第11章　回路網方程式

回路素子の瞬時電圧や瞬時電流について成立する式は，第 6 章の表にまとめており，特に変成器については第 10 章で詳しく述べた。また，キルヒホッフの法則については直流回路に対し第 2 章で述べたが，交流回路においても全く同様に成立し，これまでも度々利用した。交流回路の定常解析ではフェーザを用いるが，この場合の回路素子の式も，第 6 章の表にまとめており，また変成器については第 10 章で述べた。キルヒホッフの法則に関しては，電圧または電流についての加減算であるから，瞬時値をフェーザに置き換えることで全く同様に式を立てることができ，これについてもこれまで度々利用してきた。ところで回路の問題を解く場合，未知数の数だけ独立な式があればよい。これまで，回路素子の式やキルヒホッフの法則を用いて，全ての素子の電圧や電流が含まれるようにして，未知数の数だけ独立な式を立てて問題を解いてきた。

本章では，独立な式は幾つ必要なのかを考え，未知数として閉路電流を用いる方法や節点電位を用いる方法を詳しく紹介する。このためまず，木と基本閉路を理解して欲しい。

○　枝，節点，木，基本閉路

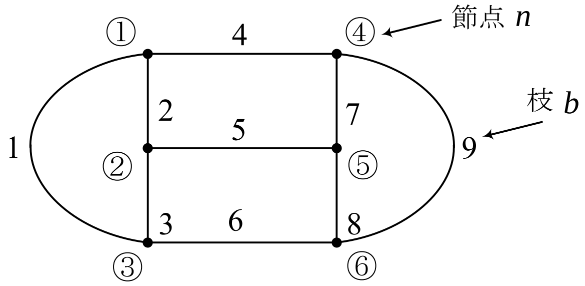


図11-1　グラフの例

図 11-1 で，1～9 を**枝**（branch），①～⑥を**節点**（node）という。節点と枝からなり，枝の形状は問題にしない図 1 は回路のグラフと呼ばれる。回路素子，電圧源，電流源は枝に存在する。節点は素子と素子あるいは素子と電源の接続点に対応する。素子を直列に接続したものは，まとめて1つの枝と考える。**閉路**とは，節点から出発して枝や他の節点を途中 1 回だけ通り，最初の節点にもどる道をいう。従って，節点が多いと閉路は非常に多く考えられる。節点の数 n，枝の数 b のグラフで，全ての節点を結ぶ最小数の枝の集まりを**木**（tree）という。最小数にするため木を作るときは閉路にならないように選ぶ。木を構成する枝の数は $n-1$ である。節点が 2 つのとき，1つの枝ができ，節点が1増えるごとに，それをつなぐ枝も1つずつ増える。よって，枝の数は節点より1少ないのである。なお木の形は1つには決らない。

図 11-1 のグラフで，木の例を図 11-2 に示す。節点数 $n=6$，枝数 $b=9$ である。木を構成する枝の数は，$n-1=5$ となっている。

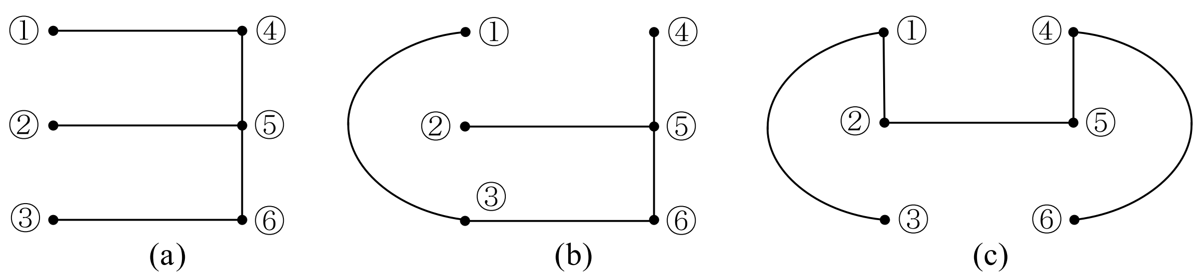


図 11-2　図 11-1 のグラフの木の例

木に含まれない枝の数lは，全部の枝の数から木の枝の数を引けばよいから，

$$l = b - (n-1) \tag{11-1}$$

となる。図2の各場合に書いていない枝は4本あり，$l = 9-5 = 4$と一致している。木に含まれない枝を**1つだけ**含み，他は**木**の枝からなる閉路を**基本閉路**（primitive loop）という。よって，基本閉路の数は木に含まれない枝の数と等しくlである。木の選び方によって基本閉路は違ってくる。

一般に，ある回路網が与えられたとき，未知数のとり方によって必要な式の数が違ってくる。回路の問題を解く基本的方法として枝電流法，閉路電流法，節点電位法がある。これらの方法は何を未知数にするかが違う。

○ 枝電流法

全ての枝の枝電流を未知数とする。未知数は全部でbある。キルヒホッフの第1法則（以下**電流則**と呼ぶ）は各節点について成立するが，独立な式は節点数nより1少ない$n-1$である。1つの節点で成立する式を除いても，他の節点の式の中に全ての枝電流が含まれており独立な式が1少ない。キルヒホッフの第2法則（以下**電圧則**と呼ぶ）により得られる独立な式の数は，基本閉路と同じ$l = b-(n-1)$である。なぜなら，基本閉路で木以外の枝電圧は1度だけしか入らないので独立な式となる。従って，電流則と電圧則を合わせて全部で$(n-1)+l = b$だけの式が得られ，未知数の数に等しいので解が求まる。枝電流法は式が多くなる欠点があるが，理解はしやすい。なお，回路の接続が切り替わる過渡現象の解析では枝電流法でなくてはならない。

○ 閉路電流法

基本閉路に流れるl個の閉路電流を用いると，電流則は自動的に満たされ，電圧則を用いた閉路の数$l = b-n+1$だけの式で解が得られる。b個の枝電流のうち，独立に選びうる枝電流の数は$l = b-(n-1)$である。なぜなら，節点の電流則について，節点数より1少ない$n-1$の式が立てられ，その分未知数が少なくできるからである。このように独立な枝電流はl個選べ，これが閉路電流に対応していると考えてよい。すなわち，木を選んだとき，木に含まれない枝（l本ある）に流れる枝電流が閉路電流と実質的に等しい。ただし，閉路電流は基本閉路を選んで，そこを巡回する電流として回路図に書き込む。まず，**木**を選んで**基本閉路**を決めることが必要である。閉路電流法は枝電流法に比べて未知数が少なく良く用いられる。

○ 節点電位法

節点のうちどれか1つを電位0（電位の基準，接地）とし，他の節点の電位（$n-1$個あり，基準節点に対する電圧のこと）を未知数とする。このとき，電圧則は自動的に満たされ，電流則だけで式を立てることになる。電流則については，$n-1$の独立な式が得られるので，節点電位が計算できる。節点電位法とは呼ばないが，類似の方法として枝電圧を未知数として問題を解く場合には，独立な$n-1$個の木の枝電圧を未知数にすればよい。並列枝が多く電流源がつながっている回路に適する。

・上記の3方法以外でも，未知数の数だけ独立な式があれば解は得られる。すなわち，未知数に電圧と電流が混在してよい。要はできるだけ簡単に解けるように未知数に何を選ぶかだ。

図 11-3 の回路について具体的に考えていこう。
電圧源は,

$$e_1(t)=\sqrt{2}E_{e1}\sin\left(\omega t+\alpha\right)$$

$$e_2(t)=\sqrt{2}E_{e2}\sin\left(\omega t+\beta\right)$$

とする。 α,β ：初期位相

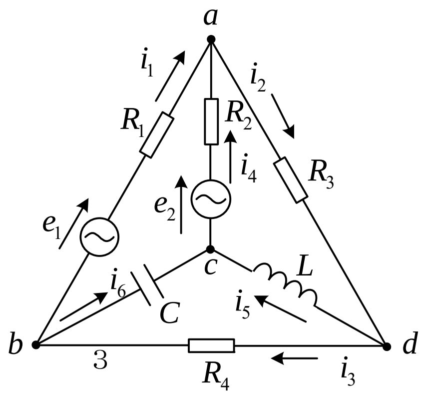


図 11-3

まず, **枝電流法**を考える。図の様に, 枝電流 $i_1\sim i_6$ を定義する。

電流則については,

節点 a ： $i_1+i_4=i_2$ ①

節点 b ： $i_3=i_1+i_6$ ②

節点 c ： $i_5+i_6=i_4$ ③

節点 d ： $i_2=i_3+i_5$ ④

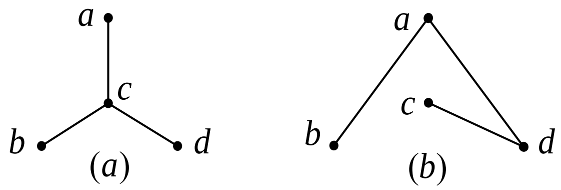


図 11-4　木の例

①～④の中で独立な式は 3 つで，残りの 1 つは他の式から導ける。木は，図 11-4 に示すように幾つか考えられる。図 11-4 の木に対し，木以外の枝 1 つと他は全て木からなる基本閉路はそれぞれ図 11-5 の様に決まる。

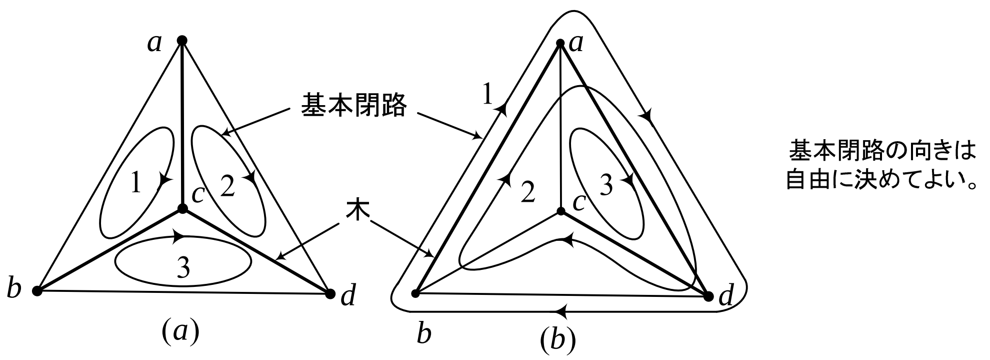


図 11-5　基本閉路

図 11-5 (a)で電圧則は，次のようになる。

閉路 1 ： $e_1=R_1i_1-R_2i_4+e_2-\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_6dt$ ⑤

閉路 2 ： $e_2=R_2i_4+R_3i_2+L\dfrac{di_5}{dt}$ ⑥

閉路 3 ： $0=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_6dt-L\dfrac{di_5}{dt}+R_4i_3$ ⑦

電流の矢印と逆方向に素子の電圧の矢印を考え（すると素子の式にマイナスはない），電圧の矢印をベクトルのように考えて符号をつけるとよい。例えば，⑤で $-R_2i_4$ のマイナスは i_4 が閉路 1 と逆方向に定義されているから。閉路の方向は左辺の電源電圧の方向にしている（私の好み）。

電源電圧が与えられると，未知数$i_1 \sim i_6$の6個に対し，独立な式が①〜④の中から3つ及び⑤〜⑦の合計6つあるので電流が求められる。

交流回路の定常解析を行う場合にはフェーザ（太文字で表示）を用いれば良く，以下の式が得られる。

$$\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_4 = \boldsymbol{I}_2 \qquad ①'$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_6 \qquad ②'$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{I}_5 \qquad ④'$$

$$E_{e1}e^{j\alpha} = R_1\boldsymbol{I}_1 - R_2\boldsymbol{I}_4 + E_{e2}e^{j\beta} - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_6 \qquad ⑤'$$

$$E_{e2}e^{j\beta} = R_2\boldsymbol{I}_4 + R_3\boldsymbol{I}_2 + j\omega L\boldsymbol{I}_5 \qquad ⑥'$$

$$0 = \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_6 - j\omega L\boldsymbol{I}_5 + R_4\boldsymbol{I}_3 \qquad ⑦'$$

次に，**閉路電流法**について考える。

図 11-5(a)の基本閉路を考え，閉路電流i_1, i_2, i_3を未知数とする。

電圧則だけを考えれば良いので，各閉路について以下の式が得られる。

<u>考え方</u>：(1) できるだけ電源電圧の向きに閉路電流の向きをとる。(2) 左辺は閉路の向きの電源電圧である。閉路と逆向きならマイナスをつける。(3) 右辺は素子の式，考えている閉路の閉路電流の項は全てプラス，他の項は電流の向きで決る。

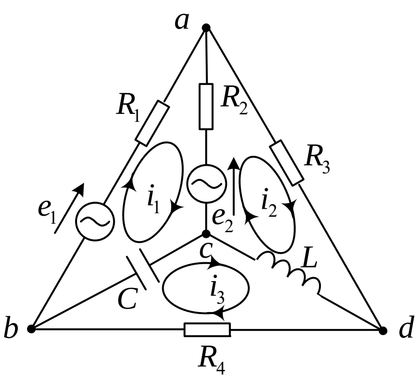


図 11-6　閉路電流

$$閉路1：e_1 - e_2 = (R_1 + R_2)i_1 + \frac{1}{C}\int i_1 dt - R_2 i_2 - \frac{1}{C}\int i_3 dt \qquad ⑧$$

$$閉路2：e_2 = (R_2 + R_3)i_2 + L\frac{di_2}{dt} - R_2 i_1 - L\frac{di_3}{dt} \qquad ⑨$$

$$閉路3：0 = R_4 i_3 + L\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}\int i_3 dt - \frac{1}{C}\int i_1 dt - L\frac{di_2}{dt} \qquad ⑩$$

フェーザ表示については，

$$E_{e1}e^{j\alpha} - E_{e2}e^{j\beta} = \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)\boldsymbol{I}_1 - R_2\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_3 \qquad ⑧'$$

$$E_{e2}e^{j\beta} = (R_2 + R_3 + j\omega L)\boldsymbol{I}_2 - R_2\boldsymbol{I}_1 - j\omega L\boldsymbol{I}_3 \qquad ⑨'$$

$$0 = \left(R_4 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_1 - j\omega L\boldsymbol{I}_3 \qquad ⑩'$$

となる。⑧，⑨，⑩や⑧’，⑨’，⑩’は**閉路方程式**(loop equation)と呼ばれる。

フェーザ表示の場合を例にとり，枝電流法を比べてみよう。図 11-3 と図 11-6 を比べると，両者

の電流 I_1, I_2, I_3 は，たまたま同じ記号で等しい。すなわち，木以外の枝電流が閉路電流と等しい。従って，閉路電流法の式は，①’，②’，④’より I_4, I_5, I_6 を I_1, I_2, I_3 で表し，⑤’，⑥’，⑦’に代入した式と同じになる（各自試みよ)。

この様に，閉路電流法は未知数が少なくて便利である。⑧’，⑨’，⑩’を回路を見ただけで書けるようになって欲しい。

節点電位法については，簡単のためフェーザ表示の場合を例に取り説明する。

J_1, J_2 は電流源のフェーザ，Y_1, Y_2, Y_3 はアドミタンスである。3 つの節点 $1, 2, 3$ の電位をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

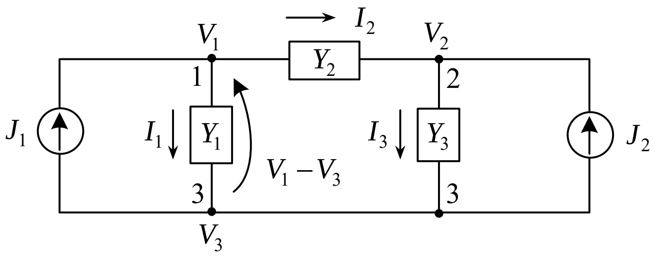


図 11-7

このとき，電流 I_1, I_2, I_3 は次式で与えられる。

$$I_1 = Y_1\left(V_1 - V_3\right) \qquad ①$$

$$I_2 = Y_2\left(V_1 - V_2\right) \qquad ②$$

$$I_3 = Y_3\left(V_2 - V_3\right) \qquad ③$$

節点 $1, 2, 3$ でそれぞれ電流則を適用すると，

節点 1 ： $J_1 = I_1 + I_2$ ④

節点 2 ： $J_2 = -I_2 + I_3$ ⑤

節点 3 ： $I_1 + I_3 = J_1 + J_2$ ⑥

⑥は，④，⑤より得られるので，独立な式として④，⑤を考える。④，⑤に①，②，③を代入して

$$J_1 = Y_1\left(V_1 - V_3\right) + Y_2\left(V_1 - V_2\right) \qquad ⑦$$

$$J_2 = -Y_2\left(V_1 - V_2\right) + Y_3\left(V_2 - V_3\right) \qquad ⑧$$

ここで，電位の基準として節点 3 を考えると，$V_3 = 0$ とできる。⑦，⑧に代入して

$$J_1 = \left(Y_1 + Y_2\right)V_1 - Y_2 V_2 \qquad ⑨$$

$$J_2 = \left(Y_2 + Y_3\right)V_2 - Y_2 V_1 \qquad ⑩$$

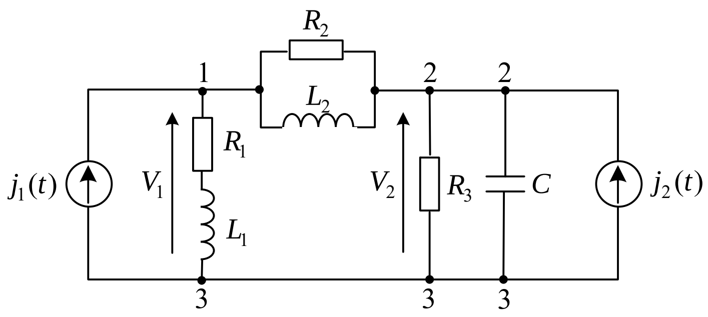
⑨，⑩は以下の様に記憶すると，回路より直接書き下せる。⑨を例に取り説明する。左辺は，節点 1 に流入する電流源の和である。右辺第 1 項は節点 1 につながるアドミタンスの和に節点 1 の電位を掛けたもので（符号は正)，第 2 項は節点 1 と隣りあっている節点 2 との間のアドミタンスに接点 2 の電位を掛けたもの（符号は負）である。⑨，⑩は**節点方程式**(nodal equation)と呼ばれる。

例題１　電流源が，

$$j_1(t)=\sqrt{2}J_{e1}\sin\left(\omega t+\alpha\right)$$

$$j_2(t)=\sqrt{2}J_{e2}\sin\left(\omega t+\beta\right)$$

のとき，節点電位法を用いて，
節点方程式を求めよ。
フェーザ表示を用いよ。



（解）アドミタンスが必要なので， R_1 , L_1 の直列回路のアドミタンス Y_1 をまず求める。

$$Y_1=\frac{1}{R_1+j\omega L_1}$$

並列回路のアドミタンスは各アドミタンスの和だから容易に求まる。
節点1の電位を V_1 ，節点２の電位を V_2 とし，節点３の電位を０とする。
節点1について，

$$J_{e1}e^{j\alpha}=\left(\frac{1}{R_1+j\omega L_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)V_1-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)V_2 \qquad ①$$

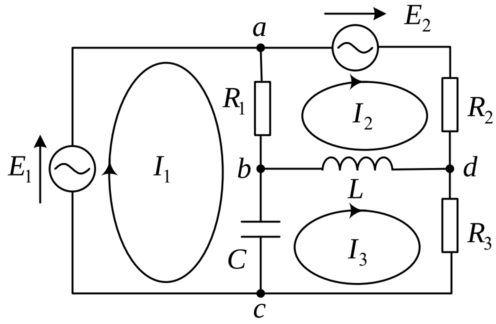
節点２について

$$J_{e2}e^{j\beta}=\left(\frac{1}{R_3}+j\omega C+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)V_2-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)V_1 \qquad ②$$

（検討）　難しそうな事をしているようだが，節点３を基準にした電位とは図に示す電圧 V_1 ， V_2 に他ならない。節点1で，**電流則**を適用すれば， R_2 , L_2 の電圧が V_1-V_2 だから，電流を求めることで①を導出できる。節点 2 で，②も同様に求められる。節点電位法ではそれを機械的に書き下せるのであるが，それを知らなくても簡単に出せる。重要な点は，この様に並列枝が多く，電流源が含まれるような回路（例えばトランジスタ回路）では，電圧を未知数として回路を解く方法が簡単であるということである。なお，電圧源と電流源が同時に存在する場合には，次章で述べる重ね合わせの理を用いる方法が便利である。もちろん，多少複雑になっても電圧，電流を未知数としてキルヒホッフの法則を用いれば解けないことはない。

問題１　図の回路で閉路電流法により閉路方程式を求めよ。フェーザ表示を用いよ。

（解）木を図のように選ぶと，基本閉路が得られ，閉路電流が図の様に定義できる。



閉路1：

$$E_1 = \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)I_1 - R_1 I_2 - \frac{1}{j\omega C}I_3$$

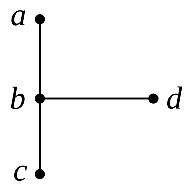
閉路２：

$$E_2 = \left(R_1 + R_2 + j\omega L\right)I_2 - R_1 I_1 - j\omega L I_3$$

閉路3：

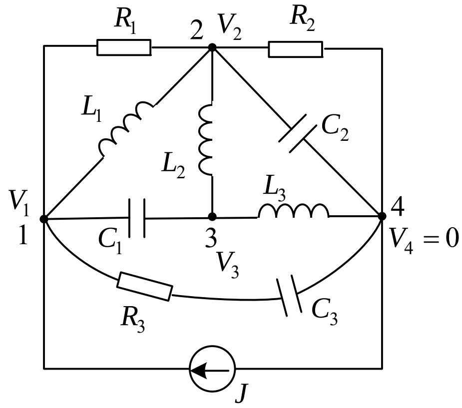
$$0 = \left(R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I_3 - \frac{1}{j\omega C}I_1 - j\omega L I_2$$

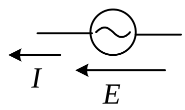
木の選び方



問題２　図の回路で節点電位法により，節点方程式を求めよ。フェーザ表示を用いよ。

（解）節点4を基準にとり，$V_4 = 0$ とする。節点1 , 2 , 3 の電位をそれぞれ V_1 , V_2 , V_3 とする。R_3C_3 のアドミタンスは $\dfrac{j\omega C_3}{j\omega C_3 R_3 + 1}$ だから





節点1：

$$J = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C_1 + \frac{j\omega C_3}{1 + j\omega C_3 R_3}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1}\right)V_2 - j\omega C_1 V_3$$

節点２：

$$0 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}\right)V_2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1}\right)V_1 - \frac{1}{j\omega L_2}V_3$$

節点3：

$$0 = \left(\frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_1\right)V_3 - j\omega C_1 V_1 - \frac{1}{j\omega L_2}V_2$$

（検討）もし，電流源の代わりに電圧源 E（図参照）が与えられたときには，上式で $J = I$, $V_1 = E$ とおいた式が成立する。I, V_2, V_3 が未知数となり解を求めることになる。