

## 第8章 根軌跡

特性方程式の根は、安定性や応答に関する重要な情報を含んでいる。この根が、制御ゲインの変化に対してどう変化するか判れば制御系設計の指針として役立つ。これを描く方法が**根軌跡法**(root locus method)である。

### 8.1 特性方程式の根と応答の関係

図 8-1 の制御系で、閉ループ伝達関数は、次式で与えられる。

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KC(s)G(s)}{1 + KC(s)G(s)} \quad (8-1)$$

ここで、制御器は根軌跡の説明のため、変えるゲイン  $K$  を強調して  $KC(s)$  としている。

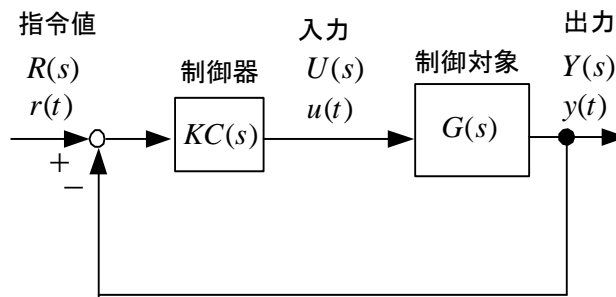


図 8-1 フィードバック制御系

特性方程式は、閉ループ伝達関数の分母を 0 とすることで、次式となる。

$$1 + KC(s)G(s) = 0 \quad (8-2)$$

閉ループ伝達関数が次式で与えられる 2 次系（減衰係数  $\zeta$ ，固有角周波数  $\omega_n$ ）を考える。

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\zeta : \text{Zeta}) \quad (8-3)$$

一般に、2 次系は

$$G_{cl}(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} \quad (8-4)$$

であり、 $\omega_n = \sqrt{b}$ ， $\zeta = a/(2\sqrt{b})$  と対応する。すると、(8-3) と (8-4) の差は定数倍の違い

だけである。両者は、ステップ応答が単純に定数倍されるだけであるから、(8-3)は安定性を調べるには十分に一般的と言える。

さて、(8-3)の特性方程式の根（閉ループ伝達関数の極）は $0 \leq \zeta < 1$ の場合

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (8-5)$$

である。根を図 8-2 に示す。

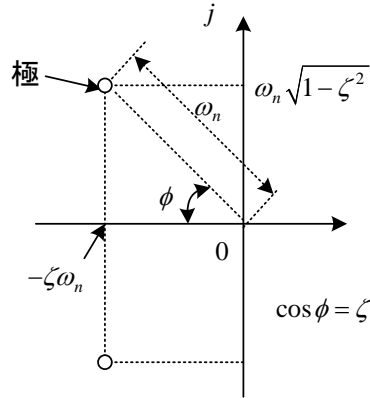


図 8-2 特性方程式の根（2次系）

(8-3)のステップ応答は、(4-7)より、

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (8-6)$$

であった。これを図 8-3 に示す。

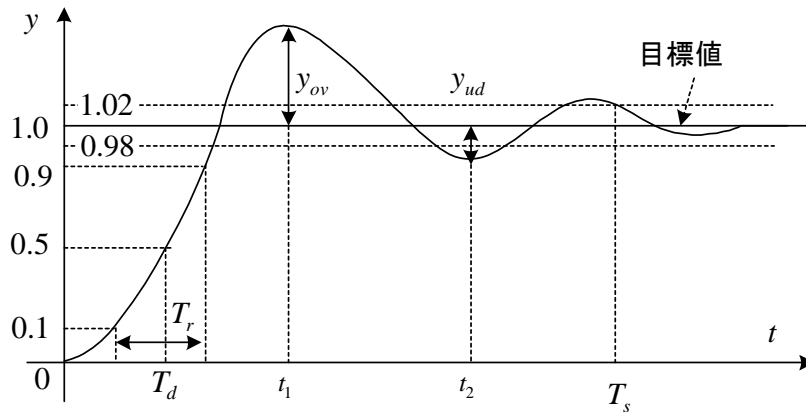


図 8-3 ステップ応答（2次系）

$0 < \zeta < 1$  の場合には、 $t = t_1$  で出力  $y(t)$  は最大値をもち、その後減衰振動する。最大値の目標値からの行き過ぎ量  $y_{ov}$  を**オーバシュート(overshoot)**という。また、 $y(t)$  が  $\pm 2\%$  に収まるまでの時間を**整定時間(settling time)**という。更に、図の  $T_r$  は**立ち上り時間(rise time)**と呼ばれる。

さて、 $y_{ov}, y_{ud}$  と  $t_1, t_2$  を求めてみよう。(8-6)を微分して、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \quad (8-7)$$

を得る。これが0となる条件から、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, t_2 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8-8)$$

よって、(8-6)、(8-8) より

$$y_{ov} = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \quad y_{ud} = \exp\left(-\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (8-9)$$

となる。 $y_{ud} / y_{ov}$  は、 $y_{ov}$  に一致する。 $y_{ov}$  を図 8-4 に示す。

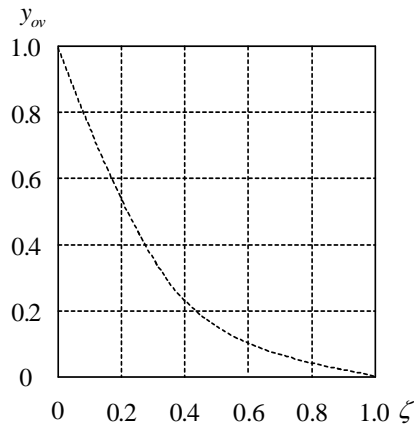


図 8-4 減衰率  $\zeta$  とオーバシュート  $y_{ov}$  の関係

オーバシュートは  $\zeta$  だけで決まり、図 8-2 の  $\phi$  が一定のところ根があれば  $\zeta$  は一定で、オーバシュートも変わらない。

一方、整定時間は根の実部  $\zeta\omega_n$  と関係が深く、この値が小さいほど整定時間は長い。図 8-5 に以下の閉ループ伝達関数について極とステップ応答の関係を示す。A を基準として考えると、B は同じ包絡線上にあり ((8-6) 式で  $e$  のべき乗を見よ)、C とはオーバシュートが等しく ( $\zeta$  が同じであるから)、D とは同じ振動数 (同じ虚部) である。

$$G_A(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}, G_B(s) = \frac{17}{s^2 + 2s + 17}$$

$$G_C(s) = \frac{40}{s^2 + 4s + 40}, G_D(s) = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$$

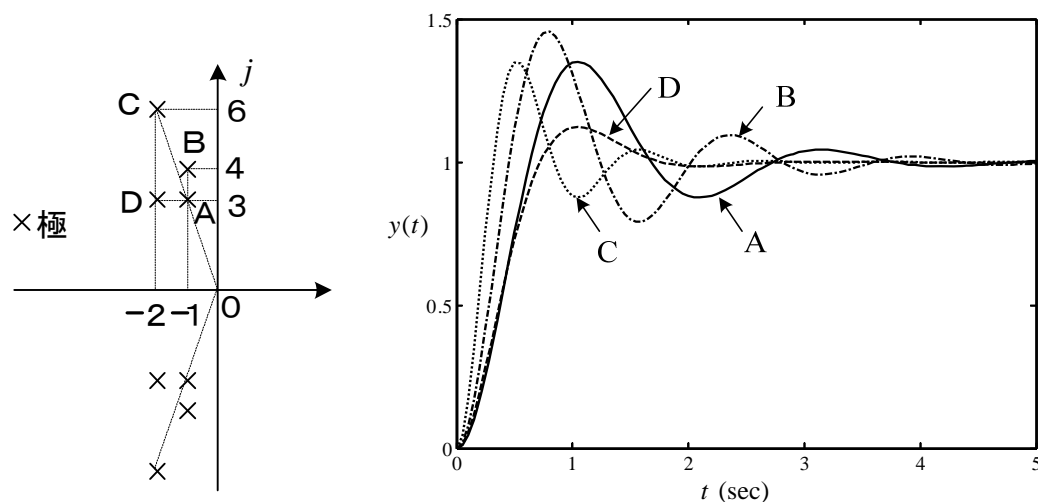


図 8-5 閉ループ伝達関数の極とステップ応答の関係

(問題 8-1)  $G_A, G_B, G_C, G_D$  の極, 減衰係数  $\zeta$ , 固有角周波数  $\omega_n$  を求めよ。

(解) 極は, 図 8-5 参照,  $G_A$  の  $\omega_n = 3.16$ ,  $\zeta = 0.316$ ,  $G_B$  の  $\omega_n = 4.12$ ,  $\zeta = 0.243$   
 $G_C$  の  $\omega_n = 6.32$ ,  $\zeta = 0.316$ ,  $G_D$  の  $\omega_n = 3.61$ ,  $\zeta = 0.556$

以上のことから, 望ましい極の配置は, 図 8-6 の斜線の領域となる。実軸上の根は振動に関係しない。一般の伝達関数には多くの極が存在するが, 虚軸に近い極が応答に支配的となり, 近似的に 2 次系として捉えられることが多い。

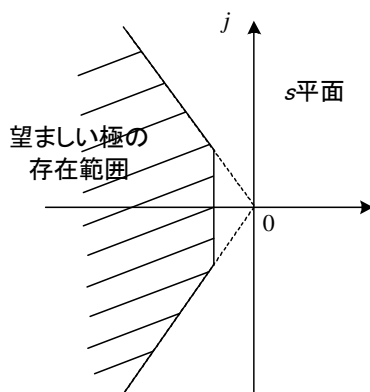


図 8-6 望ましい特性方程式の根 (極) の存在領域

## 8.2 根軌跡の描き方

制御器や制御対象のパラメータを変化させたとき、特性方程式の根がどのように変化するかを知ることは、安定性を検討するうえで最も基本的な要望である。特に、図 8-1 に示すように、制御器のゲイン  $K$  を変化させた場合について、特性方程式の根の動きを図的に描く方法が、1948 年 W.R.Evans により提案された。これは、**根軌跡法**(root locus method)と呼ばれる。

いま、一巡伝達関数  $KC(s)G(s)$  の零点を  $z_i$ 、極を  $p_i$  とし、分母の次数を  $n$  次、分子の次数を  $m$  次とすると、

$$KC(s)G(s) = K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^N (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-N})} \quad (8-10)$$

と書ける。 $K'$ には  $s$  は含まれず、 $K$  に比例する。

(8-2)の特性方程式より、根は

$$KC(s)G(s) = -1$$

を満たす。大きさと位相に分けて考えると、

i) ゲイン条件

$$\begin{aligned} |KC(s)G(s)| &= \left| K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^N (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-N})} \right| = 1 \\ \therefore |K'| &= \frac{|s|^N |s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_{n-N}|}{|s - z_1| |s - z_2| \cdots |s - z_m|} \end{aligned} \quad (8-11)$$

ii) 位相条件 ( $K' > 0$  の場合)

$$\begin{aligned} \angle(KCG) &= \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - N \angle s - \sum_{j=1}^{n-N} \angle(s - p_j) \\ &= (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (8-12)$$

となる。まず、(8-12)の位相条件を満たす軌跡を求め、その上にゲイン条件を満足する  $K$  を目盛ったものが根軌跡である (文献(3)参照)。

以下、根軌跡を書く手順を示す。

- (1) 根軌跡は  $s$  平面の実軸に対して対称である。
- (2) 根軌跡は  $KC(s)G(s)$  の極に始まり ( $K = 0$ )、零点に終わる ( $K = \infty$ )。対応する零点がなければ無限遠点に終わる。
- (3) 根軌跡の本数は、 $KC(s)G(s)$  の分子、分母の次数の中で、大きな方の次数に等しい。通常は、分母の次数が大きい。

- (4) 実軸上の根軌跡は  $K C(s)G(s)$  の極と零点を右側から 1 つおきに結んだ線分となる。  
 (5) 根軌跡の分岐の中で,  $K = \infty$  のとき  $n - m$  個は無遠点の零点に終わる。

そのとき, 漸近線 (asymptotes) の傾き角は

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad (8-13)$$

である。また, その漸近線の実軸との交点 (intersection) は次式で与えられる。

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n-N} p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (8-14)$$

$k$  重根のときは, その根を  $k$  倍する。

- (6) 根軌跡の虚軸との交点における  $K$  の値は, 安定限界であり, ラウスの方法かナイキスト線図またはボード線図より求まる。  
 (7) 実軸上の分岐点の  $s$  の値は次式より計算できる。

$$\frac{dC(s)G(s)}{ds} = 0 \quad (8-15)$$

(簡単な説明)

(2) については, 特性方程式の根は  $C(s)G(s) + \frac{1}{K} = 0$  より得られる。 $K \rightarrow 0$  のとき

$C(s)G(s)$  が  $\infty$  に近づく  $s$  が根なので, 根はその極と等しく,  $K \rightarrow \infty$  のとき  $C(s)G(s)$  が 0 になる  $s$  が根だから, その零点と一致する。

(4) については, まず実軸上に  $s$  をとり, それが (8-12) の位相条件を満足するか考える。

図 8-7 に示すように, 共役複素極を  $p_j, p_k$  とすると,  $s - p_j$  は  $p_j$  から  $s$  に向かうベクトル

である。その偏角は図に示した通りで, これと  $s - p_k$  の偏角の和は  $360^\circ$  となる。共役複素零点の場合も同様である。次に, 実軸上の極と零点を考える。 $s$  より右側にある極や零点と  $s$  を結ぶベクトルの偏角はいずれも  $180^\circ$  である。 $s$  より左側にある極や零点と  $s$  を結ぶベクトルの偏角はいずれも  $0^\circ$  である。位相条件は上記ベクトルの偏角の和や差が  $180^\circ$  になることを要求するものであるから  $360^\circ$  や  $0^\circ$  になるものは関係ない。この結果 (8-12) が成立するためには,  $s$  の右側の極や零点の数が奇数あることが必要十分である。加算減算は  $180^\circ$  なら関係ない。  $n$  重根は  $n$  個と考える。

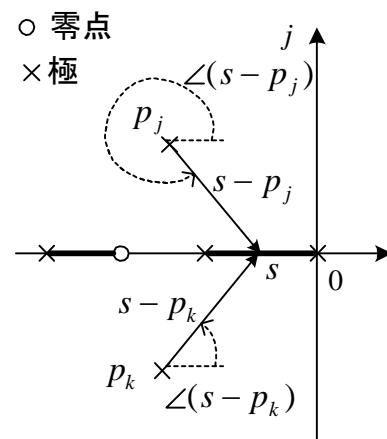


図 8-7 実軸上の根軌跡

(7) を導出する。特性方程式は,

$$1 + KC(s)G(s) = 0$$

である。いま,  $s$  の多項式 (分数でないよ)  $N(s), D(s)$  を用いて

$$C(s)G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

と表すと, 特性方程式は次式となる。

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad \text{①}$$

軌跡が実軸を離れる点では, 特性方程式は重根をもっているから, 上式を  $s$  で微分しても 0 である。

$$\frac{dD(s)}{ds} + K \frac{dN(s)}{ds} = 0 \quad \text{②}$$

①を②に代入して  $K$  を消去すると次式が得られる。

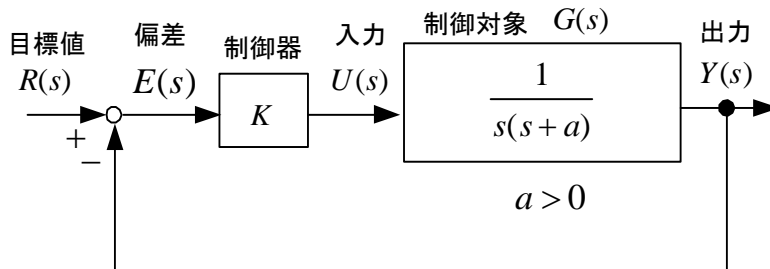
$$N(s) \frac{dD(s)}{ds} - D(s) \frac{dN(s)}{ds} = 0$$

これは,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{N(s)}{D(s)} \right) = \frac{dC(s)G(s)}{ds} = 0$$

と一致する。

(例題 8-1) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(解) 1) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

根軌跡は極  $0, -a (K=0)$  に始まり、零点  $\infty, \infty (K=\infty)$  に終わる。

2) 根軌跡の本数は 2 である。

3) 実軸上の根軌跡は、 $0$  と  $-a$  を結んだ線となる。

4) 漸近線の傾き角は、分母の次数  $n=2$ 、分子の次数  $m=0$  だから  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  となる。

$$\text{実軸との交点 } \sigma = \frac{0+(-a)}{2} = -\frac{a}{2}$$

5) 特性方程式は、

$$1 + G_o(s) = 0$$

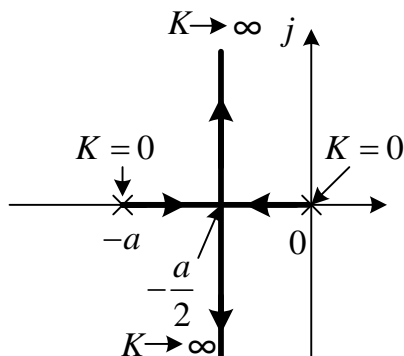
$$s^2 + as + K = 0$$

ラウスの安定判別法より、 $a > 0, K > 0$  安定限界は  $K = 0$

6) 実軸上の分岐

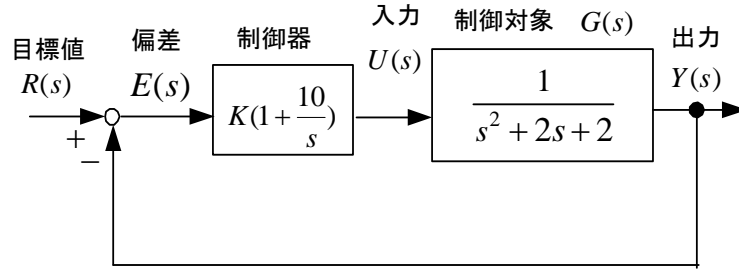
$$\frac{dG_o(s)}{ds} = 0 \quad \therefore 2s + a = 0 \quad s = -\frac{a}{2}$$

以上により、根軌跡は図のように描ける。





(例題 8-2) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(解) 1) 一巡伝達関数  $G_o(s)$  は、

$$G_o(s) = \frac{K(s+10)}{s(s^2+2s+2)}$$

根軌跡は  $0, -1 \pm j (K=0)$  の 3 個の極に始まり、3 個の零点  $-10, \infty, \infty (K=\infty)$  に終わる。

2) 根軌跡の本数は分母の次数となり 3 本である。

3) 実軸上の根軌跡は、 $0$  と  $-10$  を結んだ線となる。

4) 漸近線の傾き角は、分母の次数  $n=3$ 、分子の次数  $m=1$  だから  $\frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$\text{実軸との交点 } \sigma = \frac{-1+j-1-j-(-10)}{3-1} = 4$$

5) 特性方程式は、

$$1 + G_o(s) = 0 \quad \therefore s^3 + 2s^2 + (K+2)s + 10K = 0$$

ラウスの安定判別法を用いる。全ての係数は同符号でなければならないので、 $K > 0$

$s^3$	1	$K+2$
$s^2$	2	$10K$
$s^1$	$\frac{2(K+2)-10K}{2} > 0$	
$s^0$	$10K > 0$	

従って、 $0 < K < 1/2$

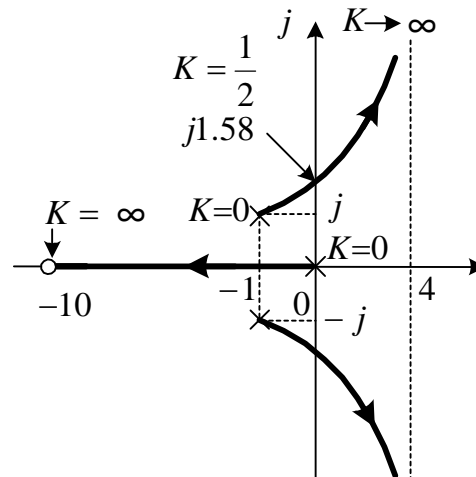
6)  $K = 1/2$  のとき、特性根に  $s = \pm j\omega$  がある。

$$s^3 + 2s^2 + (5/2)s + 5 = 0$$

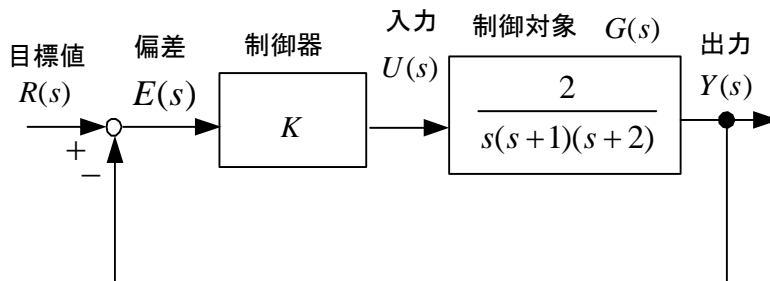
$$= (s^2 + \omega^2)(s + \alpha) = 0$$

$$\therefore \omega = \sqrt{5/2} = 1.58$$

以上により、根軌跡は図のように描ける。



(例題 8-3) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。



(略解) 一巡伝達関数  $G_o(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)}$

漸近線の傾き角は、 $n=3, m=0$  だから  $\frac{(2k+1)}{3-0} \pi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$  となる。

漸近線の実軸との交点  $\sigma = -1$

特性方程式は、 $1 + G_o(s) = 0 \quad \therefore s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$

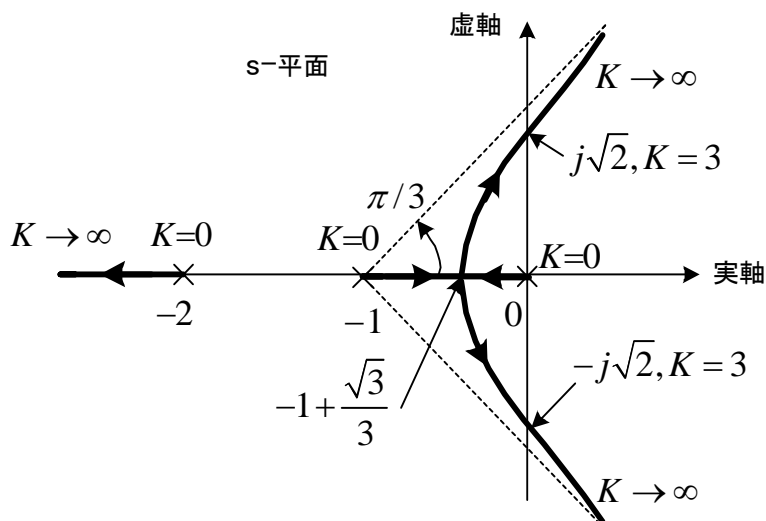
ラウスの安定判別法を用いる。安定条件  $0 < K < 3$

$K = 3$  のとき、特性根には  $s = \pm j\omega$  が含まれる。

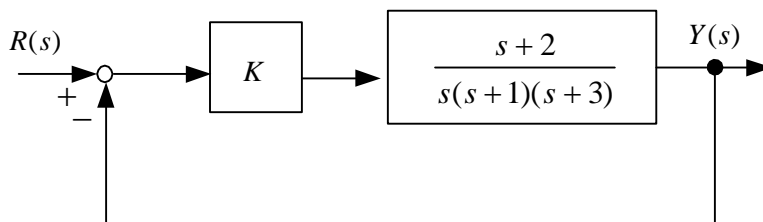
$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \quad \therefore (s^2 + \omega^2)(s + \alpha) = 0 \quad \omega^2 = 2, \alpha = 3$  よって、 $s = \pm j\sqrt{2}$

根軌跡が実軸を離れる点は、

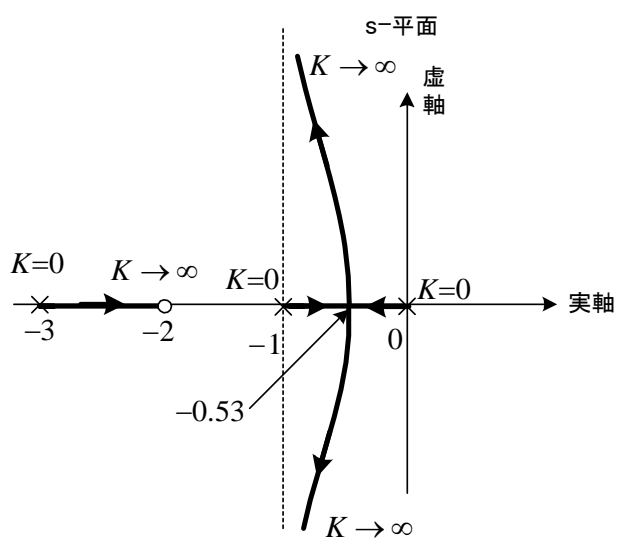
$$\frac{dG_o(s)}{ds} = \frac{-2K(3s^2 + 6s + 2)}{(s^3 + 3s^2 + 2s)^2} = 0 \quad s = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(問題 8-2) 図の制御系で、制御器のゲイン  $K$  を  $0 \rightarrow \infty$  に変化させたとき、特性方程式の根  $s$  の軌跡を描け。ただし、 $s^3 + 5s^2 + 8s + 3 = 0$  の実根は  $s = -0.53$  である。



(解)



例題 8-3 と問題 8-2 を比べると、零点の追加によって安定性が改善されていることが判る。