

第7章 フィードバック制御系の安定判別Ⅱ

本章では、ナイキスト軌跡によるナイキストの安定判別法とそれをボード線図に適用した安定判別法について述べる。これらは、ラウスの方法に比べ安定性の度合いも評価できる特徴があり良く用いられる。一巡伝達関数に適用するので間違えないように。

7.1 ナイキストの安定判別法

図 7-1 のフィードバック制御系で、偏差からフィードバック信号までの伝達関数を**一巡伝達関数(loop transfer function)**または**開ループ伝達関数(open-loop transfer function)**または**還送比(return ratio)**と呼ぶ。これを $G_o(s)$ で表す。

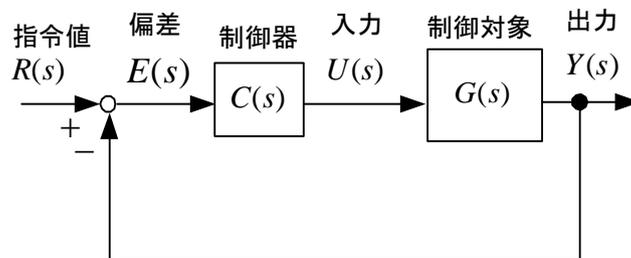


図 7-1 フィードバック制御系

図 7-1 の制御系では、**一巡伝達関数**は

$$G_o(s) = C(s)G(s) \quad (7-1)$$

である。このとき、**閉ループ伝達関数**は

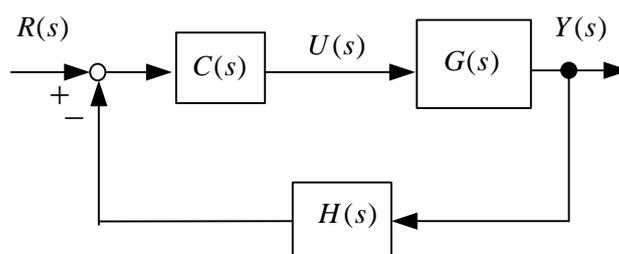
$$G_{cl}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (7-2)$$

と表せる。**特性方程式**は、

$$1 + G_o(s) = 0 \quad (7-3)$$

となる。

(例題 7-1) 図の制御系で、一巡伝達関数 $G_o(s)$ 、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ 、および特性方程式を求めよ。



(解) 一巡伝達関数 : $G_o(s) = C(s)G(s)H(s)$

$$\text{閉ループ伝達関数 : } G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + G_o(s)}$$

$$\text{特性方程式 : } 1 + G_o(s) = 0$$

(注意) 一巡伝達関数+1=0が特性方程式になることに変わりはない。

閉ループ伝達関数 $G_o(s)$ は一般に分数 (正しくは有理関数) だから通分して

$$1 + G_o(s) = S(s) \tag{7-4}$$

とおく。 $s = j\omega$ として $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ と変化させ、 $S(j\omega)$ のナイキスト線図を考えよう。

まず、最も簡単な場合で考えてみる。 A, K は定数とする。

$$G_o(s) = \frac{K}{s+A} \tag{7-5}$$

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega+A} = \frac{KA}{\omega^2+A^2} - \frac{jK\omega}{\omega^2+A^2} \equiv x + jy \quad \text{とおくと}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{KA}{\omega^2+A^2}\right)^2 + \left(\frac{K\omega}{\omega^2+A^2}\right)^2 = \frac{K^2}{\omega^2+A^2} = \frac{K}{A}x \quad (\omega \text{ 消去})$$

$$\therefore \left(x - \frac{K}{2A}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2A}\right)^2 \quad ((5-14) \text{ の様にしても導ける。})$$

よって $G_o(j\omega)$ は、 $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ のとき、円の軌跡となる。 $S(j\omega) = 1 + G_o(j\omega)$ だから、 $S(j\omega)$ の軌跡は、 $G_o(j\omega)$ の軌跡を右側に 1 移動させた円の軌跡となる。

$$S(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{s+A} = \frac{s+A+K}{s+A} \equiv \frac{s-z_1}{s-p_1} \tag{7-6}$$

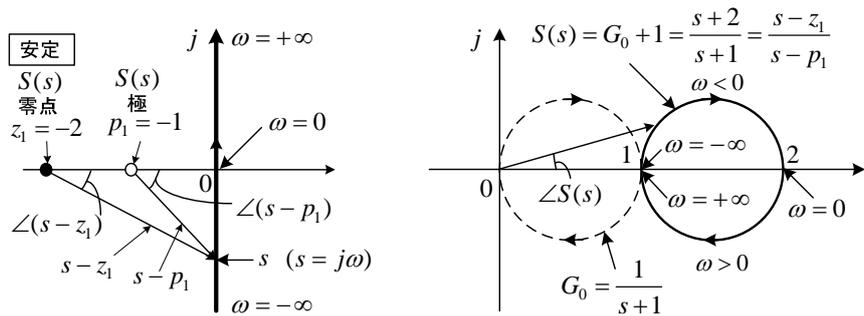
とおくと、 z_1 と p_1 には以下の重要な意味がある。

z_1 : $S(s)$ の零点 閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ の極 (特性方程式の根) で、これが右半平面にあると閉ループ系が不安定になる。つまり最終的にシステムが安定かどうかは z_1 で決る。

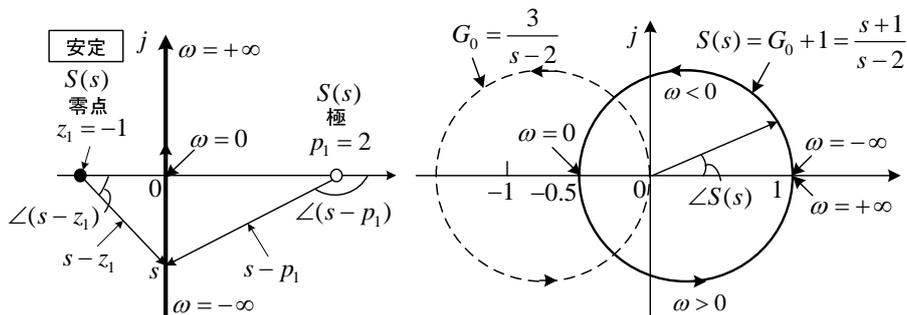
p_1 : $S(s)$ の極 一巡伝達関数 $G_o(s)$ の極 でもある。これが右半平面にあることは、制御対象 (または制御器) が不安定であることを意味する。しかし、閉ループにして安定になるなら問題ない。

z_1 と p_1 が右半平面か、左半平面かで 4 つの場合がある。具体的な軌跡の例を描くと図 7-2 のようになる。(7-6) より偏角については、次式が成り立つ。

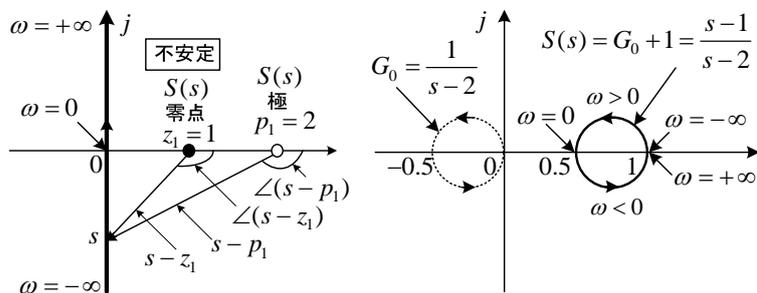
$$\angle S(s) = \angle(s-z_1) - \angle(s-p_1) \tag{7-7}$$



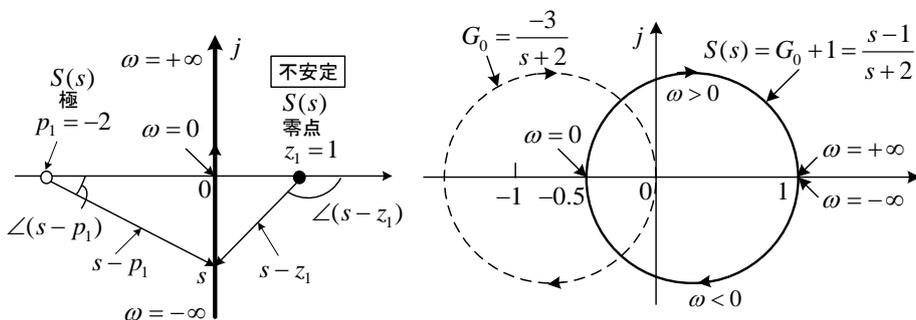
(a) $S(s)$ の極と零点が左半平面にある場合の例



(b) $S(s)$ の極が右半平面、零点が左半平面にある場合の例



(c) $S(s)$ の極と零点が右半平面にある場合の例



(d) $S(s)$ の極が左半平面、零点が右半平面にある場合の例

図 7-2 $s = j\omega$ ($\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$) に対する $S(s) = \frac{s - z_1}{s - p_1}$ と $G_0(s) = \frac{K}{s + A}$ の軌跡

(a)の場合、虚軸上で $s = j\omega$ を $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ の範囲で動かすと、偏角は以下のように単調に変化する。

$$\angle(s - z_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2, \quad \angle(s - p_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2$$

図より、 $\omega = -\infty \rightarrow 0$ の範囲では、 $\angle S(s) = \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) > 0$ が成り立つことが判る。よって、この範囲では、右側の $S(s)$ の円の上半分が軌跡となる。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ では、 $\angle S(s) = \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) < 0$ だから、右側の円の下半分が軌跡となる。

(b)の場合、虚軸上で $s = j\omega$ を $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ の範囲で動かすと、偏角は以下のように単調に変化する。

$$\angle(s - z_1) : -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2, \quad \angle(s - p_1) : -\pi/2 \rightarrow -\pi \rightarrow -3\pi/2$$

従って、 $S(s)$ は偏角が $0 \rightarrow \pi \rightarrow 2\pi$ の範囲で変化し、原点を反時計方向に1回転する。

(c),(d)の場合も同様に考えて、 $S(s)$ の軌跡と対応する ω 及び $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ に対する回転の向きが判る。図 7-2 から、

N_p : 右半平面に存在する $S(s)$ の極の数

N_z : 右半平面に存在する $S(s)$ の零点の数

とすると

(a)の場合 $N_p = 0, N_z = 0$ (安定) $S(s)$ が原点を回らない。

(b)の場合 $N_p = 1, N_z = 0$ (安定) $S(s)$ が反時計方向に原点を回る。

(c)の場合 $N_p = 1, N_z = 1$ (不安定) $S(s)$ が原点を回らない。

(d)の場合 $N_p = 0, N_z = 1$ (不安定) $S(s)$ が時計方向に原点を回る。

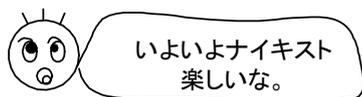
であり、以下のことが成立する。

$$S(s) \text{ が反時計方向に原点を回る回数} = N_p - N_z \quad (\text{負なら時計方向})$$

$S(s)$ の零点が特性方程式の根だから、 $N_z = 0$ が安定条件で、(a), (b)の場合に安定である。

$G_o(s) = S(s) - 1$ であるから、 $G_o(s)$ は $S(s)$ の軌跡を左に -1 移動すればよく、よって $S(s)$ が原点を回るということは、 $G_o(s)$ が $-1 + j0$ の周りを回ることに対応する。

ナイキスト(Nyquist)は、一巡伝達関数 $G_o(s)$ のナイキスト線図を描いてフィードバック制御系(閉ループ)の安定判別を行う方法を導き出した。この定理を以下に示す。



[定理 1] (開ループの状態)で安定の場合 $G_o(s)$ の極の中で実数部が正であるものの数が 0 であるとき、 $G_o(j\omega)$ のベクトル軌跡が、 $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ のとき、 $-1 + j0$ の点を囲むと不安定で、囲まないと安定である。あるいは、 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ に対する $G_o(j\omega)$ のベクトル軌跡が、 $-1 + j0$ の点を左に見るとき安定、右に見るとき不安定である (図 7-3)。

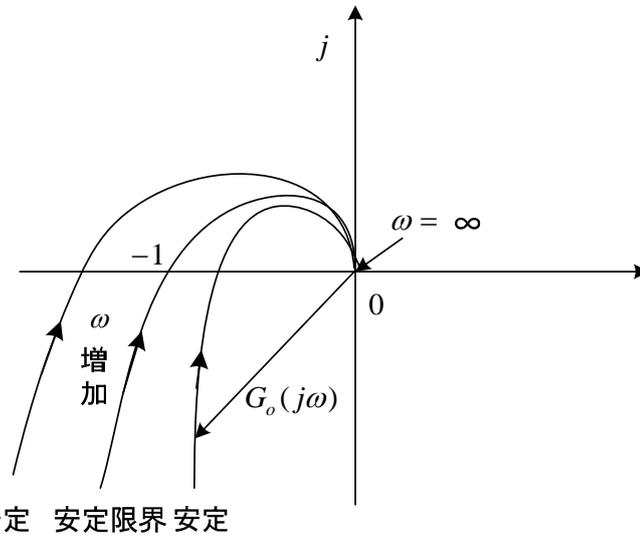


図 7-3 $G_o(j\omega)$ の軌跡とナイキストの安定判別 (定理 1 の場合)

[定理 2] (開ループの状態 で不安定の場合) $G_o(j\omega)$ のナイキスト線図が, $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ のとき, $-1 + j0$ を反時計方向に回る回数と $G_o(s)$ の極の中で実数部が正であるものの数が等しいとき安定である。

(注 1) 図 7-2(a) の場合が定理 1, (b) の場合が定理 2 に相当する。いずれの場合でも $G_o(s)$ が時計方向に $-1 + j0$ を回ると不安定である。

(注 2) 航空機やロケットはもともと不安定な制御対象だから定理 2 によらざるを得ない。しかし, 一般に, それ自身では安定な制御対象, 安定な制御器を扱う (フィードバックすると不安定になることがある) ことが多いので, 定理 1 を使うことが多い。

(注 3) 原点や虚軸上に極がある場合には, それを囲むように小さな半円 (どちらで考えても良いが普通は右半平面側にとる) 上を動くものとする。図 7-4(b),(c) を参照せよ。

ナイキストの定理の説明 (一般の場合)

開ループ伝達関数 $G_o(s)$ が次式のプロパー ($n \geq m$) な有理関数で表現できる場合を考える。

$$G_o(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

このとき,

$$1 + G_o(s) = S(s) \tag{7-8}$$

と置くと, $S(s)$ は次式で表せる。

$$S(s) = k \frac{(s-z'_1)(s-z'_2)\cdots(s-z'_{n-N_z})}{(s-p'_1)(s-p'_2)\cdots(s-p'_{n-N_p})} \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{N_z})}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{N_p})} \quad (7-9)$$

$G_o(s)$ と $S(s)$ の分母は同じである。 $S(s)$ の零点や極は以下のように定義する。

右半平面の零点 $z_1, z_2, \dots, z_{N_z} : N_z$ 個 (閉ループ G_{cl} の不安定極に一致)

右半平面の極 $p_1, p_2, \dots, p_{N_p} : N_p$ 個 (開ループ G_o の不安定極に一致)

左半平面の零点 $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-N_z} : n-N_z$ 個 (閉ループ G_{cl} の安定極に一致)

左半平面の極 $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-N_p} : n-N_p$ 個 (開ループ G_o の安定極に一致)

$s = j\omega$ として $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ と変化させたとき、 $S(j\omega)$ や $G_o(j\omega)$ はどのように動くかを考える。(7-9)より、

$$\begin{aligned} \angle S(s) &= \angle k + \angle(s-z'_1) + \angle(s-z'_2) + \cdots + \angle(s-z'_{n-N_z}) && \text{左半面零点} \\ &\quad -\angle(s-p'_1) - \angle(s-p'_2) - \cdots - \angle(s-p'_{n-N_p}) && \text{左半面極} \\ &\quad + \angle(s-z_1) + \angle(s-z_2) + \cdots + \angle(s-z_{N_z}) && \text{右半面零点} \\ &\quad - \angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \cdots - \angle(s-p_{N_p}) && \text{右半面極} \end{aligned} \quad (7-10)$$

である。ここで、虚軸上で $s = j\omega$ を $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ の範囲で動かすと、左半平面の零点や極に関する偏角は図 7-2(a)のように $-\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2$ と単調に変化する。一方、右半平面の零点や極に関する偏角は図 7-2(c)のように $-\pi/2 \rightarrow -\pi \rightarrow -3\pi/2$ と単調に変化する。

$\angle k$ は k の正負で 0 または π で偏角は変化しない。従って、 $N_p \geq N_z$ のとき、(7-10)より右半平面の零点と極のうち少ない方の N_z ずつは偏角が打ち消しあって原点を回ることには寄与せず、また左半平面の零点と極のうち少ない方の $n-N_p$ ずつは偏角が打ち消しあって原点を回ることには寄与しない。残り $N_p - N_z$ 個の右半平面の極と $n - N_z - (n - N_p) = N_p - N_z$ 個の左半平面の零点だけが原点を回ることには寄与し、図 7-2 (b)より考えて

$$S(s) \text{ が反時計方向に原点を回る回数} = N_p - N_z \quad (7-11)$$

となる。 $N_p \leq N_z$ の場合も同様に考えると、 $N_z - N_p$ だけ原点を時計方向に回る。これは(7-11)で、 $N_p - N_z$ が負の場合には $N_z - N_p$ だけ原点を時計方向に回ると考えればよいことを意味する。制御系全体が安定となる必要十分条件は、特性方程式の根 ($S(s)$ の零点) が全て左半平面にあることだから、

$$\text{安定条件: } N_z = 0 \quad (7-12)$$

である。よって、(7-11)より

$$S(s) \text{ が反時計方向に原点を回る回数} = N_p \quad (7-13)$$

が安定条件となる。すなわち、 $G_o(s)$ の不安定極の数 N_p と同じ数だけ、 $S(s)$ が原点の周りを反時計方向に回転すれば安定である。 N_p は正または 0 だから**時計方向に原点を回転したら不安定である**。 $G_o(s) = S(s) - 1$ であるから、 $G_o(s)$ は $S(s)$ の軌跡を左に -1 移動す

ればよく、よって $G_o(s)$ の不安定極の数 N_p と同じ数だけ、 $G_o(s)$ が $-1 + j0$ の周りを**反時計方向に回転すれば安定**である。これで定理2が説明できた。 $G_o(s)$ の不安定極の数 N_p が0のとき、(7-13)より、 $G_o(s)$ が $-1 + j0$ の点を時計方向にも反時計方向にも回転しないことが**安定条件**である。また、 $G_o(j\omega)$ の軌跡は実軸に対して対称*であり、通常 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ の軌跡を書くだけで安定判別できる。これで、定理1が説明できた。

* 共役複素数を $\overline{\alpha + j\beta} = \alpha - j\beta$ の記号で書く。このとき、 $\overline{s_1 s_2} = \overline{s_1} \overline{s_2}$ 、 $\overline{s_1 + s_2} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$ であるから、 $\overline{G_o(s)} = \overline{G_o(\bar{s})}$ が成立するので、 $j\omega$ と $-j\omega$ に対する軌跡は共役複素数になる。

ナイキストの定理に関して、多くの教科書で図7-4のような右半平面を囲むナイキスト経路を考え、この中に含まれる右半平面の極や零点だけが軌跡の回転に寄与するとして証明されている。ところが、 $|s| = \infty$ のとき、(7-9)の $S(s)$ は一定値 k となる（Ⅲの部分で軌跡は変化しない）。従って、図7-4(a)でⅢの部分で左半平面を通るように選んだとしても（時計方向に左半平面を一周する）、 $S(s)$ の軌跡に変化はない。図7-2の例では、 s の虚軸上の変化だけで軌跡が描けており、このとき左半平面の極や零点も回転に寄与した。よって、本書のように図7-4(a)Ⅲを考えないで証明した方が $S(s)$ の軌跡の回転と対応していて理解が容易と思われる。なお、原点や虚軸上に極がある場合は、図(b),(c)のように小さな半円上を動かすものとする。このような証明が文献(22)で行われていることを後で知った。

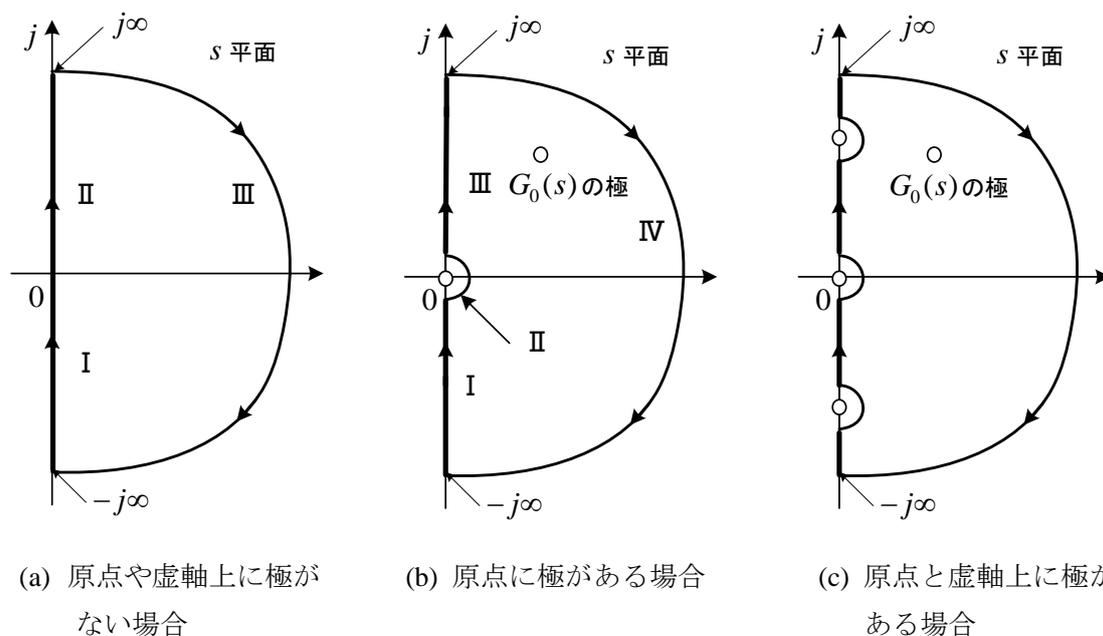


図7-4 s の動かし方（一般のナイキスト経路）

(例題 7-2) 一巡伝達関数 $G_o(s) = \frac{K}{1+sT_1}$ のフィードバック制御系について、ベクトル軌跡 (ナイキスト線図) を数式で求め、安定判別を行え。 $T_1 > 0$ とする。

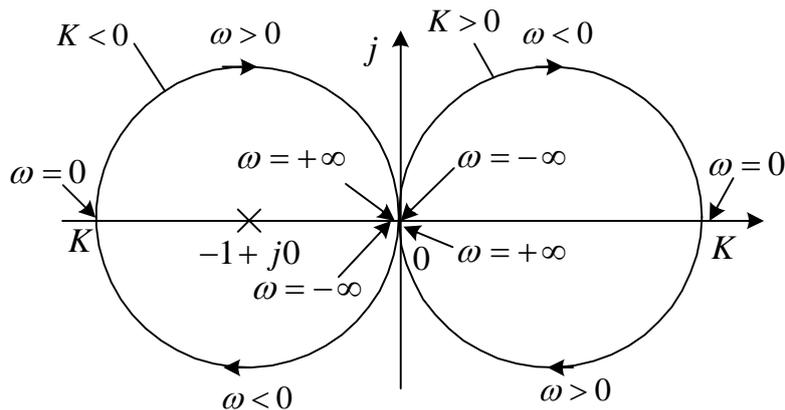
(解) $G_o(s)$ の極 $s = -1/T_1$ で左半平面にある (定理 1 が使える)。

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T_1} = \frac{K(1-j\omega T_1)}{1+(\omega T_1)^2}$$

$$G_o(j\omega) = x + jy \text{ とおくと, } x = \frac{K}{1+(\omega T_1)^2}, \quad y = \frac{-K\omega T_1}{1+(\omega T_1)^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{K^2}{1+(\omega T_1)^2} = Kx \quad \text{より, } (x - \frac{K}{2})^2 + y^2 = (\frac{K}{2})^2 \quad \text{①}$$

以上により、 $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ のとき、次のナイキスト線図が得られる。



$G_o(s)$ の極の実部は負であるから、安定であるためには $-1 + j0$ の点を囲まないようにしないといけない。図より、 $K > -1$ で安定である。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ の軌跡だけ考えてもよい。

(確認) 閉ループ伝達関数の特性方程式は、次式で与えられる。

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{1+sT_1} = 0 \quad \text{安定条件は, } s = -\frac{1+K}{T_1} < 0 \quad \therefore K > -1$$

(問題 7-1) 例題 7-2 で、 $T_1 < 0$ のときナイキスト線図を描いて安定判別せよ。

(解) 極の実部は正であるから、安定であるためには $-1 + j0$ の点を反時計方向に回らないといけない (定理 1 が使えず、定理 2 を使う必要がある)。 $T_1 < 0$ のとき、例題 7-2 の①式は成立する。例題 7-2 とは逆回転になり、 ω の目盛りの付け方が異なる。 y を見て考えよ。 $K < -1$ のとき安定となる。

(例題 7-3) 一巡伝達関数 $G_o(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ ($K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$) のフィード

バック制御系について、ナイキスト線図の略図を描き安定判別を行え。

(解) $G_o(j\omega)$ の極は $s = -1/T_1, -1/T_2$ で、2 根とも負である (定理 1 が使える)。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_o(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = K \quad \text{①}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^2 T_1 T_2} = 0e^{-j\pi} \quad \text{②}$$

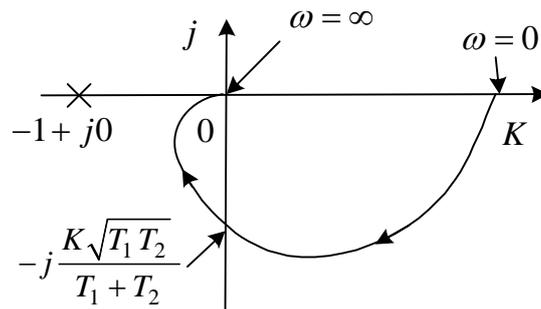
(②では $1+j\omega T_1 \approx j\omega T_1, 1+j\omega T_2 \approx j\omega T_2$ と近似, $\angle \frac{1}{j} = -\frac{\pi}{2}, \angle \frac{1}{j^2} = -\pi$)

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1-\omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1+T_2)} = \frac{(1-\omega^2 T_1 T_2)K - j\omega(T_1+T_2)K}{(1-\omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2(T_1+T_2)^2} \quad \text{③}$$

$\omega = 0 \rightarrow \infty$ のとき虚部は負であることが判る。虚軸との交点は、実部を 0 とおいて

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \quad \text{のときで, } G_o(j\omega) = -j \frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$$

$G_o(j\omega)$ のナイキスト線図を図に示す。 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ のとき、 $-1+j0$ の点を左に見るので安定と言える。②より ω が ∞ に近いときの軌跡上の各点は原点から見ると $-\pi$ の向きである。



(注意) 最終的に図に示すナイキスト線図の概形が書ければよい。①, ②, ③はこのための手掛かりを得ようとしている。①, ②は必ず必要と言うわけではない。試験では、どの象限を通るか考え、実軸とか虚軸と交わる点を求め、図は適当でよい (数値が決らないと正確に書けないので)。 $\omega = -\infty \rightarrow 0$ では実軸に対称なグラフとなり、全体として $-1+j0$ の点を囲まないのが安定と考えても良い。

(例題 7-4) 一巡伝達関数 $G_o(s) = \frac{K}{s(1+sT)}$ ($T > 0$) のフィードバック制御系について、

図 7-4 (b) I, II, III の順に s を動かしナイキスト線図の略図を描き安定判別を行え。

$$(解) G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = \frac{-\omega^2 TK - j\omega K}{\omega^4 T^2 + \omega^2} \quad \text{①}$$

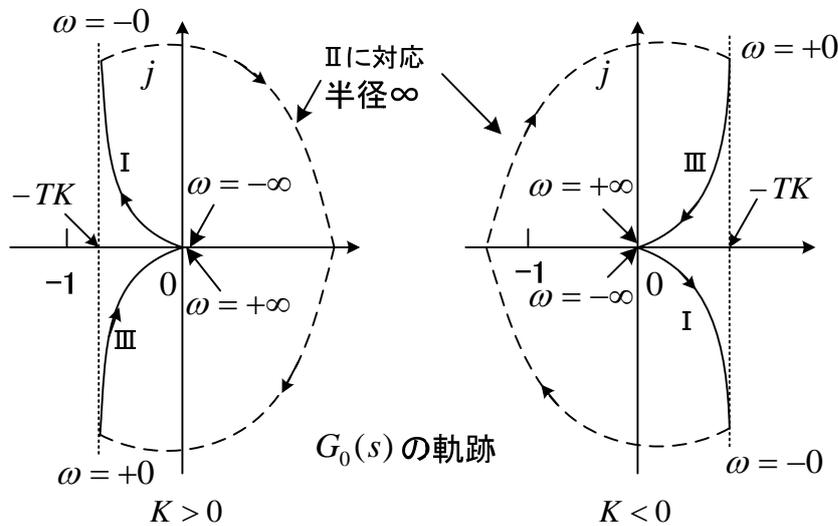
$$\omega \rightarrow 0 \text{ のとき, } G_o(j\omega) \approx -TK - j\frac{K}{\omega} \quad \text{②}$$

図 7-4 (b) の II では、 $s = re^{j\theta}$ (ただし、 $r > 0, \theta: -\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$) とおける。 r は十分小さいので、 $G_o(s)$ で sT の項は 1 に比べて小さいので無視し $G_o(s) = \frac{K}{r} e^{-j\theta}$ となる。 $\frac{|K|}{r} = \infty$

だから半径無限大の半円となる。 $K > 0$ であれば、 $G_o(s)$ の偏角は $-\theta$ だから、

$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ と動く。 $K < 0$ の場合は、原点に対して対称な軌跡となる。

ナイキスト線図は図のように描け、 $K > 0$ であれば安定で、 $K < 0$ であれば $-1 + j0$ の点を囲むので不安定である。



(注意 1) ②では、分母 $= \omega^2(\omega^2 T^2 + 1) \approx \omega^2$ と近似した。省略するときは 1 と比べよう。

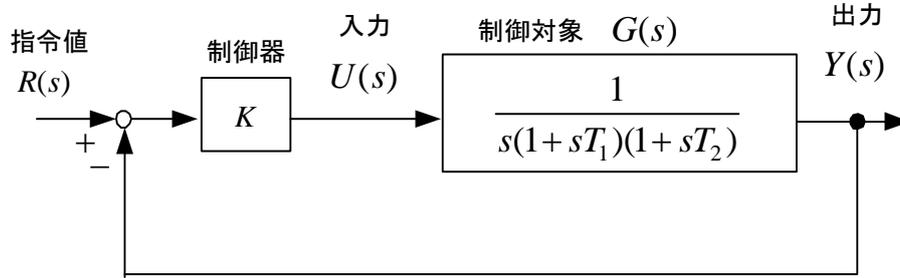
(注意 2) ①, ②は、 $s = j\omega$ としているから、II を動くときには成立しない。

(注意 3) III に対する軌跡だけ描いても安定判別できるので、普通は III の軌跡を書けばよい。

ここででは、原点の極の取り扱いを特別に問題にしてみた。

(注意 4) ラウスの方法を用いると、特性方程式 $Ts^2 + s + K = 0$ であり、安定条件は $K > 0$ となり、一致する。

(例題 7-5) 図の制御系の安定条件をナイキスト線図の略図を描くことにより求めよ。ただし、 $K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ とする。



(解) 一巡伝達関数 $G_o(s)$ は、 $G_o(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$ で与えられる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{j\omega} = \infty e^{-j\pi/2} \quad (j \text{ で割るので偏角は } -\pi/2)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_o(j\omega) \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^3 T_1 T_2} = 0 e^{-j3\pi/2} \quad (j \text{ で 3 回割るので偏角は } -3\pi/2)$$

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{K}{(j\omega)^3 T_1 T_2 + (j\omega)^2 (T_1 + T_2) + j\omega} = \frac{K}{j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2) - \omega^2 (T_1 + T_2)} \\ &= \frac{-\omega^2 (T_1 + T_2) K - j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2) K}{\omega^2 (1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^4 (T_1 + T_2)^2} \end{aligned}$$

$\omega \rightarrow 0$ のとき、分母 $\rightarrow \omega^2$ と考えられ、

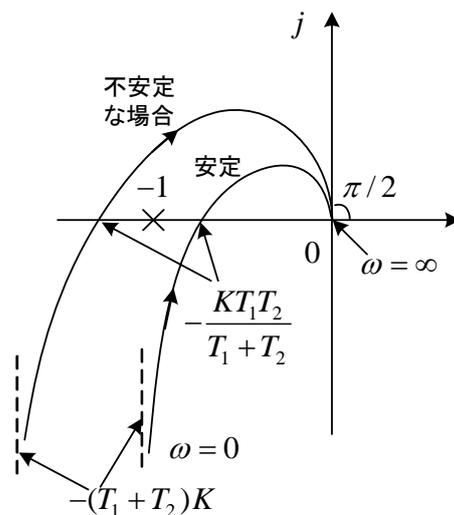
$$G_o(j\omega) \rightarrow -(T_1 + T_2) K - j \frac{K}{\omega} \text{ となる。}$$

ω が 0 に近い点の軌跡は原点から見ると $-\pi/2$ の向きにある。 ω が ∞ に近い点の軌跡は原点から見ると $-3\pi/2$ の向きにある。

実軸との交点は、虚部を 0 とおいて

$$\omega^2 = 1/(T_1 T_2) \text{ のときで、}$$

$$G_o(j\omega) = -\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$



安定条件は、 -1 の点を見ることがだから、 $-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1 \therefore KT_1 T_2 < T_1 + T_2$

7.2 むだ時間を含むシステムの安定条件

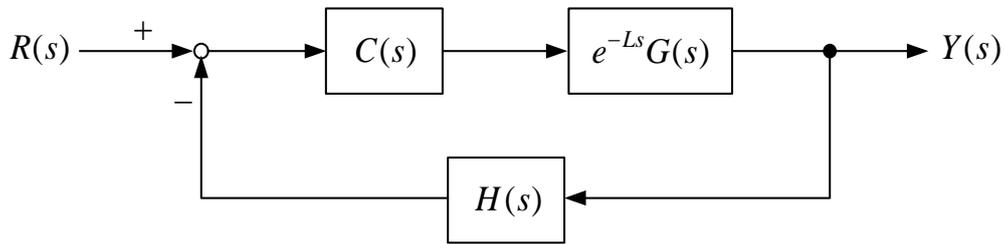


図 7-5 むだ時間を含む制御系

図 7-5 のむだ時間を含む制御系が安定であるための必要十分条件は、方程式

$$1 + e^{-Ls}C(s)G(s)H(s) = 0 \quad (7-14)$$

の根の実部がすべて負であることである⁽¹³⁾。

一巡伝達関数からむだ時間を除いた部分を

$$F_0(s) = C(s)G(s)H(s) \quad (7-15)$$

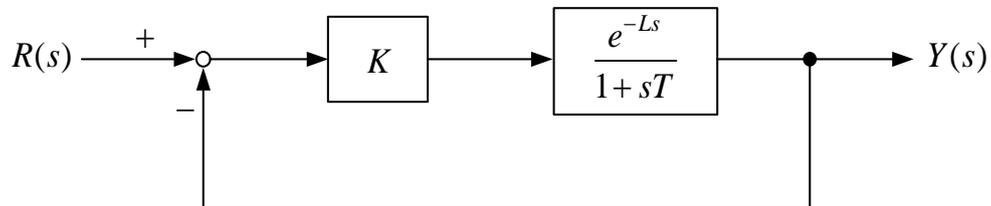
とおくと、一般にナイキストの安定判別法は以下の様に言える。

『 $F_0(s)$ の極がすべて虚軸を含む左半平面に存在する場合には、一巡伝達関数

$$F(s) = e^{-Ls}C(s)G(s)H(s) \quad (7-16)$$

のナイキスト軌跡が実軸上の点 $-1 + j0$ を回らなければ、図のフィードバック系は安定であり、点 $-1 + j0$ の上を通るかもしくは点 $-1 + j0$ の点を回れば不安定である。』

(例題 7-6) 図のフィードバック系の安定条件を求めよ。但し、 K, T, L は正とする。



(解) 一巡伝達関数 $G_0(s)$ は

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+sT} \quad \textcircled{1}$$

である。いま、 $G_1(s) = \frac{K}{1+sT}$ とおくと、 $G_1(j\omega)$ の軌跡は半円である。 $e^{-j\omega L}$ は大きさが1で、偏角が $-\omega L$ であるから、 $G_0(j\omega)$ のベクトル軌跡は、 $G_1(j\omega)$ の軌跡を時計方向に $\omega L[\text{rad}]$ 回転させたものとなる。

ナイキスト安定判別法より、図のA点の角周波数を ω_0 とすると安定条件は、

$$-1 < \text{Re}(G_0(j\omega_0)) \quad (2)$$

である。①より

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{Ke^{-j\omega L}}{1+j\omega T} \\ &= \frac{K(\cos \omega L - j \sin \omega L)(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} \\ &= \frac{K}{1+(\omega T)^2} \{ \cos \omega L - \omega T \sin \omega L - j(\sin \omega L + \omega T \cos \omega L) \} \end{aligned} \quad (3)$$

ω_0 は虚部が0となることから、次式で定まる。

$$\sin \omega_0 L + \omega_0 T \cos \omega_0 L = 0 \quad \therefore \tan \omega_0 L = -\omega_0 T \quad (4)$$

②, ③, ④より、安定条件は、

$$-1 < \frac{K(\cos \omega_0 L - \omega_0 T \sin \omega_0 L)}{1+(\omega_0 T)^2} \quad \therefore -1 < K \cos \omega_0 L \quad (5)$$

図のA点の実部が $K \cos \omega_0 L$ であるから、 $K \cos \omega_0 L < 0$ であり、④より

$$1 + \tan^2 \omega_0 L = \frac{1}{\cos^2 \omega_0 L} \quad \text{だから} \quad \frac{1}{\cos \omega_0 L} = -\sqrt{1+(\omega_0 T)^2}$$

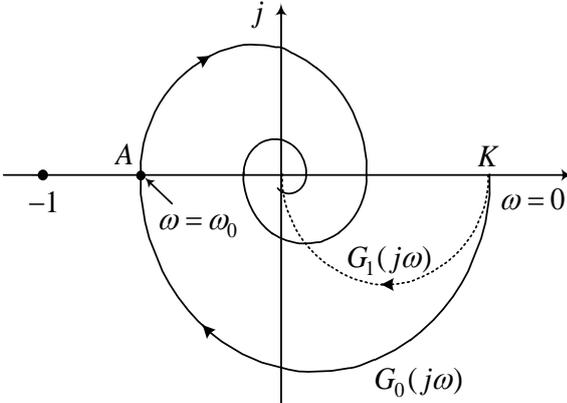
⑤に代入して、

$$K < \sqrt{1+(\omega_0 T)^2}$$

7.3 ボード線図による安定判別法

ナイキスト線図が角周波数の変化に対し伝達関数をそのまま複素平面上に描くのに対し、ボード線図は角周波数を横軸にとって大きさと位相を別々に描くことが違うだけである。よって、ボード線図を用いて安定判別を行う場合には、ナイキスト線図を頭に描きながら、考えることになる。

一巡伝達関数 $G_o(s)$ に不安定な極がない場合には、定理1より $\omega: 0 \rightarrow \infty$ の変化に対し、 $G_o(j\omega)$ が $-1 + j0$ の点を見れば閉ループ系は安定だから、次のことが言える。



『一巡伝達関数 $G_o(j\omega)$ の位相 $\angle G_o(j\omega)$ が -180 度のとき、 $|G_o(j\omega)| < 1$ すなわち、ゲインが $g = 20\log_{10}|G_o(j\omega)| < 0$ [dB] を満足すれば安定である。なお、位相 $\angle G_o(j\omega)$ が、 -180 度に達しない場合は、 $-1 + j0$ の点を右に見ることはないから安定である。』(条件： $G_o(s)$ に不安定極がない場合)

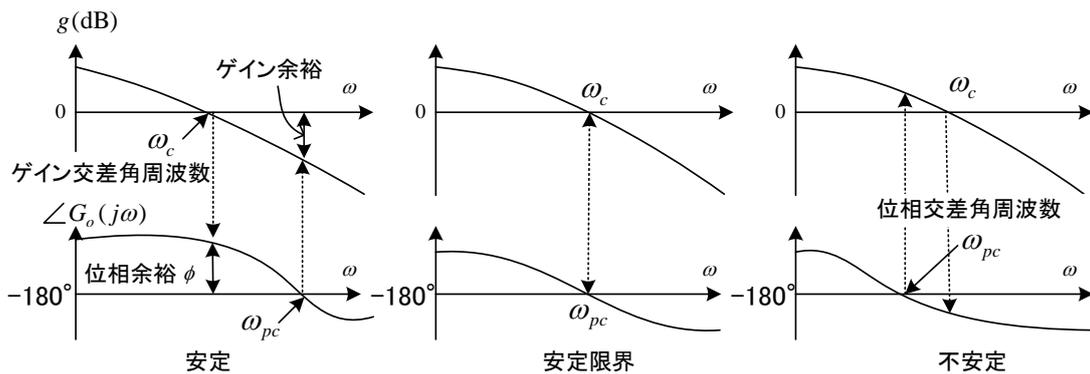
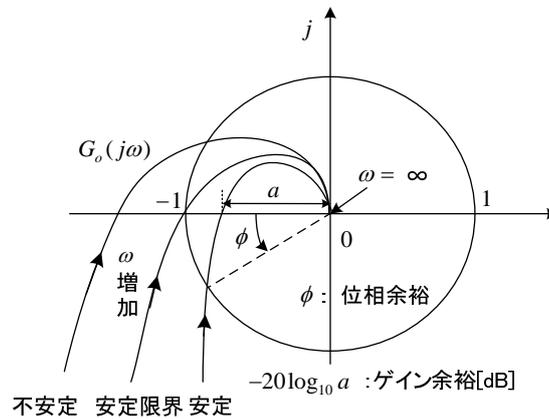


図 7-6 一巡伝達関数のボード線図による安定判別

図に示している **ゲイン余裕**(gain margin)[度], **位相余裕**(phase margin)[dB] は安定性の程度を評価する目安として良く用いられる。**ゲイン交差角周波数** が大きいと速く応答する。

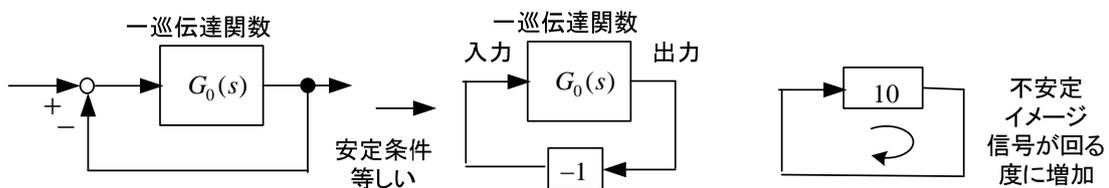
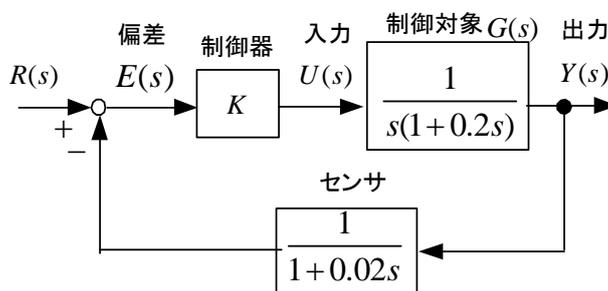


図 7-7 不安定になる条件

図 7-6 の安定条件を考えてみよう。図 7-6 の横軸の ω は、いろんな周波数の入力を加えた場合を表している。 $g < 0$ となる ω の入力信号は、出力の振幅が入力より小さく減衰するの

で不安定に関係ない。 $g > 0$ となる ω の入力信号は、信号が増幅されるので出力が大きくなって、もし正帰還であれば不安定になろう。図7-7の不安定のイメージに示すように、例えば信号を10倍してその出力がそのまま入力に入ると信号が回る度に増えて不安定になろう。 G_o の出力の位相が180度遅れる($\angle G_o(j\omega) = -180$ 度)とマイナスを付けることと同じでありさらにフィードバックの-1を掛けるので、結局正帰還になる。実際、図7-6では位相の遅れが180度となる ω_{pc} で $g > 0$ の場合不安定となっている。

(例題7-7) 図のブロック線図で示された制御系で、 $K = 1$ の場合の安定判別をボード線図を利用して行え。また、安定の限界となる K を図より求めよ。ただし、 $K > 0$ とする。



(解) 一巡伝達関数 $G_o(s)$ は次式で与えられる。

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.02s)}$$

ゲインと位相を求める。 $G_o(s)$ の極は0,-5,-50で、不安定極はない。

$$g = 20\log_{10} |G_o(j\omega)| = 20\log_{10} \frac{|K|}{|j\omega| |1+j0.2\omega| |1+j0.02\omega|}$$

$$= 20\log_{10} K + 20\log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| + 20\log_{10} \left| \frac{1}{1+j0.2\omega} \right| + 20\log_{10} \left| \frac{1}{1+j0.02\omega} \right|$$

$K = 1$ のとき、初項は0である。 K を大きくすると、ゲイン g が全周波数領域で一様に大きくなる。第3項、第4項の折れ点周波数はそれぞれ、 $\omega = 5, 50$ である。

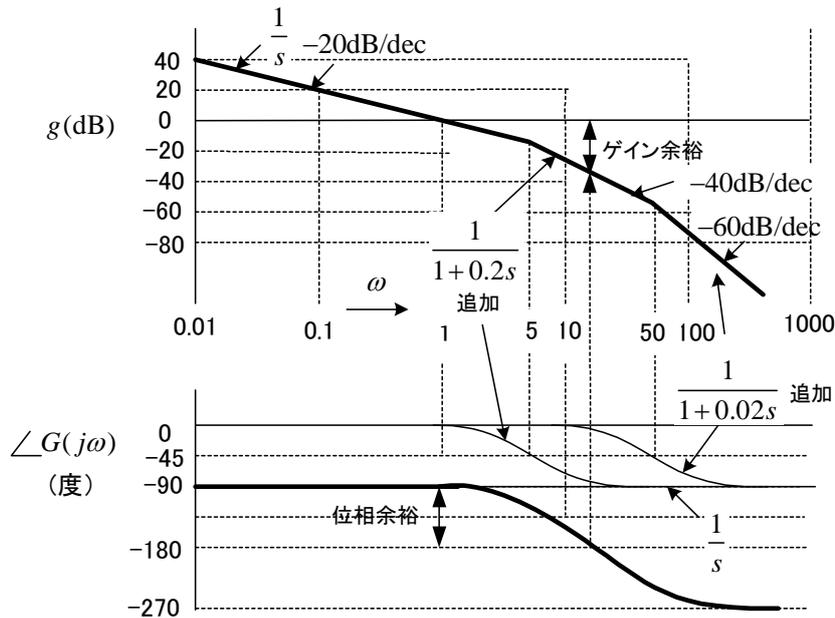
$$\angle G_o(j\omega) = \angle K + \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \frac{1}{1+j0.2\omega} + \angle \frac{1}{1+j0.02\omega}$$

図は、 $K = 1$ の場合を示す。 $\angle G_o(j\omega)$ が -180 度となる ω が判るので、図より0dBまでにあと約35dB程度のゲイン余裕があることが判る。よって、

$$20\log_{10} K = 35 \therefore K = 55$$

を超えると不安定となる。なお、 K を大きくしても位相は変化しない。位相余裕は90度程度ある。

(注) ラウスの方法で安定判別すると、安定条件は $0 < K < 55$ である。



(問題 7-2) 例題 7-7 で $K = 1$ のとき, ゲイン余裕を計算で求めよ。

(解) 負の実軸とナイキスト線図が交わる点の値は, 例題 7-5 を参照して

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} = -\frac{0.2 \times 0.02}{0.2+0.02} = -\frac{1}{55}$$

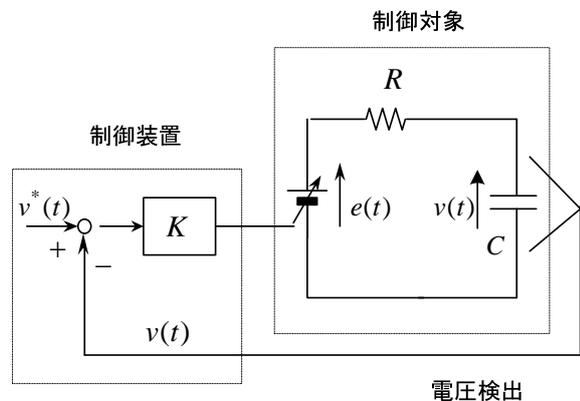
$$\text{ゲイン余裕は, } -20\log_{10}\left|-\frac{1}{55}\right| = 20\log_{10} 55 = 35 \text{ dB}$$

(問題 7-3) 図の制御系は, コンデンサ電圧 $v(t)$ を検出して, それを目標値 $v^*(t)$ に追従させる制御系である。このとき, 電源電圧 $e(t)$ を次式で制御する。

$$e(t) = K(v^*(t) - v(t))$$

パラメータは $RC = 0.2$, $K = 10$ とする。

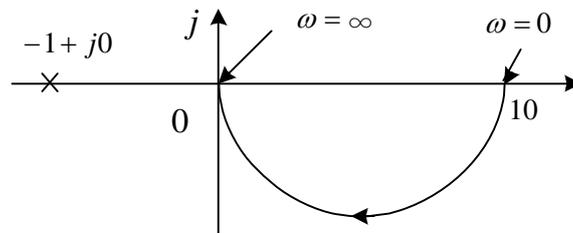
- (1) 制御系の全体のブロック線図を書け。(問題 4-1 参照)
- (2) ナイキスト線図を描いて安定かどうか判別せよ。(軌跡の式を求めること)
- (3) ボード線図(略図)を描いて安定かどうか判別せよ。



(略解) (2) 一巡伝達関数 $G_o(s)$ は、ブロック図より $G_o(s) = \frac{K}{1+RCs}$

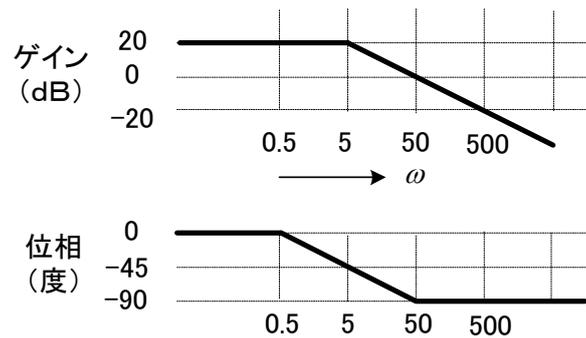
$$G_o(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega RC} = \frac{10}{1+j0.2\omega} \equiv x+jy \quad \text{とおく。これより、} (x-5)^2 + y^2 = 5^2$$

従って、ベクトル軌跡は円となる。 $\omega: 0 \rightarrow \infty$ に対し、 $y < 0$ だから半円である。



$G_o(s)$ の極は、 $-1/(RC)$ で左半平面にあり、ベクトル軌跡が $-1+j0$ の点を左に見るので閉ループ制御系は安定である。

(3) 一巡伝達関数のボード線図は図のようになる。ボード線図はナイキスト線図の大きさと位相を別々に書いただけだから、安定判別は(2)と同じ理由で安定である。



7.4 ニコルス線図

図 7-1 の制御系で、閉ループ伝達関数は、

$$G_{cl}(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \quad (7-17)$$

であり、このボード線図を描くことで、指令値に対する出力の周波数特性が得られる。特に、この極大値は**ピークゲイン**(peak gain) (M_p) と呼ばれ、応答の重要な目安となる。一方、一巡伝達関数 $C(s)G(s)$ のボード線図は、ゲイン余裕や位相余裕を知るうえで欠くことができない。そこで、この両方が一度に判るなら大変便利である。**ニコルス線図**(Nichols chart)は、このような背景のもとで考案された。

一巡伝達関数を

$$G_o(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega) = x + jy \quad (7-18)$$

とおく。一方、閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ を

$$G_{cl}(j\omega) = Me^{j\phi} \quad (7-19)$$

とすると、

$$M = M(\omega) = \frac{|x + jy|}{|1 + x + jy|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad (7-20)$$

である。よって、

$$M^2 \{(1+x)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$$

$$\therefore M^2 = (1-M^2)x^2 + (1-M^2)y^2 - 2M^2x$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2}{1-M^2}x = \frac{M^2}{1-M^2}$$

$$\left(x - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2 \quad (7-21)$$

となる。このことから、閉ループ伝達関数の振幅 M が一定の場合、 $x-y$ 平面上で一巡伝達関数の軌跡は円となることが判る (図 7-8)。この図上に、解析したい一巡伝達関数 $C(j\omega)G(j\omega)$ のナイキスト線図を描くと、計算しなくても閉ループ伝達関数の振幅 M が判り便利である。

次に、閉ループ伝達関数の位相 ϕ が一定の軌跡を一巡伝達関数の平面上で求める。

$$\phi = \arg(G_{cl}(j\omega)) = \arg\left(\frac{x + jy}{1 + x + jy}\right) = \arg\left(\frac{x + x^2 + y^2 + jy}{(1+x)^2 + y^2}\right) \quad (7-22)$$

従って、

$$\tan \phi = \frac{y}{x + x^2 + y^2} \quad (7-23)$$

$\tan \phi = N$ とおくと、

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0 \quad \therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \quad (7-24)$$

よって、この場合も等 ϕ の軌跡は円となる。図 7-9 にその軌跡を示す。

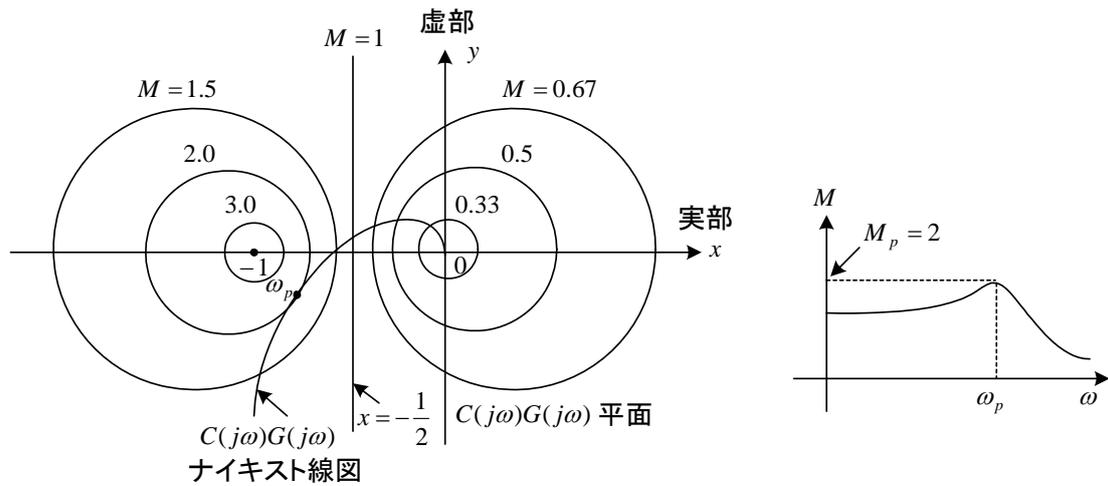


図 7-8 等 M の軌跡

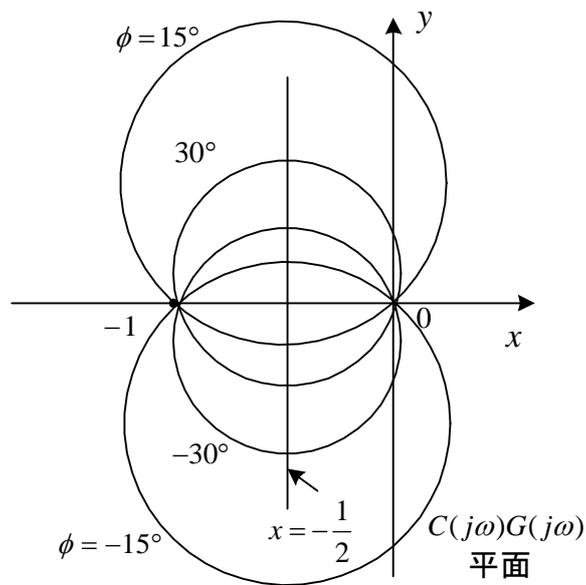
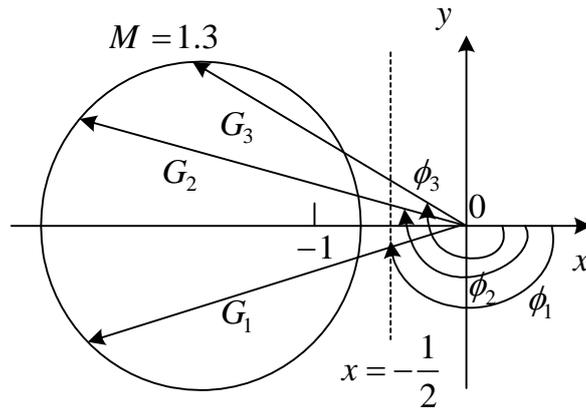
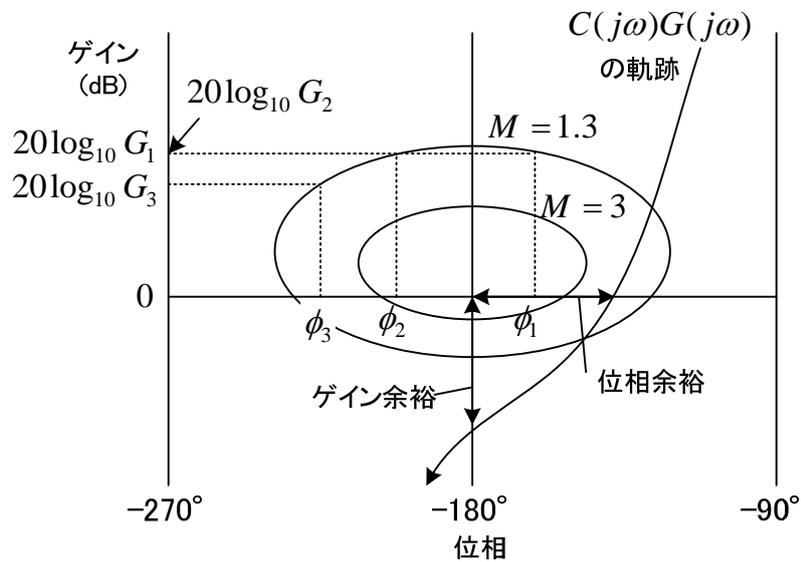


図 7-9 等 ϕ の軌跡

図 7-8 の等 M の軌跡と図 7-9 の等 ϕ の軌跡は $x-y$ 平面上に描いてあるため、一巡伝達関数 $C(j\omega)G(j\omega)$ を少し変更して制御器を設計するときには改めて $C(j\omega)G(j\omega)$ を描き直す必要があり不便である。そこで、これらをゲイン-位相平面上に描くことが提案された。これを、ニコルス線図という。図 7-10 にその考え方を示す。例えば、(a)の $M = 1.3$ の円の軌跡を (b) ではゲインと位相平面上に描き直している。ニコルス線図上の $10C(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡は、 $C(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡を 20dB 上方に移動するだけでよい。



(a) 移したい等 M の軌跡



(b) 移した等 M の軌跡 (ニコルス線図)

図 7-10 ニコルス線図の作り方

最近では、計算機が使えるのでニコルス線図を使わなくてもピークゲイン、ゲイン余裕、位相余裕が計算できる。しかし、このような発想には学ぶべき点が多いように思う。

M_p が大きいと振動的になり、小さいと応答が遅い。(2次系では、図 4-2, 図 5-10 を見よ。) サーボ系では、 $M_p = 1.1 \sim 1.5$, プロセス系では、 $M_p = 1.5 \sim 2.5$ が経験的に用いられているようである。