ばれる。むだ時間要素への入力を $f(t)$ とすると，出力 $y(t)$ は次式で与えられる。

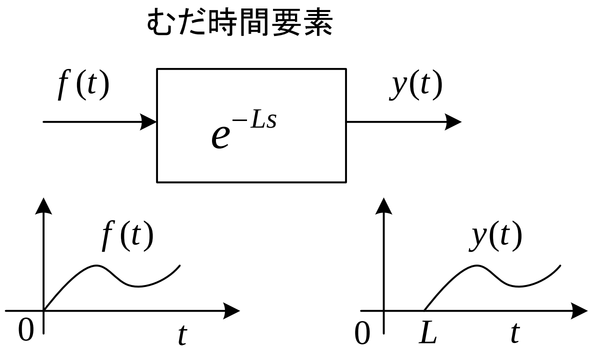


図 4-4　　むだ時間要素の入出力

$$y(t) = f(t-L) \tag{4-9}$$

これをラプラス変換して，

$$Y(s) = \int_0^\infty f(t-L)e^{-st}dt \tag{4-10}$$

いま，$t-L=\tau$ とおくと，

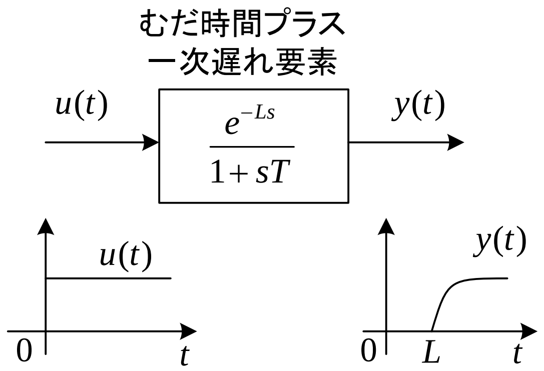
$$Y(s) = \int_{-L}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+L)}d\tau = e^{-sL}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sL}F(s) \tag{4-11}$$

従って，**むだ時間要素**(time-delay element)の伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = e^{-sL} \tag{4-12}$$

むだ時間要素は，化学プラントなど温度，圧力，流量などを制御するプロセス制御系やディジタル制御系でよく現れる。

(例題 4-3)　図のブロック線図で，むだ時間プラス一次遅れ要素のステップ応答を求めよ。



（解）入力 $u(t)=1$ のラプラス変換は，$U(s)=1/s$ である。よって，

$$Y(s) = \frac{e^{-sL}}{1+sT}U(s) = \frac{e^{-sL}}{1+sT}\frac{1}{s}$$

e^{-sL} を除いて，逆ラプラス変換して，

$$f(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s(1+sT)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}\} = (1-e^{-t/T})U(t)$$

となる。ここで，$U(t)$ は単位ステップ関数。$t<0$ で関数が 0 であることを明確に示すためこの例題では $U(t)$ を掛けた（普通は簡単のため省く）。よって，(4-9),(4-11)の関係から

$$y(t) = f(t-L) = (1-e^{-(t-L)/T})U(t-L)$$

となり，$f(t)$ を右に L だけシフトした波形である。$U(t-L)$ は，$t \geq L$ で 1 でそれ以外 0 である。$0 \leq t < L$ で図のように 0 とするため $U(t-L)$ を掛ける必要がある。

4.5 インパルス応答

図 4-5 のシステムで，入力がインパルス関数とすると

$$u(t) = \delta(t) \tag{4-13}$$

である。これをラプラス変換すると，

$$U(s) = 1 \tag{4-14}$$

である。よって，このときの出力は

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \tag{4-15}$$

である。これを，逆ラプラス変換して，次式を得る。

$$y(t) = L^{-1}\left[G(s)\right] \equiv g(t) \tag{4-16}$$

すなわち，伝達関数を逆ラプラス変換したものは，インパルス入力に対する応答（**インパルス応答**(impulse response)という）に他ならない。スイカを指ではじいて音によって甘さを判断するのは一種のインパルス応答を利用したものと言えよう。

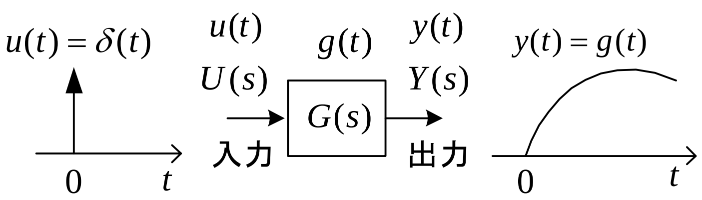


図 4-5　基本ブロック

このインパルス応答 $g(t)$ を用いて，一般の入力 $u(t)$ に対する出力はどう表せるだろうか？

$\delta(t)$ に対する出力が $g(t)$ だから，$t=\tau$ におけるインパルス $\delta(t-\tau)$ $(\tau>0)$ に対する出力は $t \geq \tau$ である任意の時刻 t で $g(t-\tau)$ である。よって，$\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$ の入力があれば，$g(t-\tau)u(\tau)d\tau$ の出力が出る。線形システムでは，重ね合わせの理が成り立つから，$0 \leq \tau \leq t$ の範囲で τ を変化させてこれらの応答を集めるとその間の入力に対する t 時点(現在)での出力 $y(t)$ が得られる。すなわち，一般の入力 $u(t)$ に対する出力は，

$$y(t) = L^{-1}\left[G(s)U(s)\right] = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{4-17}$$

これを，**畳(たたみ)込(こ)み積分**(convolution integral)という。

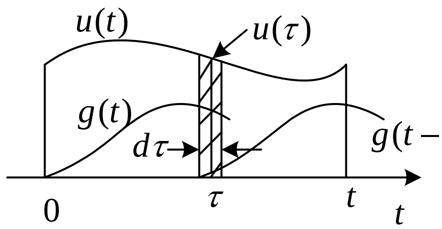


図 4-6　時刻 t までの入力の分割

(4-17)で，$t-\tau=\tau'$ とおき，変形した後改めて，$\tau'=\tau$ とおくと，次式を得る。

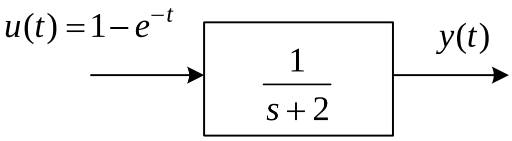
$$y(t)=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{4-18}$$

東北工業大学の中川先生は，人間の現在の心境は畳み込み積分と言っています。人生いろんな出来事 $u(\tau)$ が次から次に起こります。出来事の衝撃度１（面積）に対する心境は人によって決まっており $g(t-\tau)$ で表します（すぐ忘れる人の場合は時間が経つにつれ急に小さくなる関数でしょう）。$t-\tau$ としているのは，その出来事があってから（$t\geq\tau$）心境が起きるからです。よって，それぞれの出来事の衝撃度 $u(\tau)d\tau$ に対する心境は $g(t-\tau)u(\tau)d\tau$ となる。それらを現時刻 t まで加え合わせる（積分する）と現在の心境 $y(t)$ というわけです。昔の衝撃は少し残っているが現在の衝撃が気持ちの中では大きい。

(問題 4-2)　図のブロック線図で，次の２つの方法で，出力 $y(t)$ を求めよ。

(1)　入力をラプラス変換して求める方法

(2)　畳込み積分による方法



（解）(1)　$U(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}$　$Y(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$　$y(t)=\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}$

(2)　$\dfrac{1}{s+2}$ のインパルス応答は　$g(t)=e^{-2t}$

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}(1-e^{-\tau})\,d\tau=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

$g(t)$ のラプラス変換を伝達関数 $G(s)$ と定義し，一般の入力 $u(t)$ に対する応答を畳み込み積分で表わし，それをラプラス変換することで $Y(s)=G(s)U(s)$ が導ける。本書では，判り易くするため，$Y(s)=G(s)U(s)$ で $G(s)$ を定義しました。

4.6 状態方程式による応答の計算

状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \tag{4-19}$$

を解いて応答を求める方法を述べよう。これは，初期値に対し応答を求めることを意味する。(4-19) をラプラス変換して，

$$s\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s) \tag{4-20}$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\,U(s) \tag{4-21}$$

逆ラプラス変換し，第 2 項には畳み込み積分を適用して，

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)dt \tag{4-22}$$

ここで，$e^{\boldsymbol{A}t}$ は，**状態推移行列**(state transition matrix)と呼ばれる。これは，次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \end{aligned} \tag{4-23}$$

但し，$\boldsymbol{I}$: 単位行列

$e^{\boldsymbol{A}t}$ には，以下の性質がある。

（１） $\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$ (4-24)

（２） $e^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}$ (4-25)

（３） $e^{\boldsymbol{A}t_1}e^{\boldsymbol{A}t_2} = e^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}$ (4-26)

（４） $(e^{\boldsymbol{A}t})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}t}$ (4-27)

（５） $L\left[e^{\boldsymbol{A}t}\right] = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ (4-28)

$L^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = e^{\boldsymbol{A}t}$ (4-29)

(5)の証明　まず，$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{I}}{s} + \frac{\boldsymbol{A}}{s^2} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3} +$ 　①　を証明する。

左辺に $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ を掛けると，単位行列になる。右辺について，

$$(\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots)(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{A}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^2}+\cdots-\frac{\boldsymbol{A}}{s}-\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^2}-\cdots=\boldsymbol{I}$$

であるから，①が成立する。①を逆ラプラス変換すると，(5) となる。

$e^{\boldsymbol{A}t}$ の計算法について述べる。

（１）ラプラス逆変換による方法

（4-29）を用いる方法。手計算向き。逆行列を計算する必要があるから，

$\boldsymbol{A}$ が３×３（３行３列）位までしかできないだろう。

（２）級数展開による方法

（4-23）を用いる方法で，項は段々小さくなり，$k=10$　程度でもかなり

良い近似が得られるだろう。コンピュータによる数値計算向き。

（３）行列の対角化による方法

以下に，**行列の対角化**による方法を述べる。

$\boldsymbol{A}$ を n 行 n 列の行列として，述べよう。$\boldsymbol{A}$ の**固有値**（こゆうち）$s_1, s_2, \cdots, s_n$（一般に複素数）が全て異なるとき，$\boldsymbol{A}$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4-30}$$

ここで，

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} s_1 & & & \mathbf{0} \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix} \tag{4-31}$$

$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ はいずれも，$n\times n$ 行列である。固有値 s_i に対する一つの**固有ベクトル**を $\boldsymbol{u}_i=\begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix}$

(4-30)は，固有値の定義

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=s_i\,\boldsymbol{u}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4-32}$$

より導ける。すなわち，以下の式より出る。行列と成分の掛け算はサイズが合えば可能。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\cdots\boldsymbol{u}_n]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n]=[s_1\boldsymbol{u}_1\ s_2\boldsymbol{u}_2\cdots s_n\boldsymbol{u}_n]=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$$

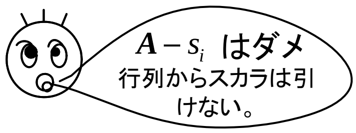
$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ になる部分を $n=3$ のときの証明する。

$$\boldsymbol{PQ} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 u_1^1 & s_2 u_2^1 & s_3 u_3^1 \\ s_1 u_1^2 & s_2 u_2^2 & s_3 u_3^2 \\ s_1 u_1^3 & s_2 u_2^3 & s_3 u_3^3 \end{bmatrix} = \left[s_1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{bmatrix} \quad s_2 \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{bmatrix} \quad s_3 \begin{bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{bmatrix} \right]$$

行列の対角化を用いることで，次式により $\boldsymbol{A}^k$ が計算できる。対角化のすごいところである。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^k &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} s_1^k & & & \boldsymbol{0} \\ & s_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & s_n^k \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned} \qquad (4\text{-}33)$$

$\boldsymbol{A}$ の固有値は，(4-32)より，



$$(\boldsymbol{A} - s_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & 1 \end{bmatrix}$$ 単位行列 $n \times n$

$\boldsymbol{A} - s_i\boldsymbol{I}$ の逆行列が存在すると，$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$ となり，つまらない。固有値は，この逆行列が存在しない条件，

$$\left|\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I}\right| = 0 \qquad \text{または，} \qquad \left|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right| = 0 \qquad (4\text{-}34)$$

より計算できる。[ ] 行列，| | 行列式をしっかり区別すること。行列式はスカラである。

(4-33)を用いると，

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + (\boldsymbol{A}^2t^2)/2! + (\boldsymbol{A}^3t^3)/3! + \cdots \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + (\boldsymbol{Q}^2t^2)/2! + (\boldsymbol{Q}^3t^3)/3! + \cdots)\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 1 + s_1 t + \dfrac{s_1^2 t^2}{2} + \cdots & & & 0 \\ & 1 + s_2 t + \dfrac{s_2^2 t^2}{2} + \cdots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + s_n t + \dfrac{s_n^2 t^2}{2} + \cdots \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & & & 0 \\ & \exp(s_2 t) & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \exp(s_n t) \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4-35}$$

これは，安定性を検討する場合に制御理論で用いられる。

応答を計算するには，(4-22)を用いることもできるが，コンピュータにより状態方程式(4-19)をルンゲ・クッタ法などで直接数値積分することが簡単であろう。ルンゲ・クッタ法を用いると，入力のいろいろの変化や非線形の状態方程式に対しても適用できる。
この他に，制御用の市販ソフトウェアであるマトラブ(Matlab)も良く用いられている。

（例題 4-4）　次の状態方程式の解を求めよ。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad , x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

（<u>ラプラス逆変換による方法</u>）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

とおく。

$$e^{\boldsymbol{A}t} = L^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= L^{-1}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= L^{-1}\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$= L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+3} - \dfrac{1}{s+4} & \dfrac{-1}{s+3} + \dfrac{1}{s+4} \\ \dfrac{2}{s+3} - \dfrac{2}{s+4} & \dfrac{-1}{s+3} + \dfrac{2}{s+4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) & -\exp(-3t) + \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) & -\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

故に，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - \exp(-4t) \\ 2\exp(-3t) - 2\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

（行列の対角化による方法）

$\boldsymbol{A}$ の固有値を求め，固有ベクトルによる対角化を行う。

$$\left|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right| = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = s^2+7s+12=(s+3)(s+4)=0$$

よって，$\boldsymbol{A}$ の固有値は $s=-3,-4$ である。

$s_1=-3$ のとき，

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に，$x_1=x_2$　よって，s_1 に対する固有ベクトルは，

$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$　　（１つに決まらないので適当に選ぶ。）

$s_2=-4$ のとき，

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故に，$2x_1=x_2$　よって，s_2 に対する固有ベクトルは，次のように選ぶ。

$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T$

$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　とすると，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$　と確かになるので，

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \exp(-3t) & 0 \\ 0 & \exp(-4t) \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-3t)-\exp(-4t) & -\exp(-3t)+\exp(-4t) \\ 2\exp(-3t)-2\exp(-4t) & -\exp(-3t)+2\exp(-4t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。以下，同様に計算できる。

(問題 4-3)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$　のとき，$e^{\boldsymbol{A}t}$ を

（１）ラプラス変換，（２）行列の対角化により求めよ。

（解）$e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-3t})/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$