

第6章 フィードバック制御系の安定判別 I

閉ループ伝達関数の分母を 0 とおいた特性方程式の根で、フィードバック制御系の安定性が決る。ラウスの方法は根を求めなくても安定判別が可能で良く用いられる。

6.1 伝達関数と安定条件

制御対象や制御器は一般に伝達関数として表される。良く利用されるフィードバック制御系は図 6-1 の構成となる。ただし、 $R(s) = L[r(t)]$, $U(s) = L[u(t)]$, $Y(s) = L[y(t)]$ である。

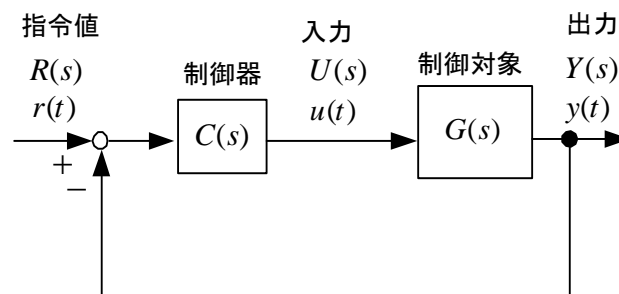


図 6-1 フィードバック制御系の構成

フィードバック制御系では、指令値を変更したときなどに出力がどんどん大きくなって（不安定という）装置が壊れる危険性がある。制御器を設計するとき、システムが安定であることが最も重要である。そこで、本章では安定かどうかを判定する方法を学ぶ。

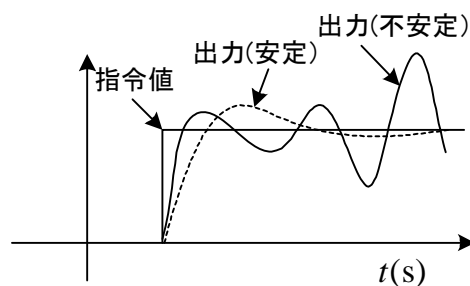


図 6-2 指令値のステップ変化に対する出力の応答(ステップ応答)

安定にはいくつかの定義がある。任意の有界な入力を加えたとき、出力も有界になるときその線形定係数システムは、**有界入力・有界出力安定**(bounded input bounded output stability, **BIBO 安定**)あるいは**入出力安定**という。本書では BIBO 安定を単に**安定**(stable)と呼んでいる。

図 6-1 のシステムで、指令値に対する出力の閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ (closed loop transfer function) は次のように計算できる。

$$G_{cl}(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (6-1)$$

ここで、一巡伝達関数 (loop transfer function) $G_o(s) = C(s)G(s)$ を多項式の比として $G_o(s) = N(s)/D(s)$ と表すと (分母 : denominator, 分子 : numerator), 次式が得られる。

$$G_{cl}(s) = \frac{D(s)}{D(s) + N(s)}$$

$G_{cl}(s)$ が次式のプロパー ($n \geq m$) な有理関数で表現できる場合を考える。

$$G_{cl}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6-2)$$

ステップ応答を求め、それがある値に収束すれば安定と考える。このとき、 $R(s) = 1/s$ であるから、

$$Y(s) = G_{cl}(s)R(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \frac{1}{s} \quad (6-3)$$

$G_{cl}(s)$ の分母が以下のように因数分解できるものとしよう (重根なしと仮定する)。

$$\begin{aligned} & a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\ &= a_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_k)(s - \alpha_1 - j\beta_1)(s - \alpha_1 + j\beta_1) \\ & \quad \times \dots (s - \alpha_l - j\beta_l)(s - \alpha_l + j\beta_l) \end{aligned} \quad (6-4)$$

(ただし, $n = k + 2l$)

すなわち, k 個の実根と $2l$ 個の複素根を持つとする。すると, 部分分数展開により, $Y(s)$ は, 次式のように表せる。

$$\begin{aligned} Y(s) = & \frac{y_\infty}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \dots + \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{K_1}{s - \alpha_1 - j\beta_1} + \frac{K_1'}{s - \alpha_1 + j\beta_1} \\ & + \dots + \frac{K_l}{s - \alpha_l - j\beta_l} + \frac{K_l'}{s - \alpha_l + j\beta_l} \end{aligned}$$

ここで, $y_\infty = sY(s)|_{s=0} = \frac{b_m}{a_n}$, $A_k = (s - p_k)Y(s)|_{s=p_k}$, $K_l = (s - \alpha_l - j\beta_l)Y(s)|_{s=\alpha_l + j\beta_l}$

などとして求められる。

これをラプラス逆変換して,

$$K_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} + K_i' e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} = e^{\alpha_i t} (B_i \cos \beta_i t + C_i \sin \beta_i t)$$

と変形し、 $y(t)$ は次式のようになる。

$$y(t) = y_\infty + \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^l e^{\alpha_i t} (B_i \cos \beta_i t + C_i \sin \beta_i t) \quad (6-5)$$

ただし、 $B_i = K_i + K_i'$ 、 $C_i = j(K_i - K_i')$ である。 B_i 、 C_i は実数となる。

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $y(t)$ が有限であるためには、全ての i に対して、 $p_i \leq 0, \alpha_i \leq 0$ であればよいことが判る。安定条件としては、等号を除き、 $p_i < 0, \alpha_i < 0$ をいう。このとき、 $t \rightarrow \infty$ でexpの項は全て0となり、 $y(\infty) = y_\infty$ となる。 y_∞ は $R(s) = 1/s$ の項に起因する。(6-4)では、重根を持つ場合は考えていないが、重根がある場合も含めて、一般に次の重要な定理が得られている。

(安定条件) 線形システムが安定である必要十分条件は、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の分母を0と置いた式(特性方程式(characteristic equation)と呼ばれる)

$$A(s) \equiv a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

の全ての根の実部が負(左半平面(left half plane)に根がある)であることである。

特性方程式の根は、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の極(pole)と言ってもよい。(伝達関数で、分母を0にする根を極、分子を0にする根を零点という。)図6-1とその特性方程式

$$1 + C(s)G(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad \text{すなわち、} \quad D(s) + N(s) = 0$$

は一例で、これと異なる場合には、実際に閉ループ伝達関数を計算し、その分母を0として特性方程式を求める必要がある。安定条件が満足されるとき、 $A(s)$ はフルビッツ多項式(Hurwitz polynomial)または安定多項式(stable polynomial)と呼ばれる。なお、図6-1の線形システムでは、指令値 $r(t)$ は安定判別に関係ない。また、制御対象だけの伝達関数 $G(s)$ についても上記の安定条件は成立し、その場合は入力 $u(t)$ が安定判別に関係しない。

図6-3に閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の極(特性方程式の根)とステップ応答の関係を示す。実軸上の極については、振動することなしに発散(右半平面)または収束(左半平面)する。虚部が大きい程振動周波数が高く、実部が正の場合にはその値が大きい程急激に発散し、実部が負の場合にはその絶対値が大きい程速く収束する。極が多く存在する場合には、実部が最も大きい代表根の影響を強く受けた応答となる。すなわち、不安定の度合いが大きい極ほど応答を左右する。閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の分子を0とする零点が安定か不安定かを左右することはない。ただし、零点により、 A_i, B_i, C_i が異なり、応答に影響を及ぼす。特に、極の近くに零点が存在する場合、その極の影響は応答に現れにくい(極 - 零点

相殺)。しかし、時間が経つと極の影響が支配的となる。また、右半平面に零点がある場合、指令値が入力された直後に、応答が一度逆方向にふる場合がある。

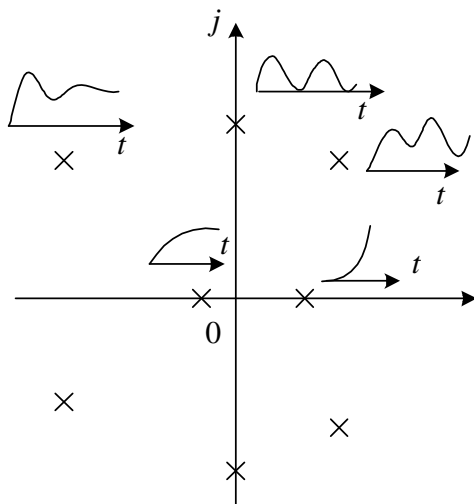
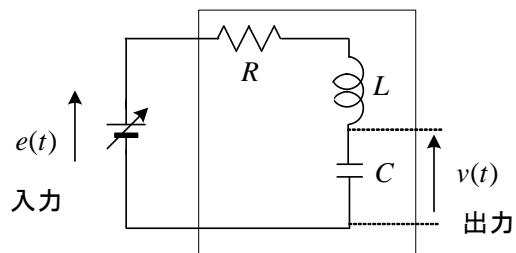


図 6-3 特性方程式の根とステップ応答

(例題 6-1) 図の制御対象で、コンデンサ電圧 $v(t)$ を検出して、入力電圧 $e(t)$ を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$

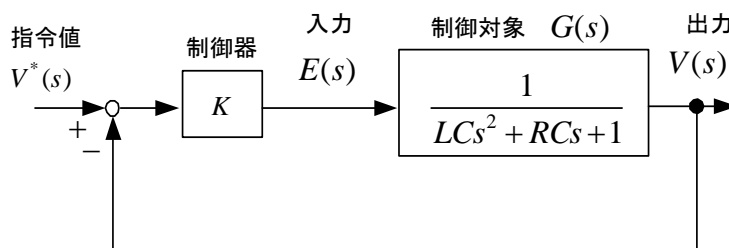
- (1) 制御系のブロック図を書け。
- (2) 閉ループ伝達関数を求めよ。
- (3) 制御系が安定である K の条件を求めよ。
- (4) $R = 1(\Omega), L = 0.1(\text{H}), C = 0.001(\text{F}), K = 3$ のとき、 $v^*(t) = 1\text{V}$ に対するステップ応答を求めよ。



(解) (1) $\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$ ただし、 $V(s) = L[v(t)], E(s) = L[e(t)]$

制御器についても同様にラプラス変換して、

$$E(s) = K(V^*(s) - V(s)) \quad \text{ただし、} V^*(s) = L[v^*(t)]$$



(2) 閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ は,

$$G_{cl}(s) = \frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{LCs^2 + RCs + K + 1}$$

(3) 特性方程式は,

$$LCs^2 + RCs + K + 1 = 0$$

極は, 次式となる。

$$s = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC(K+1)}}{2LC}$$

R, L, C はいずれも正だから, s の実部が負となる安定条件は,

$$4LC(K+1) > 0 \quad \therefore K > -1$$

(4) $V^*(s) = 1/s$ であるから, (2) で数値を代入し,

$$V(s) = \frac{K}{LCs^2 + RCs + K + 1} V^*(s) = \frac{3}{s(10^{-4}s^2 + 10^{-3}s + 4)}$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{10^{-4}s^2 + 10^{-3}s + 4}$$

と置くと, 恒等式により

$$a = \frac{3}{4}, b = -\frac{3}{4} \times 10^{-4}, c = -\frac{3}{4} \times 10^{-3}$$

$$\therefore V(s) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+10}{s^2 + 10s + 4 \times 10^4} \right)$$

表 2-1 を用いて逆変換して,

$$v(t) \approx \frac{3}{4} - \frac{3}{4} e^{-5t} (\cos 200t + \frac{1}{40} \sin 200t)$$

(注) (3)より, 極: $s = \frac{-10^{-3} \pm \sqrt{10^{-6} - 4^2 \times 10^{-4}}}{2 \times 10^{-4}} \approx -5 \pm j200$ は, 過渡項の t の係数

となっている。これは, $v(t)$ を定常項+過渡項として解くことでより明確に理解できる。その際, 初期値は一階微分も含め 0 とすると上式が得られる。

以上のように特性方程式の根を求めることで, 安定判別が可能となる。しかし, これが適用できるのは, s のべき乗が 2 すなわち 2 次の微分方程式で表現できるシステム (2 次系) までで, これ以上次数が高くなると根を求めることは容易ではない (もちろん, コンピュータで計算すれば別だが)。そこで, 考案されたのがラウスの安定判別法である。

6.2 ラウスの安定判別法

図 6-1 のシステムで、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ は

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (6-6)$$

で与えられた。これから、分母を 0 とおいた、特性方程式は、次式で与えられる。

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (6-7)$$

($1 + C(s)G(s) = 0$ を整理しても得られる。(6-6)で $C(s)G(s) = N/D$ としてみよ。)

ラウス (Routh) の安定判別法 :

(フルビッツ(Hurwitz)の安定判別法もあるが、実質的に同じものである。)

制御系が安定 (特性方程式(6-7)の根の実部が全て負) であるための条件として次の 2 つの定理が知られている。ただし、 $a_0 > 0$ とする (負なら両辺に-1 を掛ける)。

- (i) すべての係数 a_0, a_1, \dots, a_n が正であり、0 の項がないこと。これは安定であるための **必要条件** で、この条件を満足しても安定とは限らない。満足しないと不安定。
- (ii) 係数を演算して、以下の **ラウスの表** をつくる。($n = 6$ の場合を例にとる)

s^6	a_0	a_2	a_4	a_6
s^5	a_1	a_3	a_5	0
s^4	$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{a_1} = a_6$	0
s^3	$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3 - a_1b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5 - a_1b_5}{b_1}$	0	
s^2	$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = b_5 = a_6$	0	
s^1	$e_1 = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{d_1} = \frac{d_1c_3 - c_1d_3}{d_1}$	0		
s^0	a_6			

このとき、左端の列の係数 $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_6$ がすべて正であることが安定であるための **必要十分条件** である。符号変化の回数だけ不安定根が存在する。

(ii) の条件が満足されると (i) の条件は自動的に満足されていることを示す。

(ii) の条件より

$$a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0, e_1 > 0, a_6 > 0 \quad (6-8)$$

$c_1 > 0, d_1 > 0, d_3 = a_6 > 0$ であり, $e_1 > 0$ より

$$c_3 > 0 \quad (6-9)$$

従って, $b_1 > 0, a_1 > 0, b_5 = a_6 > 0$ であり, $c_3 > 0$ より

$$a_5 > 0 \quad (6-10)$$

同様に, $d_1 > 0$ より

$$a_4 > 0$$

が得られる。以下同様にして $a_3 > 0, a_2 > 0$ が得られる。

従って, 安定判別では (ii) の条件だけでも可能である。ラウスの表を作るとき, 左端の列が 0 になれば不安定と考えてよい。

これまで, 図 6-1 のブロック線図で示される制御系の安定判別を考えてきたが, 図 6-4 の場合にはどうしたらよいだろうか?

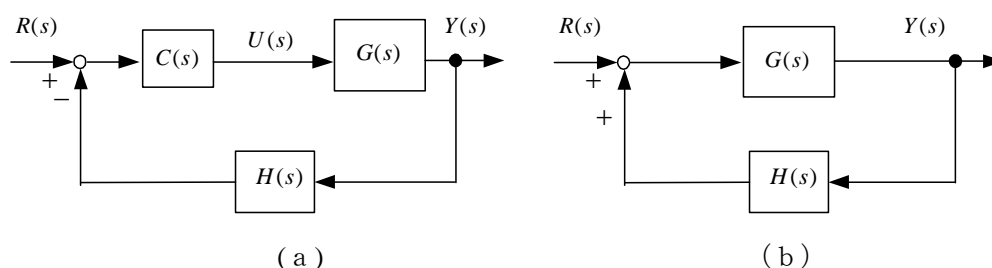


図 6-4 センサの伝達関数を考慮した制御系

(a) の場合には, 閉ループ伝達関数は,

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad (6-11)$$

であるから, 次式より得られる特性方程式に適用すればよい。

$$1 + C(s)G(s)H(s) = 0 \quad (6-12)$$

$C(s)G(s) = N_1 / D_1, H(s) = N_2 / D_2$ とおいて特性方程式が(6-12)より得られることを確認せよ。

一方, (b) の場合には,

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \quad (6-13)$$

であるから、特性方程式は次式より得られる。

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad (6-14)$$

従って、(6-14)にラウスの方法を適用すればよい。なお、線形システムでは指令値 $R(s)$ は自由に（出力に影響されずに）与える限り安定性に関係である。従って、 $R(s) = 0$ でも安定条件は変わらない。(b)の場合より、図 6-5 の安定条件は、(6-14)で判定できる。

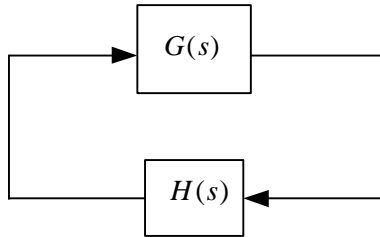
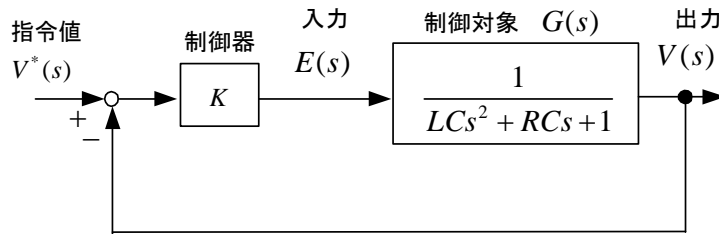


図 6-5 指令値 0 のシステム

(例題 6-2) 図のブロック線図で示される制御系の安定判別をラウスの方法で行え。



但し、 L, C, R は全て正とする。

(解) 特性方程式は、次式で与えられる。

$$1 + \frac{K}{LCs^2 + RCs + 1} = 0$$

$$\therefore LCs^2 + RCs + K + 1 = 0$$

ラウスの安定判別法を適用する。

ラウスの表を作る。

$$\begin{array}{r} s^2 \quad LC \quad K+1 \\ s \quad RC \\ s^0 \quad K+1 \end{array}$$

1 列目が全て正でないといけない。よって、安定条件は、 $K > -1$

(注) $R = 0, K + 1 > 0$ であれば、根は $s = \pm j\sqrt{\frac{K+1}{LC}}$ となり、虚軸上に存在する。

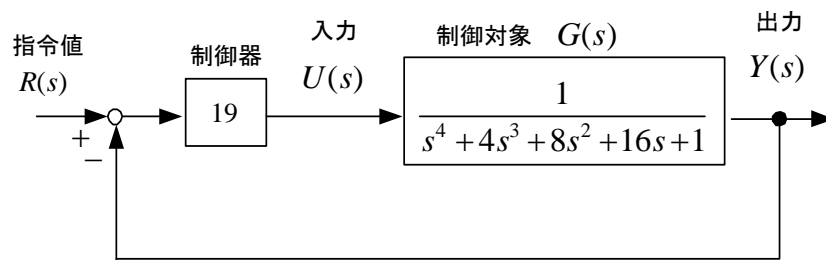
* 一般に、2次系の特性方程式、 $as^2 + bs + c = 0$ の安定条件は、ラウスの安定判別法より、ラウスの表を作ることにより

$a > 0, b > 0, c > 0$ または $a < 0, b < 0, c < 0$ となる (覚えておこう)。

直接求めると $s = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} \right)$ より、実部が負の条件は $\frac{c}{a} > 0$ 及び $\frac{b}{a} > 0$ となり

同じ結果を得る。ラウスの方法が簡単だ。

(例題 6-3) 図のブロック線図で示される制御系の安定判別を行え。



(解) 特性方程式は、

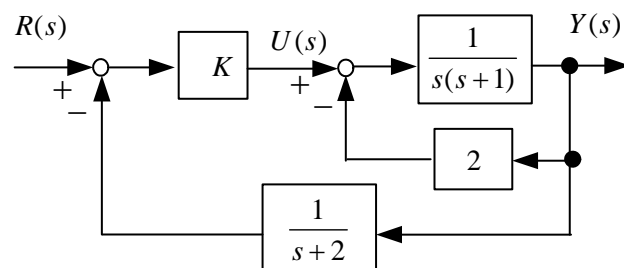
$$1 + \frac{19}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 1} = 0 \quad \therefore s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 20 = 0$$

ラウスの表をつくる。

s^4	1	8	20
s^3	4	16	0
s^2	$\frac{4 \times 8 - 1 \times 16}{4} = 4$	$\frac{4 \times 20 - 1 \times 0}{4} = 20$	0
s^1	$\frac{4 \times 16 - 4 \times 20}{4} = -4$	0	
s^0	20		

よって、1列が、1,4,4,-4,20 となり、符号が2回変化している。不安定根が2個存在する。

(例題 6-4) 図のブロック線図で示される制御系で安定となる K の条件を求めよ。



(解) まず、 $Y(s)/U(s)$ を求める。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{2}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

特性方程式は、閉ループ伝達関数 $Y(s)/R(s)$ の分母を 0 と置いた式だから、

$$1 + K \frac{1}{s^2 + s + 2} \frac{1}{s + 2} = 0$$

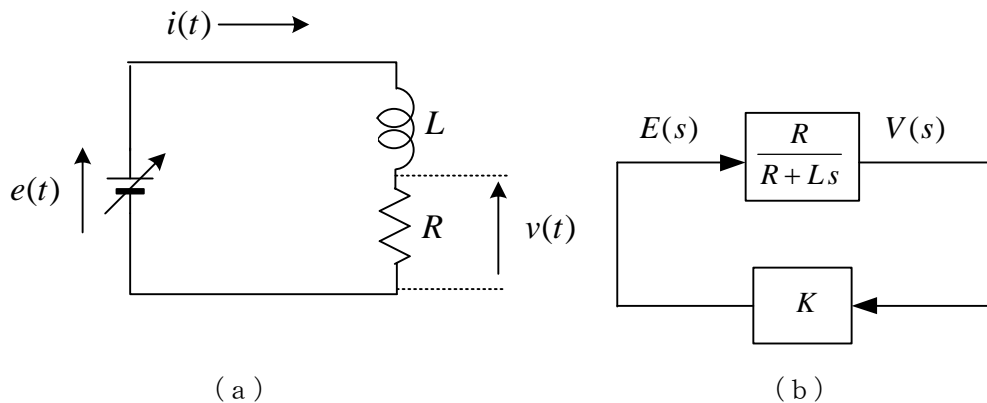
$$\therefore s^3 + 3s^2 + 4s + 4 + K = 0$$

ラウスの表は、

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \quad 4 \\ 3 \quad 4+K \\ \frac{12-(4+K)}{3} \\ 4+K \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \therefore 8 > K \\ \therefore K > -4 \end{array}$$

1 列目が全て正であることから、安定条件は $8 > K > -4$

(例題 6-5) 図 (a) の回路で、 $e(t) = Kv(t)$ と制御するとき、安定であるための条件を求めよ。



(解) ラプラス変換して、図 (b) のブロック図が得られる。特性方程式は、

$$1 - \frac{KR}{R+Ls} = 0 \quad \therefore Ls + R(1-K) = 0$$

$$\therefore s = \frac{R(K-1)}{L} < 0 \quad \text{より} \quad K < 1$$

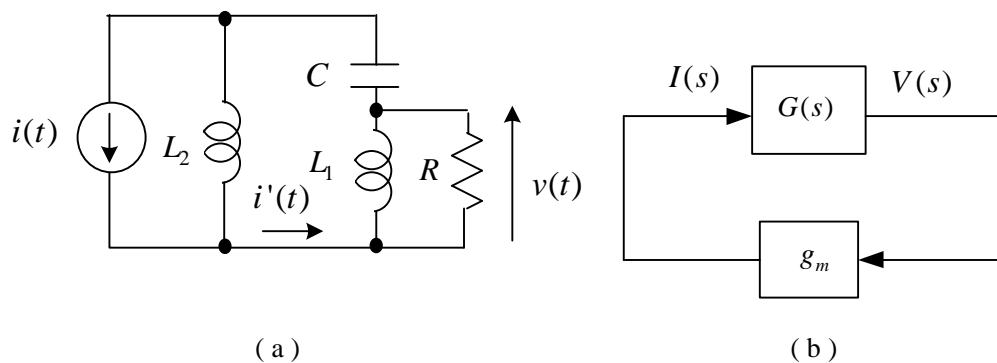
* 安定のとき、電圧や電流は最終的に 0 となる。 K が負の場合には負帰還であり、 $v(t)$ と逆極性の電源電圧となって変化を抑えることになり安定する。 K が正で大きいときには、 $v(t)$ の変化を益々増大させることになり不安定となる。

(例題 6-6) 図 (a) の回路で、電流源 $i(t)$ を入力とし、 $v(t)$ が出力である。

(1) 伝達関数 $G(s) = V(s)/I(s)$ を求めよ。

(2) $i(t) = g_m v(t)$ と制御するとき、不安定であるための条件を求めよ。

ただし、 $g_m > 0$ とする。



(解) (1) 分流の公式から

$$I'(s) = \frac{sL_2}{sL_2 + \frac{1}{sC} + \frac{sL_1 R}{sL_1 + R}} I(s), \quad I'(s) \frac{sL_1}{sL_1 + R} R = -V(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = -\frac{L_1 L_2 R C s^3}{L_1 L_2 C s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R}$$

(2) 特性方程式は、(b) 図より

$$1 - g_m G(s) = 1 + \frac{g_m L_1 L_2 R C s^3}{L_1 L_2 C s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R} = 0$$

$$L_1 L_2 C (1 + g_m R) s^3 + (L_1 + L_2) R C s^2 + L_1 s + R = 0 \quad \text{①}$$

ラウスの表

$$s^3 \quad L_1 L_2 C (1 + g_m R) \quad L_1$$

$$s^2 \quad (L_1 + L_2) R C \quad R$$

$$s^1 \quad \frac{L_1^2 R C - L_1 L_2 C g_m R^2}{(L_1 + L_2) R C}$$

$$s^0 \quad R$$

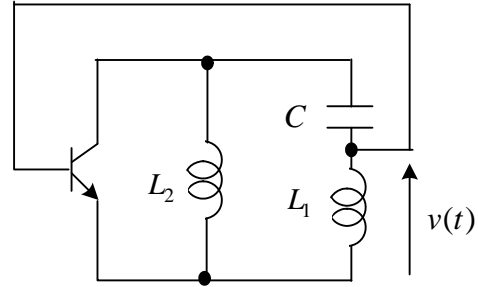
$$\text{よって不安定となる条件は、第 1 列目に負の項があればよく、} \quad L_1 < L_2 g_m R \quad \text{②}$$

この回路は、図のトランジスタにより実現でき、フット・キューン発振器として知られている (文献(17)参照)。 R はトランジスタの抵抗である。なお、バイアス回路は省略している。

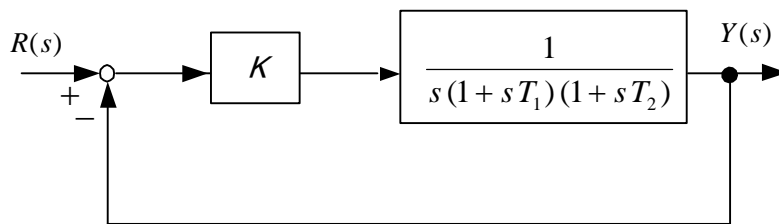
発振器として動作するには、①式が虚軸上に根を持つ必要があり、 $s = j\omega$ を代入したとき成り立つ必要がある。実際に計算すると実部と虚部より次式が得られる。

$$\omega = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C} \quad ③ \quad L_1 = L_2 g_m R \quad ④$$

よって、④の条件を満たすように回路を設計すれば、③の共振角周波数の発振器が得られる。実際には、経年変化などで回路のパラメータが変化し発振が止まることがあるから、②の条件を考慮して、少し不安定側に設計すべきであろう。不安定ならどんどん値が大きくなりそうであるが、非線形であるから持続振動する。



(問題 6-1) 図のフィードバック制御系が安定であるための、 K, T_1, T_2 の条件を求めよ。

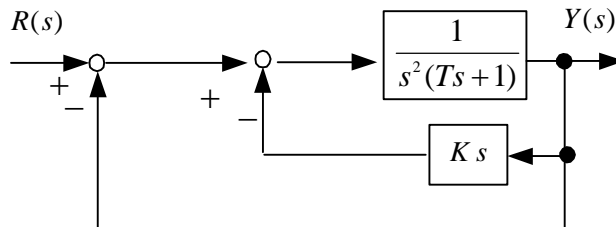


(解) 特性方程式 $s^3 T_1 T_2 + s^2 (T_1 + T_2) + s + K = 0$

安定条件 $T_1 + T_2 > K T_1 T_2, T_1 > 0, T_2 > 0, K > 0$

*ラウスの表より導けるが、この場合には、(i)の係数同符号の条件を併用した方が簡単である。

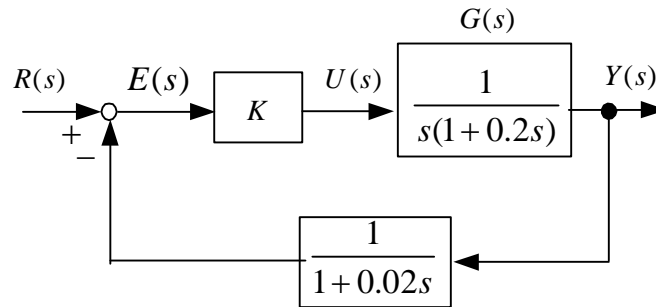
(問題 6-2) 図のフィードバック制御系が安定であるための、 K, T の条件を求めよ。



(解) 特性方程式 $Ts^3 + s^2 + Ks + 1 = 0$

安定条件 $K > T > 0$

(問題 6-3) 図の制御系が安定であるための, K の条件をラウスの安定判別法により求めよ。



(解) 特性方程式は $0.004s^3 + 0.22s^2 + s + K = 0$

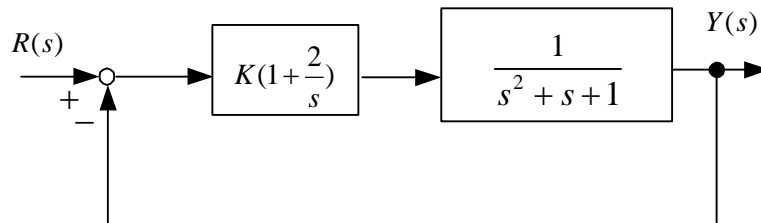
ラウスの表は,

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 0.004 \quad 1 \\ s^2 \quad 0.22 \quad K \\ s^1 \quad \frac{0.22 - 0.004K}{0.22} \\ s^0 \quad K \end{array}$$

ラウスの表 1 列目が全て同符号であることから安定条件は, $55 > K > 0$

(問題 6-4) 図のフィードバック制御系につき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 閉ループ伝達関数を求めよ。
- (2) 制御系が安定であるための, K の条件を求めよ。



(解) (1) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ks + 2K}{s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K}$

(2) 特性方程式 $s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K = 0$

ラウスの表は

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad K+1 \\ s^2 \quad 1 \quad 2K \\ s \quad K+1-2K \\ s^0 \quad 2K \end{array}$$

よって, $1 - K > 0$ かつ $K > 0$ より, $1 > K > 0$

6.3 状態方程式の安定判別

制御対象は,

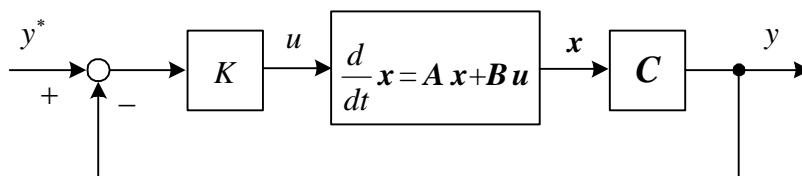
$$\text{状態方程式: } \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (6-15)$$

$$\text{出力方程式: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6-16)$$

により記述できることは既に述べた。フィードバック制御系では、これに制御器の記述が必要になる。簡単な比例制御を考えると、

$$u(t) = K(y^*(t) - y(t)) \quad (6-17)$$

ここで、 K : 比例ゲイン, $y^*(t)$: 指令値



(6-16)を(6-17)に代入し、それを(6-15)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}K\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}K y^*(t) \\ &= \mathbf{A}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}' y^*(t) \end{aligned} \quad (6-18)$$

これは、フィードバック制御系全体の状態方程式である。制御対象の入力が消去されて、その代わりに指令値が自由に変えられる変数として登場している。

閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ は、

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= \frac{Y(s)}{Y^*(s)} \\ &= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}') \mathbf{B}'}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}'|} \end{aligned} \quad (6-19)$$

となる。伝達関数の分母を0とおいたものが特性方程式だから、特性方程式は、

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}'| = 0 \quad (6-20)$$

となる。特性方程式の根（特性根）は、**システム行列 \mathbf{A}'** の固有値等しいことが判る。従っ

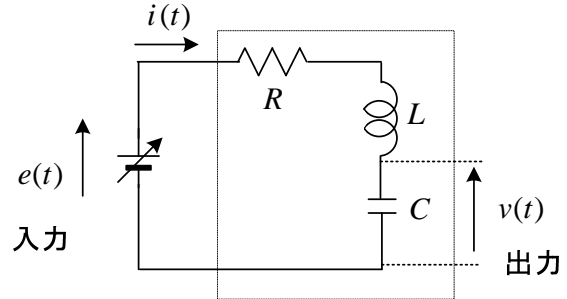
て、 \mathbf{A}' の固有値が左半平面にあればシステムは安定であることが判る。指令値は安定性に影響を与えない。制御対象だけの場合は \mathbf{A} の固有値が左半平面にあれば安定である。

(例題 6-7) 図の制御対象で、コンデンサ電圧 $v(t)$ を検出して、入力電圧 $e(t)$ を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t)) \quad \text{①}$$

(1) フィードバック制御系の状態方程式を求めよ。

(2) 制御系が安定である K の条件を求めよ。



(解) (1) 状態変数 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ とすると、

制御対象の状態方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} e \quad \text{②}$$

一方、制御対象の出力方程式は次式で与えられる。

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad \text{③}$$

①, ②, ③より (この場合③は不要), 制御系全体の状態方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -(1+K)/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/L \end{bmatrix} v^* \quad \text{④}$$

(2) ④より、固有値の計算を行う特性方程式は、

$$\begin{aligned} \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -(1+K)/L & -R/L \end{bmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} s & -1/C \\ (1+K)/L & s + R/L \end{vmatrix} \\ &= s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1+K}{LC} = 0 \end{aligned}$$

ラウスの安定判別法により、安定条件は $K > -1$

6.4 非線形システムの安定判別

本テキストでは、線形システムだけを対象としている。しかし、実際には非線形システムも多く存在する。ただ、非線形システムは線形システムのように簡単に安定判別することができない。そこで、ある平衡点 (定常点) 近傍^{きんぼう}での変数の微小変動を考えて線形化することが多い。このようにして得られた数式モデルは**線形モデル**(linear model)と呼ばれている。

ここでは非線形の制御対象として図 6-6 の^{ちよくまき}直流直巻電動機を考え、その線形モデルを導出する。直流直巻電動機は従来電車に利用されてきたが、現在でも自動車用スタータ（セルモータ）などに利用されている。低速で大きなトルクを発生する利点がある。

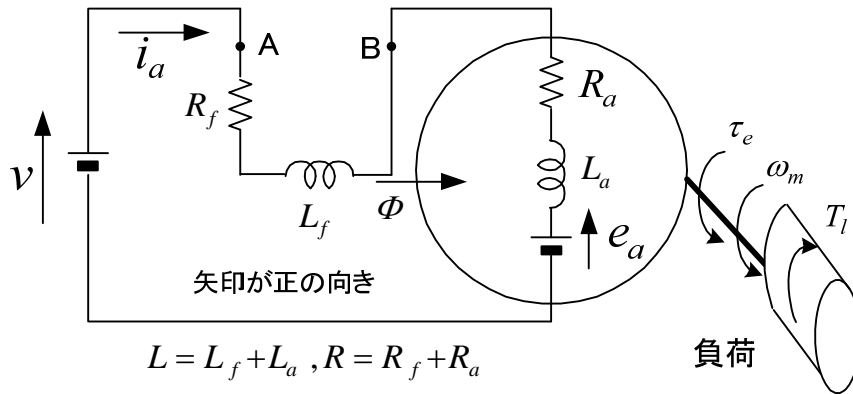


図 6-6 直流直巻電動機

直流直巻電動機は、磁束 Φ を作る界磁巻線が電機子回路に直列に接続されているので、

$$\Phi = k i_a \quad (6-21)$$

が成り立つ。ここで、 i_a は電機子電流である。 k は定数であるが、端子 AB をつなぎかえて磁束の向きを反対にできるので、正または負となる。(6-21)を用い、例題 3-6 より誘導起電力 e_a と発生トルク τ_e は次式で表される。ここで ω_m は回転角速度である。

$$e_a = K \Phi \omega_m = k K i_a \omega_m \quad (6-22)$$

$$\tau_e = K \Phi i_a = k K i_a^2 \quad (6-23)$$

従って、図 6-6 は以下の非線形微分方程式で表すことができる。

$$v = R i_a + L \frac{d i_a}{d t} + k K i_a \omega_m \quad (6-24)$$

$$J \frac{d \omega_m}{d t} = k K i_a^2 - T_l \quad (6-25)$$

ここで、 R : 電機子巻線および直巻界磁巻線の抵抗の和、 L : 電機子巻線および直巻界磁巻線のインダクタンスの和、 J : 慣性モーメント（モータ+負荷）、 T_l : 負荷トルク

非線形というのは、状態変数の積 $i_a \omega_m$ や 2 乗 i_a^2 が含まれていることを言う。(6-15)の様に線形システムでないと安定判別は困難である。そこで、(6-24)、(6-25)を平衡点に関して線形化することで線形モデルを導く。

まず、**平衡点**であるが、図 6-6 で自由を選べる値は電源電圧 v と負荷トルク T_l である。これらは入力であり、負荷トルクは制御には使えないので、外乱入力と呼ぶ。 v と T_l が一定値であれば(この値を v_0 と T_{l0} とする)、定常状態では状態変数の変化はないので(6-24)、(6-24)の微分を 0 とおいて (**定常解析**という)、平衡点で次式が成り立つ。

$$v_0 = R i_{a0} + k K i_{a0} \omega_{m0} \quad (\text{常に } v_0 > 0 \text{ とする}) \quad (6-26)$$

$$0 = k K i_{a0}^2 - T_{l0} \quad (6-27)$$

一般的な定常時の発生トルクと速度の関係は、(6-26)で添字 0 を付けず次式で与えられる。

$$\tau_e = k K i_a^2 = k K \left(\frac{v}{R + k K \omega_m} \right)^2 \quad (6-28)$$

これを図 6-7 に示す。発生トルクと負荷トルク(一定と仮定)との交点では(6-27)が成り立ち平衡点になる (添字 0 を付ける)。重負荷時には低速(A 点)であるが、軽負荷時には高速(C 点)になるので、無負荷運転は厳禁である。 $\omega_m > 0, \tau_e > 0$ の I 象限は正転, 力行(電動機)運転領域で, $\omega_m < 0, \tau_e < 0$ の III 象限は逆転, 力行運転領域である。発生トルクを負にするには, AB をつなぎかえ $k < 0$ とする。平衡点 B や E は, 何かの原因で速度が平衡点の値よりも上昇したとき, 負荷トルクが発生トルクより大きくなり速度の増加を抑えようし, 逆に何かの原因で速度が平衡点の値よりも減少したときは, 発生トルクが負荷トルクより大きくなり速度の減少を抑えようとするから安定に運転できると予測される (線形モデルで証明される)。平衡点 F と D は回生(発電機)運転であるが, 同様に考えると逆のトルク特性なので不安定になると予測される。この考え方は一般の電動機制御においても重要である。

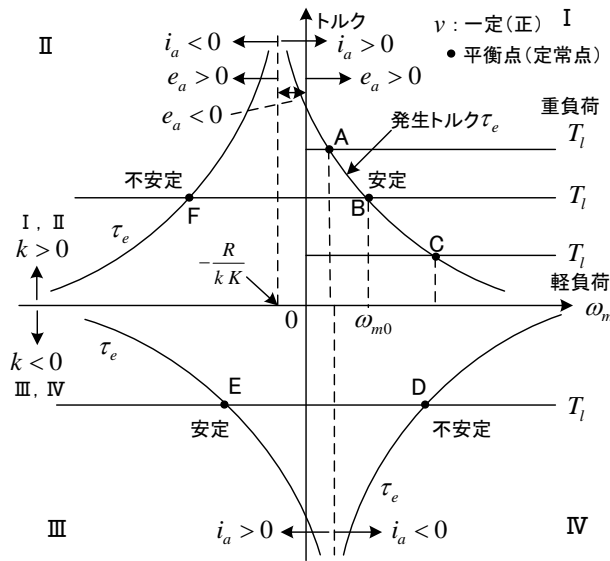


図 6-7 直流直巻電動機 の速度トルク特性

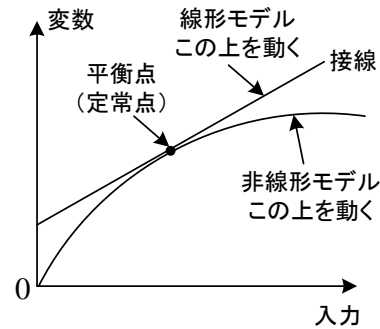


図 6-8 線形モデルのイメージ

線形化を行ってみよう。変数を平衡点の値 (添え字 0) とそれからの微小変動分 (Δ を付ける) に分けて, 次式の様に表す。

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \Delta v, & i_a &= i_{a0} + \Delta i_a \\ \omega_m &= \omega_{m0} + \Delta \omega_m, & T_l &= T_{l0} + \Delta T_l \end{aligned} \quad (6-29)$$

(6-24), (6-25)に代入して

$$v_0 + \Delta v = R(i_{a0} + \Delta i_a) + L \frac{d(i_{a0} + \Delta i_a)}{dt} + k K (i_{a0} + \Delta i_a)(\omega_{m0} + \Delta \omega_m)$$

$$J \frac{d(\omega_{m0} + \Delta \omega_m)}{dt} = k K (i_{a0} + \Delta i_a)^2 - (T_{l0} + \Delta T_l)$$

平衡点の値（添え字 0）については、等しいので両辺から省くことができる（その微分は 0 で(6-26), (6-27)が成り立っている）。また、平衡点からの変数の微小変動を考えているので Δ のついた項同士の積は小さいので無視できる。この結果、次式が得られる。

$$\Delta v = R \Delta i_a + L \frac{d \Delta i_a}{dt} + k K i_{a0} \Delta \omega_m + k K \omega_{m0} \Delta i_a \quad (6-30)$$

$$J \frac{d \Delta \omega_m}{dt} = 2k K i_{a0} \Delta i_a - \Delta T_l \quad (6-31)$$

ある変数の微小変動項の係数はその変数で偏微分することにより、(6-24), (6-25)から直接求めてもよい（普通はこちらを使う）。(6-30), (6-31)は次式の状態方程式で表せる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R + kK\omega_{m0})/L & -kK i_{a0}/L \\ 2kK i_{a0}/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta T_l \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

行列の成分に含まれる変数は定常値であるから定数で、**線形モデル**と呼ばれ、(6-15)に対応した線形の状態方程式である。制御対象の安定性は、入力に無関係に次式の特性方程式で判別できる。これはシステム行列の固有値を求める式である。

$$\left| sI - \begin{bmatrix} -(R + kK\omega_{m0})/L & -kK i_{a0}/L \\ 2kK i_{a0}/J & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (6-33)$$

$$\text{故に} \quad \left| \begin{bmatrix} s + (R + kK\omega_{m0})/L & kK i_{a0}/L \\ -2kK i_{a0}/J & s \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$s^2 + \frac{R + kK\omega_{m0}}{L} s + \frac{2(kK i_{a0})^2}{JL} = 0 \quad (6-34)$$

ラウスの安定判別法により、安定条件は $R + kK\omega_{m0} > 0$ である。I, III象限ではこの条件を満足し平衡点 A, B, C, E は安定、平衡点 F, D ではこの条件を満足しないので不安定となる。常に $v_0 > 0$ なので、 $i_{a0} = v_0 / (R + kK\omega_{m0})$ だから、安定条件は電流が正と一致する。なお、 $v_0 < 0$ としても発生トルクの向きは変わらないので、 $v_0 > 0$ の場合だけ考えてよい。

一般に、平衡点が変わると線形モデルの固有値も変わるので、システムの安定判別は、たくさんの平衡点ごとに調べる必要がある。図 6-8 は線形モデルのイメージ図である。平衡点で変数の接線近似が線形モデルである。入力が考えている平衡点近傍で変化するときには、実際の非線形モデルと近似である線形モデルの誤差は小さい。